Cviceni k predmetu PMMAT2
Cviceni 9 - Posloupnosti a rady

Zakladni pojmy:
Posloupnost, limita posloupnosti, konvergence a divergence posloupnosti, nekonecne rady, castecne soucty, konvergence a divergence rady, rady s nezapornymi cleny, kriteria (srovnavaci, odmocninove, podilove), absolutni konvergence, alternujici rady, posloupnosti a rady funkci

Posloupnosti chapeme jako nam zname funkce ovsem definovane na mnozine prirozenych cisel. Tim se velmi prirozene zavadi pojem konvergence a divergence posloupnosti. Napr. je pro zjistovani limity posloupnosti mozno pouzit nastroju pro zjistovani limit prislusnych funkci viz. nasledujici cviceni z ucebnice.

Cviceni 3.1.2. Urcete limity posloupnosti:
c)$\{\frac{n}{2^n}\}$. Namisto n si klidne muzeme predstavit x a uzit L'hospitalovo pravidlo. Tedy $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x} = |\text{L'h prav.}| = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x\ln(2)} = 0$.

Nekonecne rady jsou vlastne nekonecne soucty jednotlivych prvku posloupnosti, rikame, ze rada konverguje, jestlize konverguje posloupnost jejich castecnych souctu.

Drive nez pristoupime ke kriteriim konvergence je treba vyslovit tzv. nutnou podminku konvergence, tedy:

Jestlize rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak musi platit, ze $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pro urcovani konvergence rad s nezapornymi cleny, uzivame tzv. kriteria konvergence (srovnavaci, odmocninove, podilove atd.). Srovnavaci kriterium lze vyslovit nasledovne. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou rady s nezapornymi cleny. Necht plati $a_n \leq b_n$ pro vsechna n. Potom plati: Je - li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni, je i rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentni. Je - li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentni, je i rada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Toto kriterium je velice prakticke, zvlaste pokud si uvedomime, ze rada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje zatimco rady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konverguji. Viz. cviceni.

Cviceni 3.2.1. Zjistete, zda konverguji rady:
b)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$, staci si uvedomit, ze plati: $\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{1}{n^2}$ pro vsechna n, takze rada konverguje.
c)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, staci si uvedomit, ze plati: $\frac{1}{(2n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ pro vsechna n, takze rada konverguje.
e)$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{5}{2})^n$, staci si uvedomit, ze plati: $\frac{1}{n} \leq (\frac{5}{2})^n$ pro vsechna n, takze rada diverguje.
g)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, staci si uvedomit, ze plati: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ pro vsechna n, takze rada konverguje.

Podilove kriterium: Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rada s nezapornymi cleny. Je-li $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ je rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentni, je - li $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$,je rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentni.

Cviceni 3.2.1. Zjistete, zda konverguji rady:
h)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, staci si uvedomit, ze plati: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{(n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1} = 0$ pro vsechna $x \in \mathbb{R}$,

takze rada konverguje.

j)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!2^n}$, staci si uvedomit, ze plati: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!2^{n+1}}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2((n)!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!2^{n+1}}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)2} = \frac{1}{8} < 1$, takze rada konverguje.

Odmocninove kriterium: Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rada s nezapornymi cleny. Je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ je rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentni, je - li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$,je rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentni.

Integralni kriterium: Necht f je funkce definovana na interavalu $\langle 1, \infty)$, ktera je na tomto intervalu nezaporna a nerostouci. Necht $f(n) = a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje prave tehdy, kdyz konverguje nevlastni integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Priklad:$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+c}$, kde c je realna konstanta, diverguje podle integralniho kriteria, protoze $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+c}dx = \ln(\infty + c) - \ln(c+1) = \infty$.

Priklad: $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n-1})^n = |$ staci vzit n tou odmocninu a spocitat limitu , tedy $| =$
$= \lim_{n\to\infty}((\frac{n}{2n-1})^n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, takze podle odmocninoveho kriteria rada konverguje.

Pro alternujici rady plati jednoduche pravidlo. Alternujici rada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ nerostouci posloupnosti nezapornych cisel konverguje prave tehdy, kdyz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Overujeme tudiz jen tuto jednoduchou podminku viz. nasledujici cviceni.

Cviceni 3.2.1. Zjistete, zda konverguji rady:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+\frac{1}{2}}$. Staci overit, ze $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = 0$, coz skutecne plati.
Podobne d) dale pak take cviceni 3.2.2. a)-d) pri urcovani konvergence. Pri urcovani absolutni konvergence postupujeme jinak. Viz dale.

