Standardní (též klasický) lineární regresní model

Specifikace=formulace (jednorovnicového) **lineárního regresního modelu**

(1) $y = X\beta + \varepsilon$ **resp.** $y_t = \sum_{j=1}^{k} X_{tj}\beta_j + \varepsilon_t$ **, kde**

y **je T-členný (sloupcový) vektor pozorování závisle (vysvětlující) proměnné (*regresandu*)**
X **je [Txk] matice pozorování k nezávisle proměnných (*regresorů*) – *matice plánu***
β **je k-členný (sloupcový) vektor neznámých regresních koeficientů**
ε **je T-členný (sloupcový) vektor nepozorovatelných náhodných složek (*disturbancí*)**

Ve strukturním vektorově- maticovém vyjádření

(1A)
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ x_{31} & x_{32} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{T1} & x_{T2} & \dots & x_{Tk} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots. \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

Poznámka: Pokud je v rovnici zastoupena úrovňová konstanta β_1, pak k ní příslušný jedničkový vektor $1 = (1,1,\dots,1)'$ bude obsažen prvním sloupci matice X , tzn. že bude platit $x_{t1} = 1$ pro všechna $t = 1,2,\dots,T$.

Předpokládáme, že počet vysvětlujících proměnných je menší (v krajním případě roven) **než počet pozorování, tedy , že platí nerovnost**

$$k < T$$

Odhady parametrů nějakou vhodnou odhadovou metodou (např. metodou nejmenších čtverců)

(2) $b = \hat{\beta}(y, X)$ **např.** $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'y)$

Definice vyrovnaných hodnot závisle proměnné

(3) $\hat{y} = Xb$ $y_t = \sum_{j=1}^{k} X_{tj} b_j$

Definice reziduí (odhadnutých náhodných složek)

(4) $e = \hat{\varepsilon} = y - \hat{y}$ **neboli** $y = \hat{y} + e$

odtud vyplývá možnost alternativního zápisu závisle proměnné(s odhady parametrů a s reziduy)

(5) $y = Xb + e$

Některé další vztahy mezi veličinami lineárního regresního modelu

Z porovnání (1) a (5) obdržíme vztah mezi ε **a** $e = \hat{\varepsilon}$:

(6) $$X\beta + \varepsilon = Xb + e$$ [1]

(pokud použijeme odhad OLS, pak pravá strana $= X(X'X)^{-1}X'y + e$ **),**
z čehož dále plyne

(7) $$e = y - Xb = y - X(X'X)^{-1}X'y = \left[I_T - X(X'X)^{-1}X'\right]y = My$$

(8) **neboli platí** $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = M\boldsymbol{y}$

(9)
$$e = y - Xb = X\beta + \varepsilon - Xb = X\beta + \varepsilon - X(X'X)^{-1}X'y = X\beta + \varepsilon - X(X'X)^{-1}X'[X\beta + \varepsilon] =$$
$$= X\beta + \varepsilon - X\beta - \left[X(X'X)^{\ 1}X'\right]\varepsilon = \left[I - X(X'X)^{\ 1}X'\right]\varepsilon = M\varepsilon$$

(10) **neboli platí** $e = M\varepsilon$

Varovná poznámka:

Ze vztahů $e = My$ **a** $e = M\varepsilon$ **nelze usuzovat, že platí** $y = \varepsilon$**, neboť** M **je vždy singulární matice. Nelze proto psát** $y = M^{-1}\varepsilon$ **, resp.** $e = M^{-1}\varepsilon$**, protože matice** M^{-1} **neexistuje.**

Hodnost matice $M = I_T - X(X'X)^{-1}X'$ **je** $T - k < T$

protože $$h(I_T) = T \qquad h\left(X(X'X)^{-1}X'\right) = h\left(X'X\,(X'X)^{-1}\right) = k$$

Na výše uvedené zjištění můžeme pohlížet také z toho hlediska, že k určení reziduí je pomocí matice M „vytahována" stejná informace jako z vektoru závisle proměnné. Matice M jakoby „odfiltruje" „přebytečnou" informaci (potřebnou pro určení e) nacházející se v y, ale nikoliv v ε.

