Modely s rozloženými zpožděními II

1) Koyckův model [Koyck L, M.1954]

je (naopak) příkladem modelu s rozloženým zpožděním o nekonečné délce. Má-li být zachována možnost statisticky odhadnout parametry takovýchto modelů, musí být dáno nějaké pravidlo o souvislostech mezi nimi. V případě modelu navrženého Holanďanem L.M.Koyckem[1] klesají váhy u jednotlivých vysvětlujících zpožděných proměnných podle schématu popsaného geometrickou posloupností.

Zapíšeme-li základní rovnici modelu s nekonečně rozloženým zpožděním ve tvaru

(1.1) $$\boldsymbol{Y_t} = \beta_0 \boldsymbol{X_t} + \beta_1 \boldsymbol{X_{t-1}} + \beta_2 \boldsymbol{X_{t-2}} + \ldots + \beta_k \boldsymbol{X_{t-k}} + \ldots + \varepsilon_t$$

neboli ve zkráceném zápisu

$$\boldsymbol{Y_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_i \boldsymbol{X_{t-j}} + \varepsilon_t \quad ,$$

je ihned patrné, že takto obecně vyjádřený model nelze prakticky použít (nelze odhadnout nekonečný počet parametrů). Dle Koyckem navržené konkretizace přijímají parametry tuto apriorní váhovou strukturu :

(1.2) $$\beta_i = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{w_j} \qquad \boldsymbol{j} = 0,1,2,\ldots,..$$

váhy/koeficienty $\boldsymbol{w_j}$ jsou prvky geometrické posloupnosti

(1.2a) $$\boldsymbol{w_j} = (1-\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{j}} \qquad 0 < \boldsymbol{q} < 1$$

která je pro danou hodnotu kvocientu $\boldsymbol{q}$ klesající.

Tímto způsobem lze převést původně nekonečný počet parametrů pouze na dva parametry $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{q}$, přičemž v konečné podobě model nabude tvar

(1.3) $$\boldsymbol{Y_t} - \boldsymbol{q}.\boldsymbol{Y_{t-1}} = \boldsymbol{b}(1-\boldsymbol{q})\boldsymbol{X_t} + (\varepsilon_t - \boldsymbol{q}.\varepsilon_{t-1})$$

což lze upravit na

(1.4) $$\boldsymbol{Y_t} = \boldsymbol{q}.\boldsymbol{Y_{t-1}} + \boldsymbol{b}(1-\boldsymbol{q})\boldsymbol{X_t} + \boldsymbol{v_t}$$

který je nazýván **autoregresním tvarem modelu (nekonečného) rozloženého zpoždění**. Všimněme si zde zejména dvou věcí :

a) do modelu se na pravou stranu dostala (jediná) zpožděná závisle proměnná (se zpožděním o 1 krok)

b) náhodné složky modelu $\boldsymbol{v_t} = (\varepsilon_t - \boldsymbol{q}.\varepsilon_{t-1})$ již (bohužel) nebudou vzájemně nekorelované, a to ani tehdy, jestliže jsme předpokládali nekorelovanost původních náhodných složek ε_t. Příčinou toho je skutečnost, že „nová“ vysvětlující proměnná $\boldsymbol{Y_{t-1}}$ není nekorelovaná s náhodnými složkami $\boldsymbol{v_t}$.

Platí totiž : $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{Y_{t-1}}(\varepsilon_t - \boldsymbol{q}.\varepsilon_{t-1})] = \boldsymbol{E}[\varepsilon_{t-1}(\varepsilon_t - \boldsymbol{q}.\varepsilon_{t-1})] = \boldsymbol{E}[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t] - \boldsymbol{E}[\varepsilon_{t-1}(\boldsymbol{q}.\varepsilon_{t-1})] = -\boldsymbol{q}\sigma^2$

kde σ^2 je rozptyl náhodných složek ε_t .

