Matematický dodatek č. 1 - Kvadratické formy

Definice 1

Funkce $L(x)$ n reálných proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$ tvaru

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$, kde

a_i **je n-složkový vektor koeficientů** (reálných konstant) **a** x_i **n-složkový vektor proměnných** se nazývá ***lineární forma*** **v n -proměných.** Jak patrno, lineární forma je v podstatě lineární funkcí **n** proměnných neobsahující aditivní konstantu.

Definice 2

Funkce n+m reálných proměnných $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m$ tvaru

$$Z(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_i y_j$$, kde

b_{ij} **je ij-tý prvek** obdélníkové **matice koeficientů (reálných konstant) řádu n**

se nazývá ***bilineární forma*** **v n+m-proměných**. Jak patrno, bilineární forma je (neúplnou) kvadratickou funkcí n+m proměnných neobsahující aditivní konstantu ani lineární členy ani kvadratické členy příslušné téže proměnné.

Jiným vyjádřením této bilineární formy je maticový zápis

$$Z(x, y) = x'By \text{ nebo } Z(x, y) = y'Bx$$, kde

(obecně obdélníková) matice $B = \{ b_{ij} \}, i = 1,2,...,n ; j = 1,2,...,m$.

Definice 3

Funkce $Q(x)$ n reálných proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$ tvaru

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$, kde

c_{ij} **je prvek čtvercové matice koeficientů (reálných konstant) n** se nazývá ***kvadratická forma*** **v n -proměných**. Jak je zřejmé, kvadratická forma je kvadratickou funkcí **n** proměnných neobsahující aditivní konstantu ani lineární členy. Současně je to **speciální případ bilineární formy** pro případ, že pro všechna $i = 1,2,...,n$ ztotožníme $x_i = y_i$.

Obvyklým vyjádřením kvadratické formy je maticový zápis

$$Q(x) = x'Cx$$, kde

(čtvercová symetrická) matice $C = \{ c_{ij} \}, i = 1,2,...,n ; j = 1,2,...,m$.

Vzhledem k tomu, že určujícím atributem pro vlastnosti kvadratické formy jsou právě vlastnosti čtvercové matice $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}, \; i = 1,2,\ldots,n; \; j = 1,2,\ldots,n$, nebudeme v dalším výkladu striktně rozlišovat vlastnosti kvadratické formy a jí příslušné matice.

Poznámka: Zpravidla se omezujeme na **kvadratické formy, pro jejichž koeficienty** $\mathbf{c_{ij}}$ **platí symetrie, tzn.** $\mathbf{c_{ij} = c_{ji}}; \quad \mathbf{i = 1,2,\ldots,n; \; j = 1,2,\ldots,n}$. Zřejmě to není na újmu obecnosti, neboť pokud tento vztah u nějaké kvadratické formy není splněn, např. u formy

$$Q^*(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c^*_{ij} x_i x_j \qquad \text{, kde}$$

stačí zprůměrovat $c_{ij} = (c^*_{ij} + c^*_{ji})/2$ a dále pracovat již se symetrickou kvadratickou formou $Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$. Maticový zápis kvadratické formy $Q(x) = x'Cx$ vychází z reprezentace koeficientů v maticovém tvaru a proměnných v podobě (sloupcového) vektoru. **Matice C je** tedy **symetrická**.

Definice 4

(a) **Kvadratická forma Q(x) s maticí koeficientů C se nazývá *pozitivně definitní (p.d.)*, jestliže platí** $\mathbf{x'Cx > 0}$ pro libovolný vektor proměnných **x** kromě vektoru majícího všechny složky $\mathbf{x_i}$ rovny nule.[1]

(b) **Kvadratická forma Q(x) s maticí koeficientů C se nazývá *pozitivně semidefinitní (p.sd.)*, jestliže platí** $\mathbf{x'Cx \geq 0}$ pro každý vektor proměnných x kromě vektoru majícího všechny složky rovny nule.

(c) **Kvadratická forma Q(x) s maticí koeficientů C se nazývá *negativně definitní (p.d.)*, jestliže platí** $\mathbf{x'Cx < 0}$ pro libovolný vektor proměnných x kromě vektoru majícího všechny složky x_i rovny nule.

(d) **Kvadratická forma Q(x) s maticí koeficientů C se nazývá *negativně semidefinitní (n.sd.)*, jestliže platí** $\mathbf{x'Cx \leq 0}$ pro každý vektor proměnných x kromě vektoru majícího všechny složky rovny nule.