Poznámka:
Centrovanost náhodných složek se přenáší na rezidua, která mají rovněž nulovou střední hodnotu, neboť

$$E(e) \underset{\text{dle (10)}}{=} E(M\varepsilon) = E\left(I_T - X(XX)^{-1}X'\right)\varepsilon \underset{\text{nestochastičnost M}}{=} \left(I_T - X(XX)^{-1}X'\right)E(\varepsilon) \underset{\text{centrovanost } \varepsilon}{=} 0.$$

[1] Na levé straně (6) máme dvě nepozorovatelné veličiny: β, ε, zatímco na pravé straně jsou jak odhadnuté parametry b, tak rezidua e, obojí určené z pozorovaných proměnných: Je ovšem třeba dodat, že výpočet b (a následně i e) obecně závisí na užité odhadové metodě.U standardního lineárního modelu regresního i jiné odhadové metody vedou k témuž výrazu, avšak u složitějších modelů tomu ale tak nemusí být.

Vlastnosti proměnných lineárního regresního modelu

1. Centrovanost náhodných složek

$$E\,\varepsilon = 0 \qquad \textbf{neboli} \qquad E\,\varepsilon_t = 0 \ \textbf{ pro všechna } t = 1,2,\ldots,T$$

nebude-li splněno, pak střední hodnota náhodných složek (ani reziduí) nebude nulová a regresní přímka nepovede „středem“ oblasti pozorovaných hodnot, ale nad či pod ní (nepůjde o regresní přímku ve vlastním slova smyslu). Odchylky nebudou „nestranné“ a součet reziduí nebude roven 0.

2. Diagonalita kovarianční matice náhodných složek

$$Var(\varepsilon) = Cov(\varepsilon,\varepsilon') = \sigma^2.I_T \ \textbf{ (diagonální matice se stopou } T.\sigma^2\textbf{)}$$

což v sobě obsahuje dvě vlastnosti, jimiž jsou

2a) homoskedasticita náhodných složek

$$var\,\varepsilon_t = \sigma^2 \qquad \textbf{(rozptyl nezávislý na indexu pozorování)}$$

nebude-li splněno, pak budou mít náhodné složky v různých pozorováních různý rozptyl a metoda OLS ztratí svou vydatnost (byť odhady zůstanou nestranné). Nejde však o fatální problém a parametry budou odhadnutelné. Různost rozptylů náhodných složek v různých pozorováních se nazývá *heteroskedasticita*. Ta je odstranitelná nebo zmírnitelná některými speciálními postupy, např. použitím vážené metody nejmenších čtverců WLS.

2b) nekorelovanost náhodných složek

$$Cov(\varepsilon_s,\varepsilon_t) = E(\varepsilon_s.\varepsilon_t) = \delta_{st}.\sigma^2 \ \textbf{, kde } \delta_{st} = 1 \textbf{ pro } s = t \textbf{ a také } \delta_{st} = 0 \textbf{ pro } s \neq t$$

nebude-li splněno, pak budou náhodné složky v různých pozorováních vzájemně korelované a odhady parametrů nebudou vydatné (byť zůstanou nestranné). K zajištění optimálních vlastností bude nutno uplatnit zobecněnou metodu nejmenších čtverců GLS (pokud budou dodatečné informace o modelu) nebo problém zmírnit některou speciální technikou připouštějící autokorelaci náhodných složek.

3. Nekorelovanost náhodných složek s nezávisle proměnnými

$$E(X'.\varepsilon) = 0 \ \textbf{ neboli } \ E(x_{tj}.\varepsilon_t) = 0 \ \textbf{ pro všechna } j = 1,2,\ldots,k$$

nebude-li splněno, pak to znamená, že informace obsažená v náhodných složkách má něco společného s informací obsaženou v některé vysvětlované proměnné a že „náhodná složky“ má v sobě kousek (nebo kus) systematické informace. To je v rozporu s uvažovaným charakterem náhodné složky. Odhad parametrů nebude možno takto nijak statisticky získat (ani jinou metodou než OLS)

4. Plná hodnost matice vysvětlujících proměnných $\quad h(X) = k$

nebude-li splněno, pak bude mít matice X hodnost menší než k, což bude znamenat, že některé její sloupce budou lineárně závislé. Jinými slovy: informace obsažená ve sloupcích matice X, tedy v jednotlivých vysvětlujících proměnných není nezávislá a vzájemně se prolíná. Z algebraického hlediska to má ten následek, že matice $X'X$ bude singulární (její determinant bude nulový) a nebude k ní existovat (jednoznačně určená inverzní matice). Odhad parametrů (metodou OLS) takto nebude možné určit, resp. při použití pseudoinverze nebude odhad určen jednoznačně.