---

[1] **Koyck,L.M: Distributed Lags and investment analysis. Amsterdam, North Holand. 1954.**

Oproti klasickému lineárnímu regresnímu modelu tedy zde zřejmě nejsou splněny dva předpoklady :

a) vysvětlující proměnná $\boldsymbol{Y}_{t-1}$ není nekorelovaná s náhodnou složkou $\boldsymbol{v}_t$

b) vysvětlující proměnná $\boldsymbol{Y}_{t-1}$ není nestochastická (její součástí je náhodná složka ε_{t-1}), což je hned vidět, zapíšeme-li model se zpožděním o 1 krok.

Odhad parametrů Koyckovy rovnice (v autoregresním tvaru) je jinak technicky velmi jednoduchý – jde o regresní model se dvěma regresory bez jedničkového vektoru – snadno proveditelný metodou OLS, která však bude postrádat optimální vlastnosti (stejně jako např. odhad pomocí WLS).

Odhadnutými parametry budou $\hat{q}$ (přímý odhad q) a $c = \hat{b}.(1-\hat{q})$ (odkud odhad $\hat{b}$ snadno určíme jako $\hat{b} = \hat{c}/(1-\hat{q})$)

Z uvedených důvodů nemohou mít odhady parametrů (provedené obyčejnou metodou nejmenších čtverců) uspokojivé vlastnosti, nemusí být dokonce ani konzistentní. Literatura uvádí pro tuto a podobné situace některé speciální odhadové postupy (vedoucí ke konzistentním, případně i vydatným odhadům parametrů). Předpoklady o chování náhodných složek podmiňující nasazení těchto postupů jsou však obvykle málo realistické .

S ohledem na vlastnosti geometrického rozdělení přijatého v Koyckově modelu činí průměrná délka zpoždění hodnotu $\boldsymbol{q}/(1-\boldsymbol{q})$ a rozptyl $\boldsymbol{q}/(1-\boldsymbol{q})^2$.

Při $\boldsymbol{q} = 1/3$ bude $\boldsymbol{EX} = 1/3 : 2/3 = 1/2$
Při $\boldsymbol{q} = 1/2$ bude $\boldsymbol{EX} = 1/2 : 1/2 = 1$
Při $\boldsymbol{q} = 2/3$ bude $\boldsymbol{EX} = 2/3 : 1/3 = 2$

Interpretačně to znamená, že **agregovaný účinek všech v modelu uvažovaných zpožděných vysvětlujících veličin** (jichž je nekonečně mnoho) **se projeví** zhruba **stejně jako jediná zpožděná vysvětlující proměnná**, která bude mít zpoždění 0,5 roku, resp. 1 rok, resp. 2 roky.

Následující trojice modelů s rozloženými zpožděními si vydobyla již tradiční postavení v ekonomických aplikacích. Jejich společným znakem je, že s určitými obměnami navazují na Koyckův model (geometricky rozloženého zpoždění).

Jmenovitě se jedná o :

2) Model částečného přizpůsobení [Nerlove M. 1958]

Základní rovnicí modelu je vztah představující hypotézu, že **požadovaná (rovnovážná resp. optimální) úroveň vysvětlované proměnné** (značené obvykle $\boldsymbol{Y_t}*$, která není měřitelná, **je lineární funkcí vysvětlující nezávisle proměnné** $\boldsymbol{X_t}$ (nezpožděné). Příslušná rovnice má tedy tvar

(2.1) $$Y_t* = \gamma_0 + \beta_0 X_t + \varepsilon_t$$

přičemž skutečná změna závisle proměnné od období $\boldsymbol{t}-1$ k období $\boldsymbol{t}$ tj. rozdíl $\boldsymbol{Y_t} - \boldsymbol{Y_{t-1}}$ je v důsledku procesu částečného přizpůsobení úměrná proporcionální změně $\boldsymbol{Y_t}* - \boldsymbol{Y_{t-1}}$. Zapsáno relací

(2.2) $$\boldsymbol{Y_t} - \boldsymbol{Y_{t-1}} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{Y_t}* - \boldsymbol{Y_{t-1}}) \qquad 0 < \boldsymbol{d} \le 1$$

kde $\boldsymbol{d}$ je konstanta (míra reakce na žádanou změnu) nazývaná ***koeficient adaptace/přizpůsobení***. Zřejmě, v případě $\boldsymbol{d} = 1$ by šlo o úplné přizpůsobení.

