Příklad 15B Dvoustavový řetězec [Budíková]

Máme $\{X_n; n \in N\}$ homogenní Markovův řetězec s množinou stavů $J = \{0,1\}$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ P_{k,k+1} = & \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \end{array}.$$

Vektor počátečních pravděpodobností je $p(0) = (\gamma, 1-\gamma)$

Najděte pro k=2 pravděpodobnostní rozdělení tohoto MŘ.

Řešení :

Hledáme simultánní prstní funkci náhodného vektoru $(X_0 \quad X_1 \quad X_2)$:

$$\pi(x_0, x_1, x_2) = P(X_0 = x_0 \cap \quad X_1 = x_1 \cap \quad X_2 = x_2)$$

$$\pi(0,0,0) = P(X_0 = 0).P(X_1 = 0|X_0 = 0).P(X_2 = 0|X_1 = 0, X_0 = 0) = \gamma.(1-\alpha)(1-\alpha)$$

$$\pi(0,1,1) = P(X_0 = 0).P(X_1 = 1|X_0 = 0).P(X_2 = 1|X_1 = 1, X_0 = 0) = \gamma.\alpha(1-\beta)$$

$$\pi(1,1,0) = P(X_0 = 1).P(X_1 = 1|X_0 = 1).P(X_2 = 0|X_1 = 1, X_0 = 1) = (1-\gamma).(1-\beta)\beta$$

Mělo by vyjít:

$[0 \quad 0 \quad 0]$	$\pi[0 \quad 0 \quad 0] = \gamma(1-\alpha)^2$
$[0 \quad 0 \quad 1]$	$\pi[0 \quad 0 \quad 1] = \gamma.(1-\alpha).\beta$
$[0 \quad 1 \quad 0]$	$\pi[0 \quad 1 \quad 0] = \gamma.\alpha.\beta$
$[0 \quad 1 \quad 1]$	$\pi[0 \quad 1 \quad 1] = \gamma\beta(1-\beta)$
$[1 \quad 0 \quad 0]$	$\pi[1 \quad 0 \quad 0] = (1-\gamma)(1-\alpha).\alpha$
$[1 \quad 1 \quad 0]$	$\pi[1 \quad 1 \quad 0] = (1-\gamma)(1-\beta)\alpha$
$[1 \quad 0 \quad 1]$	$\pi[0 \quad 0 \quad 0] = (1-\gamma)\alpha\beta$
$[1 \quad 1 \quad 1]$	$\pi[1 \quad 1 \quad 1] = (1-\gamma)(1-\beta)^2$.

Spočtěte dále $P(x_1 \neq x_2)$.

Tato prst se rovná $P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$

$$P(X_1 = 0).P(X_2 = 1|X_1 = 0) + P(X_1 = 1).P(X_2 = 0|X_1 = 1)$$

$$P_0(1)' = p_0(0).\alpha + p_1(0)\beta = \gamma\alpha + (1-\gamma)\beta$$