(e) **Kvadratická forma Q(x) s maticí koeficientů C se nazývá *indefinitní (ind.)*, jestliže pro nějaký vektor x≠0 platí** $\mathbf{x'Cx < 0}$ **a pro nějaký jiný vektor z≠0 naopak** $\mathbf{z'Cz > 0}$[2].

Poznámka Definitnost či semidefinitnost není u kvadratických forem (resp. příslušných matic) **vlastností běžnou, co do četnosti převažují kvadratické formy indefinitní.**

[1] **V tomto případě by kvadratická forma nabývala identicky** (bez ohledu na volbu C) **nulovou hodnotu.**

[2] **Zápisem** $\mathbf{x \neq 0}$ **rozumíme, že alespoň jedna ze složek vektoru x je nenulová. Totéž u** $\mathbf{z \neq 0}$.

Vyšetřování typu kvadratické formy (ač snadné u matic řádu 2 nebo 3) nemusí být u matic větší dimenze až tak jednoduché (nemáme-li předem další informace, např. o vlastních číslech vyšetřované matice). Pro některé případy nicméně často vystačíme s postupem představujícím sdružování do kvadratických členů, tzv. doplněním na čtverec.

Obrazně lze říci, že např. pozitivní (semi-) definitnosti napomáhá, má-li matice **C** řádem (absolutní hodnotou) vysoké kladné prvky na hlavní dioagonále ve srovnání s mimodiagonálními prvky (bez ohledu na znaménka těchto mimodiagonálních prvků).

Věta 1 **Symetrická matice C má všechna charakteristická (vlastní) čísla reálná.**

Věta 2 (a) **Kvadratická forma s maticí C=$\{c_{ij}\}$ je pozitivně definitní právě tehdy, jestliže pro** (konečnou) **posloupnost hlavních minorů matice C platí**

$$c_{11} > 0 \;,\quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} > 0 \;,\quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} > 0 \;, \text{ atd.}$$

tzn. všechny hlavní minory této matice jsou kladné.

(b) **Kvadratická forma s maticí C=$\{c_{ij}\}$ je negativně definitní právě tehdy, jestliže pro** (konečnou) **posloupnost hlavních minorů matice C platí**

$$c_{11} < 0 \;,\quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} > 0 \;,\quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} < 0 \;, \text{ atd.}$$

tzn. posloupnost hlavních minorů matice C střídá znaménka, přičemž pro $n = 2$ je příslušný minor kladný.

Dodatek: **pro pozitivně resp. negativně semidefinitní kvadratické formy platí tvrzení věty 3 s obměnou znamének: „≥„ za „>„ v** (a) **a obměnou „≤„ za „<„ v** (b).

Definice 4 ***Charakteristický polynom*** **$P(A)$ čtvercové symetrické matice A řádu n je determinant** tvaru

$|A - \lambda . I_n|$, kde **I_n je jednotková matice řádu n a λ proměnná polynomu.**

Charakteristický polynom tedy **mnohočlen stupně n** v **λ s jedničkovým koeficientem u nejvyšší mocniny u λ^n** , tedy mnohočlen obecného tvaru

$$P(A) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + b_3\lambda^{n-3} + ... + b_{n-1}\lambda + b_n$$

Dodatek: **Jestliže charakteristický polynom položíme roven nule , tj. $|A - \lambda . I_n| = 0$, dostaneme tzv. *charakteristickou rovnici matice A*.** $|A - \lambda . I_n| = 0$

Definice 5 **Kořeny charakteristického polynomu tj. n-tice hodnot λ_1, λ_2 ,...., λ_n se nazývají** ***charakteristická čísla*** (nebo také) ***vlastní čísla***, anglicky **[eigenvalues]** matice **A** .

Definice 6 ***Charakteristický vektor*** (nebo také ***vlastní vektor***, anglicky **[eigenvector]**) **příslušný charakteristickému číslu** λ_i se nazývá n-složkový vektor **z** splňující podmínku

$$\mathbf{A.z} = \lambda_i.\mathbf{z} \quad \textbf{pro konkrétní pevný index i.}$$

Určení vlastních čísel matice tedy spočívá ve vyčíslení determinantu $|\mathbf{A} - \lambda.\mathbf{I}_n|$ a spočtení kořenů příslušné charakteristické rovnice $|\mathbf{A} - \lambda.\mathbf{I}_n| = 0$. Je patrné, že **výpočet bez použití počítače a vhodných numerických metod je únosně zvládnutelný pouze u matic malé dimenze** (do stupně 3) nebo u velmi speciálních matic.