Příkladem modelu typu (***2.1)*** může být sledování vývoje vybavenosti domácností určitým předmětem dlouhodobé spotřeby. Pak hodnota $\boldsymbol{Y_t}*$ může představovat "*optimální úroveň vybavenosti*" , tedy aproximativně vyjádřenou, neměřitelnou veličinu. Za vysvětlující proměnnou $\boldsymbol{X_t}$ pak můžeme považovat úroveň příjmu této domácnosti. Je přitom realistické očekávat, že v libovolném čase $\boldsymbol{t}$ se hladina vybavenosti nepřizpůsobí změně příjmu ihned, takže optimální úrovně se nedosáhne ihned, ale až s určitým prodlením. Příčiny mohou být nejrůznější: nedocenění užitné hodnoty předmětu, neuvědomění spotřebitele o přiměřené optimální úrovni, nedostatečná nabídka v sortimentu na trhu, setrvačnost v dosavadním spotřebním chování u domácností apod.

Rovnici (***2.2)*** lze alternativně vyjádřit jako

(2.3) $$\boldsymbol{Y_t} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{Y_t}* + (1-\boldsymbol{d})\boldsymbol{Y_{t-1}}$$

což lze interpretovat tak, že dosažená úroveň vybavenosti statkem $\boldsymbol{Y}$ v čase $\boldsymbol{t}$ je váženým průměrem optimální úrovně vybavenosti v témže čase $\boldsymbol{Y_t}*$ a úrovně skutečné vybavenosti v období $\boldsymbol{t}-1$ tj. $\boldsymbol{Y_{t-1}}$, váhy jsou použity v poměru $\boldsymbol{d}$ vůči $1-\boldsymbol{d}$.

Dosadíme-li (***2.1)*** do (***2.3)*** dospěje se po jednoduché úpravě

$$Y_t - Y_{t-1} = d(\gamma_0 + \beta_0 X_t + \varepsilon_t - Y_{t-1})$$

k autoregresnímu tvaru modelu částečného přizpůsobení

(2.4) $$Y_t = d.\gamma_0 + d\beta_0 X_t + (1-d)Y_{t-1} + v_t \qquad \boldsymbol{v_t} = \boldsymbol{d}.\varepsilon_t$$

Jak patrno, formální zápis modelu (***2.4)*** je v podstatě shodný se zápisem modelu Koyckova. Má však jednodušeji specifikovanou náhodnou složku.

Náhodné složky $\boldsymbol{v_t}$ zde nejsou závislé na svých zpožděných hodnotách, tj. budou sériově nekorelované. Metoda OLS poskytne v takovém případě konzistentní odhady parametrů $[c_1 = d.\gamma_0,\ \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{d}.\beta_0,\ \boldsymbol{c}_3 = (1-\boldsymbol{d})]$, z nichž postupně snadno odvodíme hodnoty $\boldsymbol{d}$, β_0 a γ_0. Rovněž další příznivé vlastnosti těchto odhadů (nestrannost, vydatnost) budou v tomto případě zajištěny.

