Cviceni k predmetu PMMAT2
Cviceni 3 - Diferencial, Taylorova veta a extremy

Osnova: parcialni derivace, totalni diferencial a Taylorova veta, hledani extremu funkci vice promennych

Parcialni derivace a diferencial
Existence diferencialu (oznaceni $df(x_0, y_0)$) u funkci vice promennych v podstate opet, jako u funkci jedne promenne, znamena moznost aproximovat funkci v nejakem bode linearni funkci (vicerozmernou, v pripade funkci dvou promennych rovinou). Z hlediska geometrickeho se vlastne ptame na existenci tecne roviny k dane funkci v urcitem bode. Plati nasledujici veta: Pokud muzeme aproximovat funkci v bode tecnou rovinou (tedy existuje totalni diferencial), pak existuji i parcialni derivace a plati:

$$\mathrm{df}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Vsimnete si, ze k vypoctu tecne roviny potrebujeme "pouze" parcialni derivace (ty umime vetsinou velmi snadno spocitat). Potiz je v tom, ze veta neplati obracene, tedy ze pouha existence parcialnich derivaci garantuje existenci diferencialu. Viz obr.

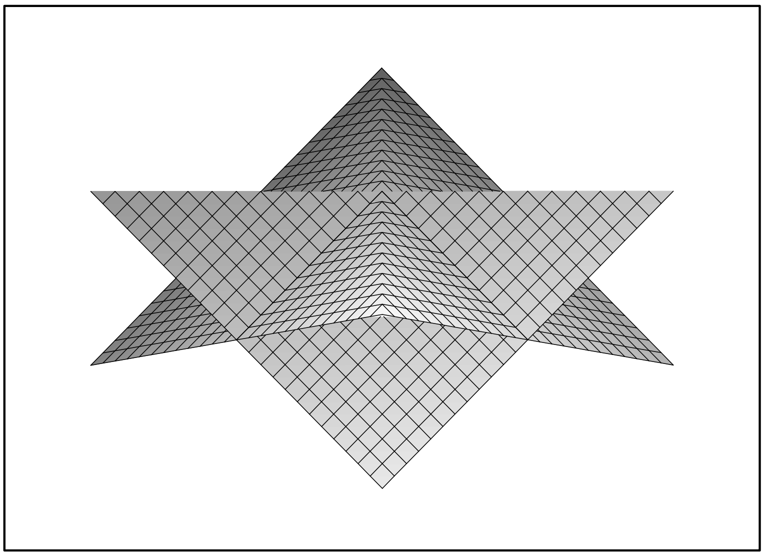

Figure 1: U funkce $g(x, y) = |x + y|$ a $h(x, y) = |-x + y|$ sice parc. derivace existuji, diferecial nikoliv

Plati tedy, ze pokud funkce f ma v bode (x_0, y_0) obe parcialni derivace **spojite**, pak v tomto bode lze zkonstruovat k funkci f tecnou rovinu, tedy existuje totalni diferencial, ktery spocitame podle vise zmineho vzorce.

Vsechno se da opet zobecnit, tedy:
Zapamtujte si nasledujici tvrzeni: Necht funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma v bode $[x_0, y_0]$ a nejakem jeho okoli spojite parcialni derivace az do radu $n + 1$ vcetne. Pak pro kazdy bod $[x, y]$ z tohoto

okoli

$$f(x,y) = T_n(f)(x,y) + R_n(f)(x,y), \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} T_n(f)(x,y) = f(x_0,y_0)+ \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+ \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) + \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0,y_0)(x-x_0)^{n-j}(y-y_0)^j, \end{aligned} \tag{1}$$

$$R_n(f)(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(\theta,\vartheta)(x-x_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j, \tag{2}$$

$$\text{kde } \theta \in (x_0,x), \vartheta \in (y_0,y).$$

Cast (1) se nazyva Tayloruv polynom stupne n k funkci f (oznacime $T_n(f)$), cast (2) se nazyva zbytek po Taylorove polynomu radu n k funkci f (oznacime $R_n(f)$).

Poznamka: Vsimnete si, ze neni treba zavadet pojem diferencialu, diferencial je vlastne Tayloruv polynom radu 1, nemuzeme vsak jako v diferecialnim poctu funkci jedne promenne pojem diferencialu (totalniho) a parcialnich derivaci ztotoznit. Existence parcialnich derivaci jeste nezarucuje existenci totalniho (silneho diferencialu), tu zaruci az jejich spojitost v prislusnem bode (prozkoumejte prislusne obrazky a udelejte si take parcialni derivace funkci na obrazcich).

