P11 – Kolmogorovovy rovnice

2.6 – Chapman-Kolmogorovovy rovnice pro spojité MP

Rozdělení pravděpodobnosti Markovova procesu je určeno počátečním rozdělením a pravděpodobnostmi přechodu. Zapišme pro množinu časových okamžiků $t_1 < t_2 < t_3 < .... < t_{n-1} < t_n$ **a** konečnou **množinu stavů** $i_1, i_2, i_3, ..., i_n \in I$

(2.51)

$$P(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, ..., X_{t_n} = i_n) = \sum_{j \in I} P(X_0 = j).P(X_{t_1} = i_1 | X_0 = j).$$

$$.P(X_{t_2} = i_2 | X_0 = j, X_{t_1} = i_1).........P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) =$$

$$\sum_{j \in I} p_j(0).p_{ji_1}(0,t_1).p_{i_1,i_2}(t_1,t_2).p_{i_2,i_3}(t_2,t_3)...p_{i_{n-1},i_n}(t_{n-1},t_n) =$$

$$p_{i_1}(t_1).p_{i_1,i_2}(t_1,t_2).p_{i_2,i_3}(t_2,t_3)...p_{i_{n-1},i_n}(t_{n-1},t_n)$$

kde jsme označili vektor absolutních pravděpodobností $p_k(t) = P(X_k = t)$

Tvrzení 1 **Chapman-Kolmogorovovy rovnice** **pro pravděpodobnosti přechodu**

(2.52A) $$p_{ik}(r,t) = \sum_{j \in I} p_{ij}(r,s) p_{jk}(s,t) \quad i,k \in I \quad \text{pro} \quad 0 \le r \le s \le t < \infty /$$

ověření:

$$p_{ik}(r,t) = \sum_{j \in I} P\left(X_s = j, X_t = k \middle| X_r = i\right) =$$

$$\sum_{j \in I} P\left(X_s = j \middle| X_r = i\right).P\left(X_t = k \middle| X_r = i, X_s = j\right) = \sum_{j \in I} p_{ij}(r,s) p_{jk}(s,t)$$

Zapíšeme-li matici pravděpodobností přechodu jako

$$P(s,t) = \left\| p_{ik}(s,t) \right\|_{i,k \in I},$$

můžeme **Chapman-Kolmogorovovy rovnice psát ve tvaru**

(2.52B) $$P(r,t) = P(r,s).P(s,t) \quad 0 \le r \le s \le t < \infty$$

Dále přijměme následující předpoklady:

Předpoklad A. **Vztah mezi pravděpodobnostmi a intenzitami přechodu:**

Funkce $p_{ij}(s,t)$ $i,j \in I$ **jsou spojitými funkcemi** s,t, $0 \le s \le t < \infty$. **Platí**

(2.53A) $$\lim_{h \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(t,t+h)}{h} = q_i(t) \quad i \in I, \qquad \text{(intenzita setrvání)}$$

(2.53B) $$\lim_{h \to 0+} \frac{p_{ik}(t,t+h)}{h} = q_{ik}(t) \quad i,k \in I, i \ne k \qquad \text{(intenzita přechodu)}$$

lokálně stejnoměrně v $t \in <0,\infty]$.

Předpoklad B Platí

(2.54) $\sum_{k\neq i} q_{ik}(t) = q_i(t)$ $i \in I, t \geq 0$

Platnost (54) znamená možnost záměny limity a sumace v rovnosti

(2.55) $\sum_{k\neq i} \frac{p_{ik}(t,t+h)}{h} = \frac{1-p_{ii}(t,t+h)}{h}$ $i \in I$,

a je proto vždy splněno, pokud I je konečná množina.

Poznámky:

a) Pro Poissonův proces s konstantní intenzitou q máme

$q_i(t) = q_{i,i+1}(t) = q \quad q_{ik}(t) = 0 \quad k \neq i, k \neq i+1$

b) Pro ústřednu s nekonečným počtem linek máme

$q_i(t) = q + ir$, $q_{i,i-1}(t) = ir$, $q_{i,i+1}(t) = q$, $q_{ik}(t) = 0$, pokud $|k-i| > 1$

(k je počet obsazených linek, q je konstanta udávající intenzitu příchodu nového hovoru, r je konstanta udávající intenzitu ukončení hovoru) .

Z předpokladu lokální stejnoměrné konvergence v (51),(52)vzhledem k t plyne rovněž

(2.56A) $\lim_{h\to 0+} \frac{1-p_{ii}(t,t-h)}{h} = q_i(t) \quad i \in I$,

(2.56B) $\lim_{h\to 0+} \frac{p_{ik}(t-h,t)}{h} = q_{ik}(t) \quad i,k \in I, i \neq k$,lokálně stejnoměrně v $t \in < 0,\infty]$.