Strukturu náhodných složek $\boldsymbol{v_t}$ lze vyvodit ze vztahu(***2.4***). Opakovanými substitucemi (dosazováním za $\boldsymbol{Y}_{t-1}$, $\boldsymbol{Y}_{t-2}$, ... , $\boldsymbol{Y}_{t-m}$) dostaneme

$$\boldsymbol{v_t} = \boldsymbol{d}.\varepsilon_t + (1-\boldsymbol{d})\boldsymbol{d}.\varepsilon_{t-1} + (1-\boldsymbol{d})^2\boldsymbol{d}.\varepsilon_{t-2} + ... = \boldsymbol{d}\sum_{j=0}^{\infty}(1-\boldsymbol{d})^j.\varepsilon_{t-j}$$

Ze statistického hlediska lze rozdíl mezi Koyckovým modelem a modelem částečného přizpůsobení spatřovat v tom, že **struktura náhodných složek modelu částečného přizpůsobení je generována procesem *klouzavých součtů* (*moving average*) původní náhodné složky.** V Koyckově modelu sledují náhodné složky autoregresní posloupnost.

3) Model adaptivních očekávání [Cagan P.1956]

Tento model je uveden regresní specifikací

(3.1) $$Y_t = \alpha_0 + \beta_0 X_t{}^* + \varepsilon_t$$

a byl v původním uvedení spojen se spotřební funkcí tvaru

(3.1a) $$C_t = \alpha_0 + \beta_0 M_t{}^* + \varepsilon_t$$

s významem veličin

$\boldsymbol{C_t}$ objem spotřebních výdajů domácností

$\boldsymbol{M_t}^*$ očekávaná výše důchodů/příjmů

ε_t náhodná složka s obvyklými vlastnostmi

Jde o formulaci konformní s *Friedmanovou hypotézou permanentního důchodu (HDP)*: spotřebitelé v čase, kdy realizují své nákupy, zpravidla ještě neznají skutečnou výši příjmů, které obdrží ve stejném období; své spotřební zvyklosti tedy řídí dle očekávaného důchodu $\boldsymbol{M_t}^*$, až na výjimky ne nutně totožného se skutečným $\boldsymbol{M_t}$.

Očekávanou výši permanentního důchodu však nelze určit pozorováním (tato proměnná je „latentní“) , definujeme ji tedy nepřímo pomocí vztahu vyjadřujícího přizpůsobení důchodu :

(3.2) $$\boldsymbol{X_t}^* - \boldsymbol{X}_{t-1}^* = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X_t} - \boldsymbol{X}_{t-1}^*) \qquad 0 < \boldsymbol{g} \le 1$$

neboli jinak zapsáno

(3.3) $$\boldsymbol{X_t}^* = \boldsymbol{g}\boldsymbol{X_t} + (1-\boldsymbol{g})\boldsymbol{X}_{t-1}{}^*$$

Konstanta $\boldsymbol{g}$ se nazývá ***koeficientem adaptivních očekávání***. Rovnici (***3.3***) lze interpretovat tak, že ekonomické subjekty přizpůsobují svá očekávání ve vztahu k $\boldsymbol{X}$ na základě zkušenosti z minulosti. Postupují přitom tak, že skutečnou hodnotu $\boldsymbol{X}$ (v kterémkoliv období $\boldsymbol{t}$) porovnávají s hodnotou $\boldsymbol{X}^*$, která byla očekávána. Přitom se řídí logickou úvahou

a) Je-li skutečná hodnota $\boldsymbol{X_t}$ oproti očekávané $\boldsymbol{X_t}^*$ větší, přizpůsobují svá očekávání stejným směrem (nahoru)

b) Je-li skutečná hodnota $\boldsymbol{X_t}$ oproti očekávané $\boldsymbol{X_t}^*$ menší, přizpůsobují svá očekávání také stejným směrem (dolů) .

Čím je koeficient $\boldsymbol{g}$ blíže k 1, tím je větší míra přizpůsobení.