Soubor vlastních čísel matice bývá někdy nazýván **spektrem matice** a vyšetřování vlastnosti spojených s těmito vlastními čísly pak **spektrální analýza.**

Věta 3 **Symetrická matice má všechna charakteristická čísla reálná.**
Tato zde bez důkazu uváděná věta je velmi důležitá, neboť v prostředí kvadratických forem umožňuje omezit se na vyšetřování reálných (a tudíž velikostí srovnatelných) hodnot.

Věta 4 :

(a) Symetrická pozitivně definitní matice C řádu n má všechna vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ kladná

(b) Symetrická pozitivně semidefinitní matice C řádu n má všechna vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nezáporná

(c) Symetrická negativně definitní matice C řádu n má všechna vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ záporná

(d) Symetrická negativně definitní matice C řádu n má všechna vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nekladná.

(e) Symetrická indefinitní matice C řádu n má alespoň jedno charakteristické číslo,řekněme λ^* **kladné a alespoň jedno charakteristické číslo,** řekněme λ^{**} **záporné**.

Výše uvedená konstatování dávají velmi užitečný výsledek v tom smyslu, že **o typu matice C lze takto rozhodnout ze znalosti právě všech vlastních čísel této matice.**

Příčina, proč je znalost vlastních čísel matice tak důležitá, spočívá v **možnosti vyšetřovat vlastnosti původní matice C (a také kvadratické formy k ní příslušné) pomocí transformace provedené současně na proměnné kvadratické formy** a na sloupce (či řádky) matice. Popíšeme tento postup podrobněji :

Mějme kvadratickou formu (v maticovém zápisu) $\mathbf{Q(x) = x'Cx}$. Převeďme původní proměnné **x** do nové skupiny n proměnných pomocí maticové transformace $\mathbf{x = P.y}$ neboli $\mathbf{y = P^{-1}.x}$. Je přitom zřejmé, že **nutným předpokladem pro uskutečnění této transformace je existence inverzní matice $\mathbf{P^{-1}}$** a tedy nesingularita (čtvercové transformační) matice P.

Operaci můžeme tedy zapsat jako $\mathbf{Q(x) = x'Cx = y'P'C'Py}$

a dále pracovat s touto kvadratickou formou tak, jakoby se vztahovala k proměnným $\mathbf{y_1, y_2, ..., y_n}$ a současně ke koeficientům představovaným prvky matice $\mathbf{D = P'C'P}$. Tato **matice $\mathbf{D}$ je** (při regulární matici $\mathbf{P}$) opět **čtvercová, symetrická a má stejnou hodnost jako původní matice $\mathbf{C}$.**

Přitom lze dále ukázat, že při vhodné volbě matice $\mathbf{P}$ může nabýt výsledná matice $\mathbf{D}$ takového tvaru, že jedinými jejími nenulovými prvky budou prvky na její hlavní diagonále a tyto diagonální $\mathbf{d_{11}, d_{22}, d_{33}, ..., d_{nn}}$ prvky budou hodnotami shodné s charakteristickými čísly matice $\mathbf{A}$, tj hodnotami $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n}$. Tato skutečnost přirozeně velmi zprůhledňuje vyšetřování spektrálních vlastností matice C. Problémem, jehož řešení dále naznačíme, je však určením tvaru či konstrukce právě oné vhodné transformující matice $\mathbf{P}$.

Po tomto objasnění **se lze v analýze posuzování definitnosti či semidefinitnosti omezit na diagonální prvky matice $\mathbf{D}$**. Transformaci $\mathbf{P}$ lze přitom dokonce volit tak, aby charakteristická čísla nacházející se na diagonále $\mathbf{D}$ byla seřazena (nejvhodněji sestupně). Pak tedy :

a) **počet nenulových prvků $\mathbf{d_{ii}}$ označuje hodnost matice $\mathbf{D}$ (a současně i $\mathbf{C}$).**

b) **výskyt jen kladných prvků $\mathbf{d_{ii}}$ oznamuje pozitivní definitnost $\mathbf{D}$ (a současně $\mathbf{C}$)**

c) **výskyt jen záporných prvků $\mathbf{d_{ii}}$ značí negativní definitnost $\mathbf{D}$** (a současně $\mathbf{C}$)

d) **současná přítomnost kladných i záporných prvků $\mathbf{d_{ii}}$ značí indefinitnost $\mathbf{D}$ (a tedy** i $\mathbf{C}$).