2.7 – Kolmogorovovy diferenciální rovnice pro spojité MP

Tvrzení 1 **Kolmogorovova retrospektivní soustava rovnic**

Za předpokladů A a B platí pro všechna $k \in I$:

(2.57A) $$\frac{\partial p_{ik}(s,t)}{\partial s} = q_i(s).p_{ik}(s,t) - \sum_{j \neq i} q_{ij}(s).p_{jk}(s,t) \qquad i \in I, 0 < s \leq t < \infty$$

(2.57B) $$p_{ik}(t,t) = \partial_{ik} \qquad i \in I, 0 \leq t < \infty$$

Ověření: Použijeme Tvrzení 1 Chapman-Kolmogorovovu rovnice: podle (51A)

$$p_{ik}(s-h,t) = \sum_j p_{ij}(s-h,s)p_{jk}(s,t) \ , \quad h > 0 \ ,$$ z něhož dostaneme:

(2.58)

$$h^{-1}(p_{ik}(s-h,t) - p_{ik}(s,t)) = h^{-1}(p_{ii}(s-h,s) - 1).p_{ik}(s,t)) + h^{-1} \sum_{j \in i} p_{ij}(s-h,s)p_{jk}(s,t)$$

Dále máme podle definice intenzit

(2.59) $$\lim_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(s-h,s)}{h} = q_{ij}(s) \qquad i \neq j$$

Tento limitní přechod lze v provést za sumačním znaménkem, neboť pro $n \geq i$ máme pro I nekonečně velké odhad

$$0 \leq h^{-1} \sum_{j=n+1}^{\infty} p_{ij}(s-h,s).p_{jk}(s,t) \leq h^{-1} \sum_{j=n+1}^{\infty} p_{ij}(s-h,s) = h^{-1}(1 - p_{ii}(s-h,s) - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} p_{ij}(s-h,s)$$

Pravá strana při neomezeně se zmenšujícím h konverguje k výrazu

(2.60) $$q_i(s) - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} q_{ij}(s) \ .$$

Z předpokladu B plyne, že poslední výraz lze učinit libovolně malým, volíme-li n dost velké. Limitním přechodem pro $h \to 0+$ dostáváme nalevo v (2.58) derivaci $\frac{-\delta}{\delta s}$ a celkem vztah (2.57), neboť spojitá derivace zleva je oboustrannou derivací. Podmínka (2.57B) je zřejmá. □ .

K vyvození druhé soustavy Kolmogorovových rovnic potřebujeme další podmínku:

Předpoklad C

Při pevném k je limitní přechod v (53B) stejnoměrný vzhledem k $i \in I$.

Tvrzení 2 **Kolmogorovova prospektivní soustava rovnic**

Za předpokladů A, B a C platí pro všechna $i \in I$:

(2.60) $$\frac{\partial p_{ik}(s,t)}{\partial t} = -p_{ik}(s,t).q_k(t) + \sum_{j \neq i} p_{ij}(s,t).q_{jk}(t) \quad k \in I, 0 \le s \le t < \infty \; .$$

Důkaz:

Z rovnosti

$$p_{ik}(s,t+h) = \sum_j p_{ij}(s,t) p_{jk}(t,t+h) \, , \; h > 0 \text{ plyne}$$

$$h^{-1}(p_{ik}(s,t+h) - p_{ik}(s,t)) = p_{ik}(s,t).h^{-1}(p_{kk}(t,t+h) - 1) + h^{-1} \sum_{j \in i} p_{ij}(s,t) p_{jk}(t,t+h)$$

Limitní přechod pro $h \to 0+$ lze s ohledem na Předpoklad C provést za znamením sumace. Z (53A) a (53B) tak dostáváme (60). □ .

Použijeme-li notace $Q(t) = \|q_{ik}(t)\|_{i,k \in I}$ $q_{ik}(t)$ s intenzitami přechodu a připomeneme-li, že klademe $q_{ii}(t) = -q_i(t)$, můžeme Kolmogorovovy diferenciální rovnice psát v maticovém zápisu:

prospektivní soustava rovnic

(2.61) $$\frac{\partial P(s,t)}{\partial s} = -Q(s).P(s,t) \quad s \le t \, , \; P(t,t) = I$$

retrospektivní soustava rovnic

(2.62) $$\frac{\partial P(s,t)}{\partial t} = P(s,t).Q(t) \quad s \le t \, , \; P(s,s) = I$$, kde I je jednotková matice .

Homogenní Markovovy procesy mají konstantní přechodové intenzity, protože jejich pravděpodobnosti přechodu závisejí pouze na rozdílu časových argumentů.

$$Q(t) = Q = \|q_{ik}\|_{i,k \in I}$$

Kolmogorovovy rovnice pro $P(t) = P(s, s+t)$ jsou

(2.63A,B) $$\frac{dP(t)}{dt} = Q.P(t) \qquad \frac{dP(t)}{dt} = P(t).Q \qquad P(0) = I$$

Poznámka: K vysvětlení změny znaménka v prvé soustavě – (2.61)- je třeba si uvědomit, že máme $P(s,t) = P(t-s)$.