Ze zápisu (***3.3***) plyne, že **očekávaná** („permanentní“) **výše důchodu je váženým průměrem skutečné hodnoty tohoto důchodu $\boldsymbol{X_t}$ a jeho očekávané úrovně $\boldsymbol{X_{t-1}}^*$ v předchozím období** (váhy jsou $\boldsymbol{g}$ resp. $1-\boldsymbol{g}$). Znamená to tedy, že

a) Při $\boldsymbol{g}=1$, pak $\boldsymbol{X_t}^*=\boldsymbol{X_t}$, tzn. domácnosti se řídí skutečnou výši aktuálního důchodu

b) Pokud by $\boldsymbol{g}=0$, pak $\boldsymbol{X_t}^*=\boldsymbol{X_{t-1}}^*$, tzn. domácnosti by se nepřizpůsobily vůbec (skutečnému důchodu není přisouzen žádný význam) a očekávání mají statický charakter (nemění se , zůstávají na úrovni očekávání z času $\boldsymbol{t}-1$).

Dosazením ze vztahu (***3.3***) do (***3.1***) dostaneme

(3.4) $$Y_t=\alpha_0+g\beta_0X_t+\beta_0(1-g)X_{t-1}^*+\varepsilon_t$$

Jestliže nyní vyjádříme výchozí specifikaci modelu pro období t-1, tzn.

(3.4a) $$Y_{t-1}=\alpha_0+g\beta_0X_t+\beta_0(1-g)X_{t-2}^*+\varepsilon_{t-1}$$

a po jejím vynásobení hodnotou $1-\boldsymbol{g}$ odečteme od ***3.4)***, dospějeme k výsledné rovnici ***autoregresního modelu adaptivních očekávání***

(3.5) $$\boldsymbol{Y_t}=\beta_0\boldsymbol{g}+\beta_1\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{X_t}+(1-\boldsymbol{g})\boldsymbol{Y_{t-1}}+\boldsymbol{u_t}$$

(3.5a) $$\boldsymbol{u_t}=\varepsilon_t-(1-\boldsymbol{g})\varepsilon_{t-1}$$

Jak patrno, formálně je model vyjádřen stejným zápisem jako má *Koyckův model*, dokonce shodným, jaký má i model částečného přizpůsobení, avšak má jinou specifikaci náhodných složek a jinak jsou též interpretovány jeho parametry.

Poznámka Formální shoda všech dosud uvedených dynamických modelů zapsaných v autoregresním tvaru je dána tím, že všechny vycházejí ze stejného apriorního omezení časové struktury rozložených zpoždění, která je reprezentována geometricky klesajícími váhovými koeficienty.

Variantní specifikace modelu adaptivních očekávání

Spočívá v tom, že se na pravé straně vztahu (*3.2)* použije místo X_t hodnota X_{t-1}. Obdrží se vztah

$$(3.6) \qquad X_t^* - X_{t-1}^* = g(X_{t-1} - X_{t-1}^*) \qquad 0 < g \le 1$$

Podnětem pro tuto obměnu je skutečnost, že při specifikaci očekávání v běžném období t zpravidla ještě neznáme přesně X_t , ale pouze předchozí hodnotu X_{t-1}.

Kvantifikace parametrů takto upraveného modelu je spojena se stejnými problémy jako u Koyckova modelu, protože náhodné složky ε_t jsou opět sériově zkorelovány. Aplikovat metodu OLS přímo na takovýto model vede k nekonzistentním a vychýleným odhadům. Jedním z možných způsobů řešení je nasazení metody *instrumentálních proměnných (IV)*. Odhady nemusí být vydatné, ale budou aspoň konzistentní. Jinou možností je použití *nelineární metody nejmenších čtverců (NLLS)*.

Kombinací modelu částečného přizpůsobení a modelu adaptivních očekávání lze dospět k obecnějšímu modelu (geometricky) rozloženého zpoždění.

Modelovou hypotézu propojující regresním vztahem obě nepozorované proměnné Y_t^* a X_t^* zapíšeme jako

$$(3.7) \qquad Y_t^* = c_0 + c_1 X_t^* + \varepsilon_t$$

K vyjádření obou přímo nepozorovatelných proměnných užijeme vztahy

$$(2.2) \qquad Y_t - Y_{t-1} = d(Y_t^* - Y_{t-1}) \qquad 0 < d \le 1$$

z modelu částečného přizpůsobení resp.

$$(3.3) \qquad X_t^* = gX_t + (1-g)X_{t-1}^* \qquad 0 < g \le 1$$

z modelu adaptivních očekávání.