(prostá,obyčejná) Metoda nejmenších čtverců (MNČ, OLS)

[Ordinary least squares method]

Minimalizačním kritériem je zde **součet čtverců reziduí (odhadnutých náhodných složek neboli rozdílů mezi pozorovanými a vyrovnanými hodnotami) :**

$$Min\, e'e = Min(y - Xb)'(y - Xb)$$ neboli v pozorovaných hodnotách

$$Min \sum_{t=1}^{T} e_t^2 = Min \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{y}_t)^2 = Min \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - \sum_{j=1}^{K} x_{tk} b_k \right)\left(y_t - \sum_{k=1}^{K} x_{tk} b_k \right)$$

Polohu minima (tj. bodu=odhadnutého vektoru parametrů b) **, ve kterém je minimalizovaný výraz nejmenší) nalezneme řešením soustavy tzv.normálních rovnic**

$$\frac{\partial e'e}{\partial b} = \frac{\partial (y - Xb)'(y - Xb)}{\partial b} = -2X'y + 2X'Xb = 0$$ **(vektorově).**

tuto soustavu řešíme úpravami (vydělením 2, přeskupením členů) **na tvar** $X'Xb = X'y$**, která má řešení pro** b **ve tvaru** $b = (X'X)^{-1} X'y$ **,** $\leftarrow$ **řešení je jednoznačné, neboť vzhledem k předpokladům** $h(X) = k$**, existuje (jediná) inverzní matice k matici** $X'X$ **.**

Poznámka **Vyjádření minimalizace v pozorovaných hodnotách:**

$$H(y, X, b) = \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - \sum_{i=1}^{k} x_{ti} b_i \right)\left(y_t - \sum_{i=1}^{k} x_{ti} b_i \right) = \sum_{t=1}^{T} y_t^2 - \sum_{t=1}^{T} y_t \left(\sum_{i=1}^{k} x_{ti} b_i \right) - \sum_{t=1}^{T} y_t \left(\sum_{i=1}^{k} x_{ti} b_i \right) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{i=1}^{k} x_{ti} b_i \right)\left(\sum_{i=1}^{k} x_{ti} b_i \right)$$

Derivací podle (kterékoliv) pevně zvolené složky vektoru parametrů b_j dostaneme

$$\frac{\partial H(y, X, b)}{\partial b_j} = 0 - 2\sum_{t=1}^{T} x_{tj} y_t + 2\sum_{t=1}^{T} x_{tj} \sum_{i=1}^{k} x_{ti} b_i = 0 \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, k$$ a odtud

$$-2\mathbf{X'y} \qquad +2\mathbf{X'X}b$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{tj} \sum_{i=1}^{k} x_{ti} b_i = \sum_{t=1}^{T} x_{tj} y_t \quad \text{neboli} \quad b_i = \left(\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{k} x_{ti} x_{tj} \right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_{ti} y_t \ , \ i = 1, 2, \ldots, k$$

V případě konečných sumací můžeme přeskupovat členy v součtech

Příklad: Lineární regrese s jedinou vysvětlující proměnnou (+úrovňovou konstantou) ($x_{t1} = 1$)

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sum x_{t2} \\ \sum x_{t2} & \sum x_{t2}^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{t2} y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} \sum x_{t2}^2 & -\sum x_{t2} \\ -\sum x_{t2} & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{t2} y_t \end{pmatrix}$$, kde

$$D = \begin{vmatrix} T & \sum x_{t2} \\ \sum x_{t2} & \sum x_{t2}^2 \end{vmatrix} = T.\sum x_{t2}^2 - \left(\sum x_{t2} \right)^2.$$ Odtud máme

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\left(\sum x_{t2}^2 \right).\left(\sum y_t \right) - \left(\sum x_{t2} \right)\left(\sum x_{t2} y_t \right)}{T.\sum x_{t2}^2 - \left(\sum x_{t2} \right)^2}$$

hodnota úrovňové konstanty

$$\hat{\beta}_2 = \frac{T.\left(\sum x_{t2} y_t \right) - \left(\sum x_{t2} \right).\left(\sum y_t \right)}{T.\sum x_{t2}^2 - \left(\sum x_{t2} \right)^2}$$

hodnota parametru sklonu regresní přímky

Vlastnosti obyčejné (prosté) metody nejmenších čtverců MNČ (OLS) v klasickém lineárním regresním modelu

poskytuje odhad ${}_{OLS}\hat{\beta}$ regresních koeficientů β ve tvaru ${}_{OLS}\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$

Věta 1 (Gauss-Markovova) Odhad regresních koeficientů ${}_{OLS}\hat{\beta}$ pořízený obyčejnou (prostou) metodou nejmenších čtverců je nejlepším nestranným lineárním odhadem vektoru parametrů β .