Následující dvě věty se vztahují k vlastnostem determinantů kvadratických forem se čtvercovou symetrickou maticí $\mathbf{C}$, která je - v prvním řádku a prvním sloupci - ovroubena vektorem koeficientů lineární formy :

Věta 5: Nechť $\mathbf{Q(x) = x'Cx}$ je **kvadratická forma se symetrickou maticí $\mathbf{C}$** řádu n a podobně nechť $\mathbf{R = \alpha' x}$ je lineární forma s n-členným vektorem koeficientů α a n-členným vektorem proměnných **x.**

a) Potom **kvadratická forma $\mathbf{Q(x) = x'Cx}$ je pozitivně definitní při vedlejší podmínce $\mathbf{\alpha' x = 0}$ právě tehdy, jestliže pro** (konečnou) **posloupnost hlavních minorů platí:**

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & c_{11} & c_{12} \\ \alpha_2 & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} < 0 \ , \quad \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ \alpha_1 & c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ \alpha_3 & c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} < 0 \text{, atd....}$$

tzn. **všechny hlavní minory této matice jsou záporné**[3].

---

[3] **Zřejmě tato podmínka platí i pro „minory" dimenze 2 (výraz $-\alpha_1^2$ je zajisté záporný).**

Podobně: **Stejně definovaná kvadratická forma $Q(x) = x'Cx$ s maticí C je při shodné podmínce představované lineární formou R pozitivně semidefinitní, jestliže výše uvedená posloupnost hlavních minorů má samá nekladná znaménka.**

b) Potom **kvadratická forma $Q(x) = x'Cx$ je negativně definitní při vedlejší podmínce $\alpha' x = 0$ právě tehdy, jestliže pro** (konečnou) **posloupnost hlavních minorů platí, že tato posloupnost střídá znaménka, přičemž první z determinantů uvedených v tvrzení a) je kladný.**

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & c_{11} & c_{12} \\ \alpha_2 & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} > 0 \,, \quad \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ \alpha_1 & c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ \alpha_3 & c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} < 0 \text{, atd....[4]..}$$

Analogicky **Shodně definovaná kvadratická forma Q s maticí C je při shodné podmínce představované lineární formou R negativně semidefinitní, jestliže výše uvedená posloupnost hlavních minorů střídá znaménka $\geq$ a $\leq$ (a začíná znaménkem $\geq$).**

Jak patrno, **matice v uvedeném tvaru může být interpretována právě jako matice U vytvořená z prvních a druhých parciálních derivací užitkové funkce (při vyčíslení hodnot v nějakém, např. rovnovážném bodě $(x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_n{}^*)$.** Poloha prvních a druhých parciálních derivací je shodná jako u výše uvedené matice $\mathbf{C}$, resp. vektoru $\boldsymbol{\alpha}$.

Jestliže na vektor proměnných $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uplatníme regulární transformaci tvaru $y = P.x$, neboli $y = P^{-1}.x$, potom můžeme psát

$$Q(x) = \left(P^{-1}y\right)'.P.\left(P^{-1}y\right) = y'\left(P^{-1}\right)'\left(P.P^{-1}\right)y = y'\left(P^{-1}\right)y$$, protože $\mathbf{P.P^{-1} = I_n}$ a dále

protože pro symetrickou matici platí $\left(P^{-1}\right)' = P^{-1}$. Dále proto platí

Věta 6 :

Jestliže je kvadratická forma $Q(x) = x'Cx$ pozitivně definitní, platí tato **pozitivní definitnost stejně i pro kvadratickou formu $Q(z) = z'C^{-1}z$.**

Analogicky

Jestliže je kvadratická forma $Q(x) = x'Cx$ negativně definitní, platí tato **negativní definitnost stejně i pro kvadratickou formu $Q(z) = z'C^{-1}z$.**

Poznámka. Podobná tvrzení můžeme vyslovit také pro (negativní a pozitivní) semidefinitnost kvadratické formy $Q(z) = z'C^{-1}z$ vůči $Q(x) = x'Cx$.

---

[4] **Opět tato podmínka platí i pro „minory" dimenze 2, kde výraz $-\alpha_1^2$ je zajisté záporný.**