Spojením (*3.7)*, (*2.2)* a (*3.3)* dostaneme kombinovaný model, který již neobsahuje přímo neměřitelné veličiny :

$$(3.8) \qquad Y_t = c_0 dg + c_1 dg X_t + [(1-g)+(1-d)]Y_{t-1} - \\ - [(1-g)(1-d)]Y_{t-2} + [d\varepsilon_t + d(1-g)\varepsilon_{t-1}]$$

neboli jinak zapsaný

$$(3.9) \qquad Y_t = a_0 + a_1 X_t + a_2 Y_{t-1} + a_3 Y_{t-2} + \eta_t$$

Tento ***model je lineární v parametrech*** a_0, a_1, a_2, a_3 ***ale nelineární v původních parametrech*** c_0, c_1, d, g. Regresní rovnice (*3.9)* popisuje závislost Y_t na X_t, Y_{t-1} a Y_{t-2}. Jednoznačně však nelze určit odhady d a g, protože odhadnout lze vždy jen kombinace těchto parametrů (vyskytují se symetricky). **Model není v těchto parametrech (d, g) identifikován.** Odhady parametrů c_0, c_1 oproti tomu nečiní problém. Náhodná složka je generována procesem ***MA(1)***, tedy procesem klouzavých součtů/průměrů 1. řádu.

4) Model racionálních očekávání [Jorgenson D.W. 1966]

Empiricky bylo zjištěno, že „***mechanický přístup*** **" k formulaci budoucích očekávání (na základě hypotézy adaptivních očekávání) vede k předpovědím, které jsou obvykle zatíženy systematickou chybou** (nadhodnocováním nebo podhodnocováním).

Uvedené obtíže do určité míry překonává hypotéza obsažená v **modelu *racionálních očekávání***. Obecný podtext tohoto modelu je spojen s úvahou, že ekonomické subjekty (domácnosti, firmy) tvoří svá individuální očekávání tak, že využívají veškeré jim dostupné, podstatné a účelné informace, v důsledku čehož jejich budoucí chování bude vycházet z obecně platných postulátů ekonomické teorie, disponibilních informací o tvaru modelových vztahů a dat spolehlivé datové základny.

Součástí těchto podstatných informací je též znalost cílů hospodářské politiky vlády. Změny vládní makroekonomické politiky se projeví na změnách individuálních očekávání, a protože existuje zpětná vazba mezi očekáváním ekonomických subjektů a jejich následným chováním, přestává být ekonometrický model adekvátním prostředkem popisu chování reálného ekonomického systému (národní ekonomiky). To má dopad jednak na zhoršení predikční schopnosti modelu, ale i na užitečnost jeho použití při posouzení odezev chování ekonomických subjektů na změny vládní hospodářské politiky. Jinými slovy, **pokud do modelu nezahrnujeme též informaci týkající se změn ekonomické politiky a zamýšlených dopadů do procesu formování subjektivních očekávání, bude to mít za důsledek neracionální chování ekonomických subjektů.**

Pro formální vyložení použijme zjednodušené schéma

(4.1) $$X_t = p_0 + p_1 Z_{t-1} + p_2 Z_{t-2} + w_t$$

X_t je vysvětlovaná endogenní proměnná

X_{t-1} je zpožděná exogenní proměnná

w_t je náhodná složka s obvyklými vlastnostmi

Podstata rozhodování spočívá mj, v tom, že v období $t-1$ ekonomický subjekt odhaduje očekávanou hodnotu X_t*, která se značí $E_{t-1}(X_t)$ na základě vztahu

(4.2) $$E_{t-1}(X_t) = p_0 + p_1 Z_{t-1} + p_2 Z_{t-2} = X_t*$$

takže subjektivní očekávání $E_{t-1}(X_t)$ je skutečně shodné s objektivní předpovědí proměnné X pro běžné období získanou modelu (*4.1)* na základě informací dostupných v předchozího období $t-1$. Vlastnost racionality zde spočívá v tom, že takto formované očekávání či předpovědi není zatíženo systematickou chybou.