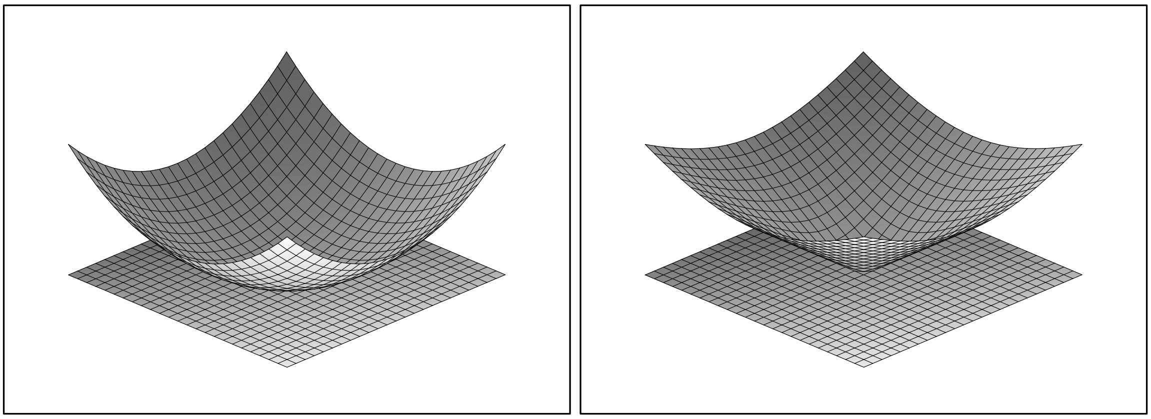

Figure 2: Funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)$,$h(x,y) = \sqrt(x^2+y^2)$

Priklad 1. Spoctete $e^{0.1}\sin(0.2)$ priblizne uzitim totalniho diferencialu.
$e^{0.1}\sin(0.2) \doteq e^0\sin(0) + e^0\sin(0)\cdot 0.1 + e^0\cos(0)\cdot 0.2 = 0.2$

$e^{0.1}\sin(0.2) = 0.2195635667$

Priklad 2. Spoctete $e^{0.1}\sin(0.2)$ priblizne uzitim Taylorovy vety pro $k = 2$.
$e^{0.1}\sin(0.2) \doteq e^0\sin(0) + e^0\sin(0)\cdot 0.1 + e^0\cos(0)\cdot 0.2 + \frac{1}{2}(e^0\sin(0)\cdot 0.1^2 + 2\cdot e^0\cos(0)\cdot 0.1\cdot 0.2 - e^0\sin(0)\cdot 0.2^2) = 0.22$
$e^{0.1}\sin(0.2) = 0.2195635667$ (Opet je aproximace Taylorovym polynomem radu 2 presnejsi nez prostrednictvim diferencialu).

Priklady (mozne v pisemce - dva priklady jsou spocitane, v podstate se jedna jen o dosazovani do vzorcu, tudiz nepovazuji za dulezite podrobne vypisovat reseni zbyvajicich prikladu, doma si je ale spoctete).
Spoctete priblizne (prostrednictvim totalniho diferencialu i Taylorovy vety)
a) $1.002\cdot 2.003^2\cdot 3.004^2$ [36.27684227, 36.276, 36.27676900]

Obecne muzeme funkci zapsat jako $f(x, y, z) = x\cdot y^2\cdot z^2$, dale body $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 3, f(x_0, y_0, z_0) = x_0\cdot y_0^2\cdot z_0^2 = 36$, tudiz diference $x - x_0 = 0.002, y - y_0 = 0.003, z - z_0 = 0.004$. Zbyva vyjadrit parcialni derivace v prislusnych bodech, a protoze se jedna o funkci tri promennych je nutne dosadit do vzorce v Napovede. Pocitejme tedy:$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\cdot z^2$, tedy v bode (x_0, y_0, z_0) je hodnota derivace $y_0^2\cdot z_0^2 = 36$, dale $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot 2\cdot y\cdot z^2$, tedy v bode (x_0, y_0, z_0) je hodnota derivace $x_0\cdot 2\cdot y_0\cdot z_0^2 = 36$, konecne $\frac{\partial f}{\partial z} = x\cdot 2\cdot z\cdot y^2$, tedy v bode (x_0, y_0, z_0) je hodnota derivace $x_0\cdot 2\cdot z_0\cdot y_0^2 = 24$. Nyni staci dosadit do vzorce v Napovede a dostavame: $1.002\cdot 2.003^2\cdot 3.004^2 \doteq 36 + 36\cdot 0.002 + 36\cdot 0.003 + 24\cdot 0.004 = 36.276$. Spocetete si jeste aproximaci Taylorovym polynomem stupne 2, derivace si muzete overit v MAPLE, zapis je diff$(x\cdot y^2\cdot z^2, x, y)$;, coz by odpovidalo druhe parcialni derivaci podle x a y.