Absolutni konvergence se posuzuje u tech rad, jejichz cleny nesplnuji podminku nezapornosti, tedy tyto cleny mohou byt i zaporne. Plati nasledujici veta. Konverguje - li rada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak konverguje i rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud tedy rada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, rekneme, ze rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutne konvergentni. Konverguje - li rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a rada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, rekneme, ze rada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutne.

Cviceni 3.2.2. Rozhodnete o konvergenci, resp. absolutni konvergenci rad:
a)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n-\frac{1}{2}}$, protoze se jedna o alternujici radu, staci overit, jestli $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} = 0$, coz skutecne plati. Zbyva overit, jestli je rada i absolutne konvergenti tedy, jestli konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}}$, to ale neplati, protoze $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-\frac{1}{2}}$ pro vsechna n, takze rada konverguje ale neabsolutne.
b)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$, kde protoze plati $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$ pro vsechna $n \geq 4$, tak rada konverguje absolutne.
c)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{2n}$, kde protoze se jedna o alternujici radu a plati $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$, tak rada diverguje, tudiz nemuze ani konvergovat absolutne.
d)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n^2}$, kde protoze se jedna o alternujici radu a plati $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$, tak rada konverguje. Zbyva overit, jestli je rada i absolutne konvergenti tedy, jestli konverguje i

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$, to ale neplati, protoze $\frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} < \frac{n+1}{n^2}$ pro vsechna n, takze rada konverguje ale neabsolutne.
e)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$, kde protoze se jedna o alternujici radu a plati $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$, tak rada konverguje. Zbyva overit, jestli je rada i absolutne konvergenti tedy, jestli konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$, to ale neplati, protoze $\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{n}{n^2+n} < \frac{n+1}{n^2}$ pro vsechna n, takze rada konverguje ale neabsolutne.
f)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{(3n)!}$, nejefektivnejsi u techto typu prikladu je nejdrive overit, jestli je rada absolutne konvergenti tedy, jestli konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5)^n}{(3n)!}$. Podle podiloveho kriteria snadno zjistite, ze rada je konvergentni, tedy rada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{(3n)!}$ je absolutne konvergentni a tudiz musi konvergovat i 'obycejne' podle vyse zminene vety.
g)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(-2)^n n!}$ podobne jako f)
h)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ podobne jako f). Pro zjisteni absolutni konvergence pouzijte srovnavaci kriterium, tedy $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} > \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ pro vsechna n, tudiz absolutni konvergence je dokazana, a tim i obycejna.
i)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$ podobne jako f). Pro zjisteni absolutni konvergence pouzijte srovnavaci kriterium, tedy $\frac{1}{n^2} > \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$ pro vsechna n diky vlastnostem funkce sinus, tudiz absolutni konvergence je dokazana, a tim i obycejna.
j)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+n}{n^2+1}$, vsimnete si, ze neni splnena nutna podminka konvergence, tedy ze $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{n^2+n}{n^2+1} \neq 0$. Podle vety o nutne podmince konvergence, tudiz rada nemuze konvergovat. Uvedomte si, ze z vyrokove logiky plyne $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$. Jedna se o tzv. neprimy dukaz.

Priklad:
a)Overte nutnou podminku konvergence rady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.
b)Rozhodnete o konvergenci rady.
Protoze dukaz limity $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$ je pomerne narocny, je lepsi zacit casti b) a podle podiloveho kriteria dokazat konvergenci rady. Z vety o nutne podmince konvergence potom primo plyne, ze $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Priklad:
V zavislosti na x vysetrete konvergenci rady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{4(n-x)}$.
Je dobre si nejdrive dosadit za x 'zajimave' body jako je 0 a 1. Pro $x = 0$ dostavame $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n0}{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$, takze rada konverguje.Pro $x = 1$ dostavame $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4(n-1)}$, kde ale neni splnena nutna podminka konvergence, protoze $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4(n-1)} = \frac{1}{4}$, takze rada diverguje. Podobne pro vsechna $x \neq 0$.

Poznamka: Opet je mozne vyuzivat MAPLE pro konktrolu vysledku napr. zadame 'evalf(Sum(1/(n*(n-1)),n=2..infinity));' a zjistime primo, ze soucet je 1.