Důkaz rozdělíme jej na několik částí.

A. odhad ${}_{OLS}\beta^*$ je nestranný (pro libovolnou velikost vzorku ***T***).

Ověření nestrannosti:

$$E(\hat{\beta}) = E(X'X)^{-1}X'y = \underset{\text{vyjádření } y=X\beta+\varepsilon}{E(X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon)} = E(X'X)^{-1}X'X\beta + E(X'X)^{-1}X'\varepsilon =$$

$$= \underset{\text{nestochastičnost X}}{(X'X)^{-1}X'XE\beta} + \underset{E\varepsilon=0}{(X'X)^{-1}X'E\varepsilon} = \underset{E\beta=\beta\text{ (}\beta\text{ nestochastický vektor)}}{E\beta + (X'X)^{-1}X'0} = \beta + 0 = \beta \qquad \square .$$

Důsledek A Nestranná odhadová funkce je vždy asymptoticky nestranná.
Platí-li totiž $E({}_{(T)}\hat{\beta}) = \beta$ [2] pro každé konečné T, platí tentýž vztah i pro $T \to \infty$.

B. odhad ${}_{OLS}\hat{\beta}$ je konzistentní, tj. platí $\underset{T\to\infty}{plim}\,\hat{\beta} = \beta$

Vlastnost platí i pro případ, že matice X je stochastická.

Ověření konzistence: lze vyvodit z následujícího tvrzení

Tvrzení Jestliže je odhadová funkce asymptoticky nestranná a kovarianční matice této odhadové funkce konverguje při *T* $\to \infty$ k nulové matici, pak je tato odhadová funkce konzistentní.

Důkaz a) asymptotická nestrannost OLS-odhadové funkce vyplývá z *důsledku A*.

b) konvergenci kovarianční matice OLS-odhadové funkce (její tvar viz ad D) **k nulové matici ukážeme následovně**

Dále ukážeme, že $Cov(\hat{\beta}) = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$. Definujme matici $P = (X'X)/T$ a její $ij-tý$ prvek označíme jako P_{ij}.[3] Pro tento prvek platí

$$\left|P_{ij}\right| = \left|\frac{1}{T}.\sum_{t=1}^{T} x_{ti}.x_{tj}\right| \le \xi_{ij}^2 ,$$ přičemž tato rovnost platí pro všechna konečná T .

---

[2] Symbolem nalevo rozumíme střední hodnotu odhadnutého vektoru parametrů β spočteného na základě T pozorování.

[3] Účelem je ukázat, že matice P má prvky o konečné velikosti.

Všechny prvky této matice jsou tedy (v absolutní hodnotě) shora omezeny hodnotou $\xi^2 = \max \xi_{ij}{}^2$. Tedy, pro všechna T má matice P konečně velké prvky a je nesingulární. Zřejmě dále platí

$$(X'X)^{-1} = P^{-1}/T \quad \text{(neboť platí } X'X = T.P\text{)}$$

a navíc matice P^{-1} má konečně velké prvky (π_{ij}) pro všechna T. Platí tedy

$$\underset{T\to\infty}{p\ lim}\ Cov({}_{OLS}\hat{\beta}) = \underset{T\to\infty}{p\ lim}\ \sigma_\varepsilon{}^2 (X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon{}^2 \underset{T\to\infty}{p\ lim}\ P^{-1}/T = 0_k,$$

kde 0_k je (čtvercová) matice řádu k složená ze samých nul.

C. odhad ${}_{OLS}\hat{\beta}$ **je lineární** (vzhledem k vysvětlované proměnné y), neboť je definován jako lineární forma pozorování závisle proměnné y.

Ověření linearity Lze psát $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = C'y$, kde matice $C' = (X'X)^{-1}X'$ představuje koeficienty lineární formy, jejíž proměnné tvoří složky vektoru y. Poznamenejme, že vždy platí $C'X = (X'X)^{-1}X'X = I_k$, kde I_k je jednotková matice řádu ***k***.