b)$\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$ $[2.950691614, 0.9833333333 * 3, 0.9835611113 * 3]$
c) $\sin 29^o \tan 46^o$ [0.5020350584, 0.4933798555, 0.5028720794]
d) $0.97^{1.05}$ [0.9685238528, 0.97, 0.9685000000]

Obecne muzeme funkci zapsat jako $f(x, y) = x^y$, dale body $x_0 = 1, y_0 = 1, f(x_0, y_0) = x_0^{y_0} = 1$, tudiz diference $x - x_0 = -0.03, y - y_0 = 0.05$. Zbyva vyjadrit parcialni derivace v prislusnych bodech. Pocitejme tedy:$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cdot x^{y-1}$, tedy v bode (x_0, y_0) je hodnota derivace $1\cdot 1^0 = 1$, dale $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y\log(x)$, tedy v bode (x_0, y_0) je hodnota derivace $1^1\log(1) = 0$. Nyni staci dosadit do vzorce pro Tayloruv polynom funkce dvou promennych (viz vyse) a dostavame:
$0.97^{1.05} \doteq 1 - 1\cdot 0.03 + 0\cdot 0.05 = 0.97$.

e)$\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98\sqrt[4]{1.05^3}}}$ [1.055119783, 1.054166667, 1.055229514]

Napoveda:

1. u funkci 3 promennych (priklad a) a e)) plati

$$\begin{aligned}f(x,y,z) \doteq\ & f(x_0,y_0,z_0)+\\ & +\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)\\ & +\frac{1}{2!}(\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)^2+\\ & +2\frac{\partial f^2}{\partial x\partial y}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(y-y_0)+2\frac{\partial f^2}{\partial x\partial z}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(z-z_0)+\\ & 2\frac{\partial f^2}{\partial y\partial z}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)(z-z_0))\end{aligned} \tag{3}$$

Poznamka:Vysledky jsou v hranatych zavorkach, a to tak, ze prvni hodnota je presna hodnota, druha je aproximace diferencialem, treti je aproximace Taylorovym polynomem.

Extremy funkci vice promennych
Podobne jako v dif. poctu funkci jedne promenne vyuzivame k zjistovani extremu funkce derivace (zde parcialni). Podobne take plati, ze extrem nastava ve stacionarnim bode (tedy tam, kde obe parcialni derivace jsou rovny 0). Dukaz se pote provede na zaklade Taylorova polynomu radu 2 (vsimnete si, ze potrebujem spojitost parcialnich derivaci az do radu 2). Pak totiz plati:

$$\begin{aligned}& f(x,y)=f(x_0,y_0)+0(x-x_0)+0(y-y_0)+\\ & +\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(\theta,\vartheta)(x-x_0)^2+2\frac{\partial f^2}{\partial x\partial y}(\theta,\vartheta)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\theta,\vartheta)(y-y_0)^2\right),\\ & \text{kde } \theta\in(x_0,x), \vartheta\in(y_0,y).\end{aligned} \tag{4}$$

Cast (3) je vlastne zbytek po Taylorove polynomu, ktery bude vzdy kladny (nastane minimum) nebo vzdy zaporny (nastane maximum) za situace, kdy ve stacionarnich bodech plati

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0. \tag{5}$$

Minimum nastane, pokud je $f_{xx} > 0$, maximum pro $f_{xx} < 0$. Pokud je tento determinant zaporny (zbytek strida znamenko), extrem nenastava, pokud je 0 (zbytek je 0), nelze timto rozhodnout, a musi se prejit k Taylorovu polynomu vyssiho radu (pokud existuje).

Domaci ukol 3
Dokazte, ze funkce $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ ma lokalni extrem v bode $[1,1]$.

Potrebujeme najit body podezrele z extremu, tudiz ty, kde jsou parcialni derivace rovny nule. Pro funkci dvou promennych dostaneme dve rovnice o dvou neznamych v podobe $\frac{\partial f}{\partial x}=3\cdot x^2-3\cdot y=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=3\cdot y^2-3\cdot x=0$. Dosazenim druhe rovnice do prvni a po vykraceni 3, dostaneme rovnici $y\cdot(y^3-1)=0$. Odtud je $y=0, y=1$, coz odpovida $x=0, x=1$.