Chyba předpovědi je zde dána rozdílem

(4.3) $$X_t - X_t* = w_t$$

Náhodná složka w_t není zkorelována s X_t*. Abychom se vyhnuli vzniku systematických chyb v procesu generování očekávaných hodnot proměnné X, musí mít chyba předpovědi nulovou střední hodnotu a nesmí být korelována se svými předchozími hodnotami. Nesmí navíc existovat ani systematický vztah mezi X_t* a libovolnými proměnnými, jichž se týká disponibilní informace z období $t-1$. Jinými slovy: chyba předpovědi nesmí být predikovatelná.

V ekonometrické analýze se často hypotéza racionálních očekávání užívá jako alternativa k hypotéze adaptivních očekávání. Uvažujeme-li závislost spotřeby C_t na očekávaném/permanentním důchodu $M_t{}^*$ v podobě *3.1)*, můžeme přizpůsobovací proces adaptivních očekávání nahradit vztahem pro racionální očekávání: dosazením $E_{t-1}(M_t)$ za $M_t{}^*$ dostaneme vztah

(4.4) $$C_t = y_0 + \beta_0 E_{t-1}(M_t) + \varepsilon_t$$

Racionální očekávání $E_{t-1}(M_t)$ však není měřitelné, proto postup při odhadu parametrů modelu (*4.2)* spočívá zpravidla ve vylučování proměnných znamenajících očekávání z modelu a v následném odhadu ekvivalentního modelu, který obsahuje jen pozorovatelné veličiny. Taková eliminace je jednoduchá, pokud jde o lineární model obsahující jen očekávání běžných hodnot vysvětlovaných proměnných (ne hodnot budoucích).

Postup, který uplatnil **McCallum [1976]** je dvoustupňový a je obdobou *techniky instrumentálních proměnných* (nejprve se nahradí $E_{t-1}(M_t)$ ve vztahu (*4.1)* metodou OLS přibližnou hodnotu $E_{t-1}{}^*(M_t)$, kterou představuje odhad $M_t{}^*$. V dalším kroku po nahrazení $E_{t-1}{}^*(M_t)$ vyrovnanou hodnotou $M_t{}^*$ se již dospěje pomocí OLS k odhadům obou parametrů y_0, β_0.

Z aplikačních oblastí pro modely racionálních očekávání lze uvést především modely inflačních očekávání, zaměstnanosti, poptávky po penězích apod.

Z posledních prací se testováním této hypotézy zabývají např. **M.C.Lovell [1986], S. Figlewski *a* P. Wachtel [1981], B.M. Friedman[1980], J.E. Pesando [1975].**

Model racionálních očekávání formuloval **D.W.Jorgenson** v obecné podobě

(4.5) $$a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \ldots + a_r Y_{t-r} =$$
$$= b_0 X_t + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \ldots + b_s X_{t-s} + \varepsilon_t$$

Opět se zde střetáváme s problémem odhadu parametrů. I když budou náhodné složky ε_t rozděleny nezávisle, náhodné složky v_t, kde

(4.6) $$v_t = \varepsilon_t - a_1 \varepsilon_{t-1}$$

budou sériově zkorelovány, což má opět nepříznivý dopad na vlastnosti výsledných odhadů parametrů (srovnatelně s Koyckovým modelem). Vztah *4.6)* pro náhodné složky představuje autoregresní schéma 1. řádu.

Poznámka Model přechází při omezení hloubky zpoždění na $r = 1$, $s = 0$ v Koyckův model (pokud v něm vynecháme úrovňovou konstantu).