D. kovarianční matice příslušná odhadové funkci $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ má následující tvar

$$Cov(\hat{\beta}) = \sigma_\varepsilon{}^2.(X'X)^{-1}$$

(nestrannost ^β)

Ověření $Cov(\hat{\beta}) = E\{[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})][\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]'\} = E\{[\hat{\beta} - \beta][\hat{\beta} - \beta]'\} =$

(dosazení ^β= (X'X)$^{-1}$ Xy) (dosazení za y=Xβ+ε)

$$= E\{[(X'X)^{-1}X'y - \beta][(X'X)^{-1}X'y - \beta]'\} = E\{[(X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) - \beta][(X'X)^{-1}X'(X\beta -$$

(X´X)$^{-1}$ X´X = I$_T$ (vyrušení β)

$$E\{[\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon - \beta][\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon - \beta]'\} = E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon][(X'X)^{-1}X'\varepsilon]' =$$

(transpozice) vytknutí nestoch..členů před E) Eε.ε' = $\sigma_\varepsilon^2 I_T$

$$= E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X.(X'X)^{-1}] = (X'X)^{-1}X'E\varepsilon.\varepsilon'X.(X'X)^{-1} =$$

(vytknutí skaláru σ_ε^2) (X´X)$^{-1}$ X´X = I$_T$

$$= (X'X)^{-1}X'\sigma_\varepsilon{}^2 I_T X.(X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon{}^2 (X'X)^{-1}X'X.(X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon{}^2 (X'X)^{-1} \quad \square.$$

Odtud plyne **důsledek D1.**
Směrodatné odchylky odhadnutých regresních parametrů $\sigma_{\hat{\beta}}$ získáme jako

$$\sigma_{\hat{\beta}_j} = \sigma_\varepsilon . \sqrt{\xi_{jj}} \quad \text{, kde}$$

ξ_{jj} je j-tý diagonální prvek inverzní momentové matice $(X'X)^{-1}$

σ_ε je směrodatná odchylka náhodných složek (stejná u všech ε_t).

E. odhad $_{OLS}\hat{\beta}$ **je nejlepší** ve smyslu "minimální" kovarianční matice $Cov(\hat{\beta})$, neboť pro kovarianční matici kterékoliv jiné (*lineární*) odhadové funkce $\tilde{\beta}$ platí :

$$Cov(\tilde{\beta}) - Cov(\hat{\beta}) = \Omega$$

kde Ω je nějaká symetrická pozitivně semidefinitní matice řádu $\boldsymbol{k}$ (rozměrů k x k).

Ověření Bez újmy na obecnosti můžeme matici D' jiné lineární odhadové funkce

$\tilde{\beta} = D' y$ vyjádřit ve tvaru $D' = (X' X)^{-1} X' + G'$

Poznámka Vzhledem k požadavku na nestrannost $\tilde{\beta}$ musí s ohledem na platnost vztahu $D' X = (X' X)^{-1} X' X + G' X = 1_k$, vždy platit $G' X = 0$.

Ověření vydatnosti

$$\beta = E(\tilde{\beta}) = E(D' y) = E[D'(X\beta + \varepsilon)] = ED' X\beta + ED'\varepsilon = D' X\beta + 0 = D' X\beta$$

[matice D, X jsou nestochastické]

z čehož přímo plyne $D' X = 1_k$

Pro libovolnou jinou (*lineární* a *nestrannou*) odhadovou funkci tedy musí platit

$$Cov(\tilde{\beta}) = E\left\{[\tilde{\beta} - E\tilde{\beta}][\tilde{\beta} - E\tilde{\beta}]'\right\} = E\left\{[D'y - \beta][D'y - \beta]'\right\} =$$

$$= E\left\{[((X'X)^{-1} X' + G')y - \beta][((X'X)^{-1} X' + G')y - \beta]'\right\} =$$

$$= E\left\{[((X'X)^{-1} X' + G')(X\beta + \varepsilon) - \beta][((X'X)^{-1} X' + G')(X\beta + \varepsilon) - \beta]'\right\} =$$

[protože G´X = 0] [protože G´X = 0]

$$= E\left\{[(X'X)^{-1} X'X\beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta][(X'X)^{-1} X'X\beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta]'\right\} =$$

[protože $(X´X)^{-1} X' X = I$] [protože $(X´X)^{-1} X' X = I$]

$$= E\left\{[\beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta][\beta + (X'X)^{-1} X'\varepsilon + G'\varepsilon - \beta]'\right\} =$$

$$= E\left\{[(X'X)^{-1} X'\varepsilon + G'\varepsilon][(X'X)^{-1} X'\varepsilon + G'\varepsilon]'\right\} =$$

$$= E\left\{(X'X)^{-1} X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1} + G'\varepsilon\varepsilon'G + (X'X)^{-1} X'\varepsilon\varepsilon'G + G'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right\} =$$

