

### Příklad 9 Pracovní trh (neověřováno DM)

[VK př. 2.3, str.22]

Při analýze situace na pracovním trhu byly rozlišeny tři základní situace: pracovník

- a) pracuje ve své profesi
- b) pracuje v jiné profesi (ne ve vlastní)
- a) napracuje (je tedy nezaměstnaný)

Při statistickém sledování souboru pracovníků se ukázalo, že během jednotlivých měsíců došlo ke změnám mezi jednotlivými stavy následovně:

Ve své profesi pracovalo i v následujícím měsíci 80% pracovníků, 10% jich přešlo k jiným povoláním a 10% se stalo nezaměstnanými. Z pracovníků pracujících mimo vlastní profesi pak 10% přešlo v následujícím měsíci ke své profesi a 20% pracovníků přišlo v následujícím měsíci o práci. Z nezaměstnaných našlo práci ve své profesi 5% osob, 30% nezaměstnaných získalo práci mimo svou profesi a 65% osob zůstalo i v dalším měsíci nezaměstnanými.

Ze vstupních údajů úlohy plyne, že matice pravděpodobnosti přechodu má tvar

$$\begin{array}{c} \text{Stavy} \\ \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & P = & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,05 & 0,3 & 0,65 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

(Vzhledem k tomu, že řetězec je evidentně nerozložitelný – a ergodický), je možné stanovit **limitní matici A**, **fundamentální matici Z** a **matici středních dob prvního přechodu M**.

Ze zadání úlohy je zřejmé, že jde o MPP regulárního řetězce. Limitní vektor stanovíme řešením soustavy rovnic  $a \cdot P = a$ , kde

$$a = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \text{ s respektováním podmínky } a_1 + a_2 + a_3 = 1.$$

Pro stanovení limitního vektoru  $a$  dostaneme po dosazení prvků matice  $P$  soustavu 4 rovnic:

$$(r1) \quad 0,8a_1 + 0,1a_2 + 0,05a_3 = a_1$$

$$(r2) \quad 0,1a_1 + 0,7a_2 + 0,3a_3 = a_2$$

$$(r3) \quad 0,1a_1 + 0,2a_2 + 0,65a_3 = a_3$$

$$(r0) \quad a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Jednu z prvních tří rovnic (r1), (r2), (r3) nahradíme podmínkou (r0) a řešíme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých. Získáme limitní vektor

$$a = (0,28125 \quad 0,40625 \quad 0,3125)$$

Limitní matice  $A$  má všechny řádky stejné (představované limitním vektorem)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & A = & \begin{pmatrix} 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \end{pmatrix} \end{array}$$

K výpočtu fundamentální matice  $Z$  regulárního řetězce uijeme vztah

$$Z = [I - (P - A)]^{-1}$$

$$Z = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,05 & 0,3 & 0,65 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \end{pmatrix} \right) \right]^{-1}$$

$$Z = [I - (P - A)]^{-1} = \begin{pmatrix} 2,8496 & -1,1270 & -0,7227 \\ -0,5879 & 1,6855 & -0,09766 \\ -0,9004 & 0,1230 & 1,7773 \end{pmatrix}$$

Ze získaného výsledku je vidět, že všechny prvky matice  $Z$  nemusí být kladné. Matice  $Z$  totiž vyjadřuje jistým způsobem odchylky od limitní matice  $A$ .

Matici  $M$  středních dob prvního přechodu do stavů dostaneme užitím vztahu

$$M = [I - Z + E\hat{Z}] \bar{M}, \text{ kde}$$

$I$  je jednotková matice  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   $E$  matice ze samých jedniček  $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\hat{Z}$  je diagonální matice složená z diagonálních prvků matice  $Z$

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 2,8496 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6855 & 0 \\ 0 & 0 & 1,7773 \end{pmatrix}$$

a  $\hat{M}$  je diagonální matice, na jejíž diagonále jsou střední doby návratu  $\mu_{jj}$ , které se vypočtou jako  $\mu_{jj} = 1/a_{jj}$  z limitního vektoru, tedy

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1/0,28125 & 0 & 0 \\ 0 & 1/0,40625 & 0 \\ 0 & 0 & 1/0,3125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5556 & 0 & 0 \\ 0 & 2,4615 & 0 \\ 0 & 0 & 3,20 \end{pmatrix}$$

Dosazením všech matic (tj.  $I, E, \hat{Z}, \hat{M}$ ) do vztahu  $M = [I - Z + E\hat{Z}] \bar{M}$ , dostaneme

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 3,5556 & 6,9229 & 7,9999 \\ 12,222 & 2,4615 & 5,999 \\ 13,333 & 3,846 & 3,19995 \end{pmatrix}$$

**Interpretace výsledku:**

prvek  $a_{13}$ : pracovník, který pracuje ve své profesi v průměru za 8 (7,9999) měsíců přijde o práci.

prvek  $a_{22}$ : pracovník aktuálně zaměstnaný mimo svou profesi, tam setrvá v průměru 2,46 měsíce

prvek  $a_{31}$ : nyní nezaměstnaný pracovník nalezne v průměru za 13,3 měsíce práci ve své profesi.