Mame dva body podezrele z extremu $[0,0],[1,1]$. Spocteme Hesian $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \cdot x & -3 \\ -3 & 6 \cdot y \end{vmatrix}$
Po dosazeni bodu $[0,0]$ je determinant roven -9, extrem v tomto bode tudiz nenastava, bodu $[1,1]$ je determinant 25, zde tudiz nastava extrem, a to minimum, protoze $f_{xx} = 6$, coz je kladne cislo.

Domaci ukol 4
Naleznete lokalni extremy funkce $f(x,y) = x \cdot y \log(x^2 + y^2)$.
Nejdrive podminky. V logaritmu nesmi byt zaporne cislo a nula, tudiz $x \neq 0 \wedge y \neq 0$. Potrebujeme najit body podezrele z extremu, tudiz ty, kde jsou parcialni derivace rovny nule. Pro funkci dvou promennych dostaneme dve rovnice o dvou neznamych v podobe $\frac{\partial f}{\partial x} = y\log(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \frac{y((x^2+y^2)(\log(x^2+y^2))+2x^2)}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow y((x^2+y^2)(\log(x^2+y^2))+2x^2) = 0 \Rightarrow (x^2+y^2)(\log(x^2+y^2))+2x^2 = 0$, vzhledem k podmince. Dale $\frac{\partial f}{\partial y} = x\log(x^2+y^2)+\frac{2xy^2}{x^2+y^2} = \frac{x((x^2+y^2)(\log(x^2+y^2))+2y^2)}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow x((x2+y^2)(\log(x^2+y^2))+2y^2) = 0 \Rightarrow (x^2+y^2)(\log(x^2+y^2))+2y^2 = 0$, vzhledem k podmince. Z obou rovnic dostavame, ze $x^2 = y^2$, tedy $\pm x = \pm y$. Dosadime - li tento vztah treba do prvni rovnice, vidime, ze $(x^2+x^2)(\log(x^2+x^2))+2x^2 = 0 \Rightarrow \log(2x^2) = -1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$, tedy $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$. Dostavame tak 4 body podezrele z extremu $[\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}]$,$[-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}]$. Konstruujme matici druhych parcialnich derivaci. Plati: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{6xy(x^2+y^2)-4x^3y}{(x^2+y^2)^2}$,$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2+y^2)^2\log(x^2+y^2)+2(x^2+y^2)^2-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{6xy(x^2+y^2)-4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$. Pro $[\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ je determinant $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, $[-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ je determinant $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, $[-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ je determinant $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$, $[\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ je determinant $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$. Snadno si jiz kazdy odvodi, kde nastavaji minima, kde maxima. Pro jistotu uvadim jeste nazorny obrazek:

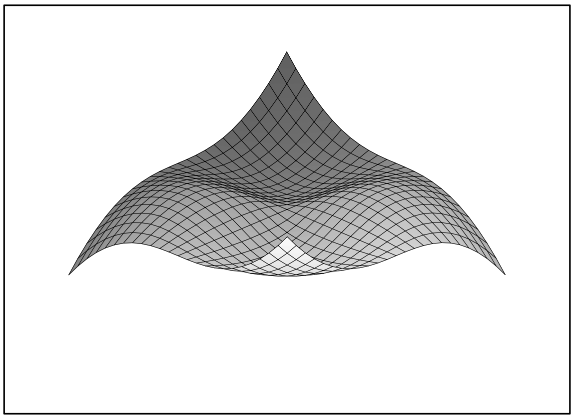

Figure 3: Funkce $f(x,y) = x \cdot y \log(x^2 + y^2)$

Domaci ukol 4
Naleznete lokalni extremy funkce $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.
Pozor na tento priklad. Funkce je definovana pro vsechna $[x,y] \in \mathbb{R}$, ale v bode $[0,0]$, kde se prave nachazi extrem, nejsou parcialni derivace definovany (nemohou byt tudiz ani spojite),

tedy aparat urcovani extremu (ktery je odvozen od Taylorova rozvoje) nelze vubec pouzit.