[po uplatnění operátoru střední hodnoty a protože X i G jsou nestochastické matice]

$$= (X'X)^{-1} X'E\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1} + G'E\varepsilon\varepsilon'G + (X'X)^{-1} X'E\varepsilon\varepsilon'G + G'E\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1} =$$

[protože $E\varepsilon'\varepsilon = \sigma^2 I_T$]

$$= (X'X)^{-1} X'\sigma^2 I_T X(X'X)^{-1} + G'\sigma^2 I_T G + (X'X)^{-1} X'\sigma^2 I_T G + G'\sigma^2 I_T X(X'X)^{-1} =$$

[protože σ^2 je skalární hodnota]

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1} + \sigma^2 G'G + \sigma^2 (X'X)^{-1} X'G + \sigma^2 G'X(X'X)^{-1} =$$

[protože G´X = 0 a stejně X´G= 0]

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1} + \sigma^2 G'G = Cov(\hat{\beta}) + \sigma^2 G'G$$

kde $G'G$ je zřejmě pozitivně semidefinitní matice[4] a $\sigma^2 > 0$ □

F. pro odhad rozptylu reziduí dostaneme

$$E(e'e) = E(\varepsilon' M.M\varepsilon) = E(\varepsilon' M.\varepsilon) = Etr(\varepsilon' M.\varepsilon) = Etr(M\varepsilon\varepsilon') =$$

(M je idempotentní matice) (skalár je současně svou stopou) (tr A.B = tr B.A)

$$= trE(M\varepsilon\varepsilon') = tr(ME\varepsilon\varepsilon') = tr(M\sigma_\varepsilon^2 I_T) = \sigma_\varepsilon^2 tr(M) = \sigma_\varepsilon^2 (T-k)$$

(záměna stopy a střední hodnoty) (M je nestochastická) (σ^2 je skalární hodnota)

protože

$$tr(M) = tr(I_T - X(X'X)^{-1}X') = tr(I_T - X'X(X'X)^{-1}) = tr(I_T - I_K) = T-k$$

(definice M) (platí tr A.B = tr B.A) (stopa jednotkové matice je rovna její dimenzi)

G. z tvrzení F plyne, že nestranným odhadem rozptylu náhodných složek σ_ε^2

je výraz $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{e\acute{e}}{T-k}$, neboť zřejmě platí $E[\dfrac{\sum\limits^{T} e_t^2}{T-k}] = \sigma_\varepsilon^2$.

Z **důsledku D1** je patrné, že
odhady směrodatných odchylek odhadnutých regresních parametrů $s_{\hat{\beta}}$ získáme jako

$$s_{\hat{\beta}_j} = s_e . \sqrt{\xi_{jj}}$$, kde

ξ_{jj} je j-tý diagonální prvek inverzní momentové matice $(X'X)^{-1}$

s_e je směrodatná odchylka reziduí (stejná pro všechna $j = 1,2,...k$)

[4] Matice $P = G'G$ (stejně jako kterákoliv jiná symetrická nenulová matice $H'H$) je pozitivně definitní, protože pro ni platí $x'Px = x'G'Gx = z'z > 0$ (skalární součin je nulový jen pro identicky nulový vektor).

Poznámka: Prostá metoda nejmenších čtverců není jedinou používanou odhadovou metodou v prostředí standardního lineárního regresního modelu. K dalším technikám patří:

Metoda maximální věrohodnosti ML (Maximum Likelihood) je založena na maximalizaci sdružené hustoty (tzv.věrohodnostní funkce) rozdělení náhodných složek. Lokalizuje se tedy poloha modusu pro β a σ^2 , v němž tato funkce nabývá maxima.

Metoda nejmenších absolutních odchylek LAD (Least Absolute Deviations) je založena na minimalizačním kritériu tvaru

$$\sum_{t=1}^{T} \left| y_t - \sum_{j=1}^{k} x_{tj} \beta_j \right|$$

Odhady pořízené metodou LAD nelze vyjádřit v explicitním tvaru, ale je nutno použít iterační postup (např. algoritmy R.L.Faira)

Zobecněná momentová metoda GMM (Generalized moment method).