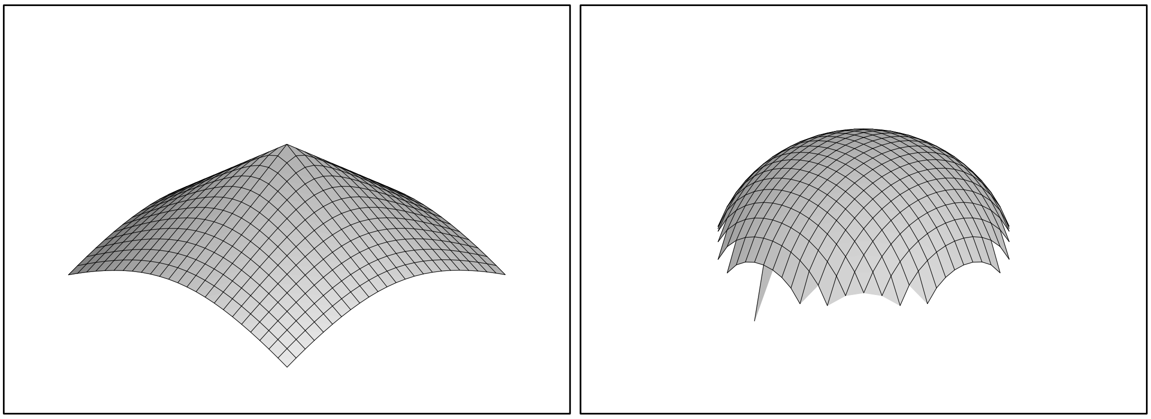

Figure 4: Funkce $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ a $f(x,y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$

Pokud pocitame extrem funkce vice jak dvou promennych, postupujeme stejne az po sestaveni matice druhych derivaci. Dalsi analyza se pote lisi, tedy:

Naleznete lokalni extremy funkce $u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - x + z - 2$. Body podezrele z extremu jsou dany rovnicemi $u_x = 4x - 1 = 0, u_y = 2y = 0, u_z = 6z + 1 = 0$, tedy bod $[\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{6}]$. Matice druhych derivaci vypada nasledovne: $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Nyni budeme posuzovat tyto 3 subdeterminanty:

$$\begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} > 0, \tag{6}$$

a protoze jsou vsechny subdeterminanty, po dosazeni prislusneho bodu (v tomto pripade to nebylo nutne), kladne, je v danem bode minimum. Pokud by subdeterminanty stridaly znamenka, pocinaje minusem, je v danem bode maximum.

Naleznete lokalni extremy funkce $u = -x^2 - y^2 - 3z^2 + x + 2y - 1$. Body podezrele z extremu jsou dany rovnicemi $u_x = -2x + 1 = 0, u_y = -2y + 2 = 0, u_z = -6z = 0$, tedy bod $[\frac{1}{2}, 1, 0]$. Matice druhych derivaci vypada nasledovne: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$. Nyni budeme posuzovat tyto 3 subdeterminanty:

$$\begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix} < 0, \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} < 0, \tag{7}$$

a protoze subdeterminanty, po dosazeni prislusneho bodu (v tomto pripade to nebylo nutne), stridaji znamenka a prvni je minus, je v danem bode maximum.

Globalni extremy:
Pro hledani globalnich extremu je postup totozny s postupem hledani lokalnich extremu, navic je treba ale prozkoumat hranici mnoziny, na ktere globalni extremy hledame.

Priklad:Urcete globalni extremy funkci $f(x,y) = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4x}{\sqrt{2x-x^2-4y^2}} = 0$, tedy bod podezrely z extremu $[1,0]$. Sestavime determinant a dosadime, pak $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$, tedy v bode $[1,0]$ je maximum. Vysetrime jeste hranici. Protoze pod odmocnonou muze byt pouze kladne cilo, musi platit, ze $2x-x^2-4y^2 \geq 0$, hranici tudiz tvori funkce $2x - x^2 - 4y^2 = 0$, coz je elipsa. Hodnota ve vsech bodech teto elipsy je nula, coz je nejmensi cislo, ktere muze funkce $f(x,y)$ na svem definicnim oboru dosahnout, ve vsech hranicnich bodech tudiz nastane minimum. Obrazek viz vise.

Priklad: Naleznete absolutni extremy funkce $z = x^2 - y^2$ v kruhu $x^2 + y^2 \leq 4$.

Funkci z dobre zname, je to funkce ze cv2.pdf obrazek 1. Ta zadny extrem nema, pouze sedlovy (inflexni) bod (overte si to beznym postupem jako v prikladech vyse). Zbyva vysetrit body na hranici, tedy na kruznici $x^2 + y^2 = 4$ (polomer $r = 2$, stred $[0,0]$). Postup je nasledujici. Kruznici si musime vyjadrit parametricky, tedy $x = r^2\cos(t), y = r^2\sin(t)$, a tyto rovnice dosadime do vlastni funkce z, tedy $z = r^2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 4(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 4(1 - 2\sin^2(t))$. Tuto funkci minimalizujeme jako funkci jedne promenne. Derivace $z' = -16\sin(t)\cos(t) = 0$. Body podezrele z extemu jsou tedy $t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}, t_3 = \pi, t_4 = \frac{3\pi}{2}$. Overte si druhymi derivacemi, ze je to po rade maximum, minimum, maximum a minimum.