1.13 Regulární Markovovy řetězce

Definice 15 Matici pravděpodobností přechodu nazveme regulární, je-li P^n pro určité konečné n bez nulových prvků. Zároveň platí, že matice P je regulární, jestliže není rozložitelná na tvary (A), (B),(C).

Lze dokázat, že matice P konverguje při $n \to \infty$ k limitní matici typu

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_M \\ a_0 & a_1 & \dots & a_M \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_M \end{bmatrix},$$

jejíž řádky tvoří shodné řádkové vektory $a = (a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_M)$, které nazýváme *limitní stacionární vektory*

Věta 9 Pro regulární matici P platí tyto základní vlastnosti:

T1. Je-li P regulární, A je limitní matice a a je limitní vektor, pak s rostoucím n se $p.P^n$ blíží k a, ať je výchozí vektor p jakýkoliv: $\lim_{n\to\infty} p.P^n = a$.

T2. vektor a jediný, pro který platí $a.P = a$; je tedy určen jednoznačně.

T3. Platí, že $P.A = A.P = A$.

Limitní vektor a je možné určit následujícím způsobem:

Předpokládáme-li, že se *v případě regulárních řetězců* mohou všechny stavy v budoucnosti stále vyskytovat, tj. platí $0 < p_{ij} < 1$, existuje limitní rozdělení absolutních pravděpodobností vektoru $p(n)$. Potom platí

(1.34) $$\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} p(n-1) = a \text{ , kde}$$

vektor $a = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_M)$ je limitní stacionární vektor. Složky vektoru a lze interpretovat, jako podíly (z celku 1) z celkové doby, kterou systém stráví ve stavech $1,2,\dots,M$ v průběhu dost dlouhého časového období.

Protože platí

(1.35A) $$p(n) = p(n-1).P ,$$

můžeme po limitním přechodu tento vztah psát ve tvaru

(1.35B) $$a = a.P .$$

Rovnice této soustavy o M neznámých $a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_M$ *jsou lineárně závislé* a proto nelze bez dalšího nalézt jediné řešení. Nalézt jednoznačné řešení nicméně umožňuje zavedení další přirozené podmínky, která plyne z toho, že stacionární pravděpodobnosti stavů tvoří úplnou soustavu jevů, tj. podmínky $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Výpočty stacionárních pravděpodobností $a_1 \quad a_2 \quad .... \quad a_M$ získáme tedy řešením soustavy rovnic

$$(a_0 \quad a_1 \quad ... \quad a_M) = (a_0 \quad a_1 \quad ... \quad a_M).\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & ... & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & ... & p_{1M} \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{M0} & p_{M1} & ... & p_{MM} \end{pmatrix}$$, resp.

(1.35C) $$a_i = \sum_{j=0}^{M} a_j p_{ji} \quad .$$

s dodatečnou podmínkou $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Dodatek:

T3*. Pro limitní vektor a **a** libovolnou ***n-tou*** **mocninu matice prsti přechodu** P **platí** $aP^n = a$.

Ověření vlastnosti **T3*: Protože podle (1.35B) platí** $aP = a$ **dostaneme postupně :**

$$aP^n = aPP^{n-1} = a.P^{n-1} = aPP^{n-2} = aP^{n-2} = aP^1 = a$$ □ .

Důležitá **poznámka:**

Pro limitní matici A **platí** $\sum_{k=1}^{M} a_{js} = 1$ **a** současně $a_{is} = a_{js}$ **pro i,j,s = 1,2,,...M** (shoda po řádcích)

$$\left[A^2\right]_{jk} = \sum_{s=1}^{M} a_{js} a_{sk} = \sum_{s=1}^{M} a_{ks} a_{sk} = \left[A^2\right]_{kk}$$ **, tedy matice** A^2 **má rovněž stejné řádky.**

Rozšířením máme:

$$\left[A^n\right]_{jk} = \sum_{s=1}^{M} a_{js} a^{n-1}{}_{sk} = \sum_{s=1}^{M} a_{ks} a^{n-1}{}_{sk} = \left[A^n\right]_{kk}$$ **, tedy matice** A^n **má rovněž stejné řádky.**

Pro limitní matici A tedy platí $A^n = A$ **.**

V příkladě 5 se zásobami max. 3 kamer[1] **lze ukázat, že matice pravděpodobností přechodu po 8 krocích $P^{(8)}$ má tvar:**

$$P^{(8)} = P^8 = P^4.P^4 = \begin{Bmatrix} 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \\ 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \\ 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \\ 0,286 & 0,285 & 0,264 & 0,166 \end{Bmatrix}.$$

Zaznamenejme pozoruhodnou skutečnost, že každý ze čtyř řádků má (po zaokrouhlení) **identické prvky. To znamená, že pravděpodobnost toho, že systém je po 8 týdnech ve stavu j se zdá být nezávislá na počátečním stavu zásob ! Jinými slovy, jeví se, že existuje nějaká limitní pravděpodobnost, že systém bude ve stavu j po velkém počtu přechodů a že takováto pravděpodobnost je nezávislá na počátečním rozdělení pravděpodobností stavů. Tento důležitý výsledek vztažený k dlouhodobému chování** určitých **Markovových řetězců s konečným počtem stavů nyní ukážeme: Hodnoty vektoru limitních pravděpodobností π_j Markovova řetězce jsou rovny převráceným hodnotám středních dob návratu příslušného stavu, tj.**

(1.36) $$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$$ **pro j=0,1,...,M.**

Pojem stacionární v tomto případě znamená, že pravděpodobnost toho, že se proces nachází v určitém stavu, řekněme j, po velkém počtu přechodů směřuje k hodnotě π_j, která je nezávislá na počátečním rozdělení pravděpodobnosti výskytu stavů. Je důležité dodat, že stacionární pravděpodobnost neznamená, že se proces usídlí v jednom stavu. Naopak, proces pokračuje v uskutečňování přechodů ze stavu do stavu a v jakémkoliv kroku n je pravděpodobnost přechodu ze stavu do stavu stále p_{ij}.

Limitní π_j mohou být také interpretovány jako *stacionární pravděpodobnosti* (nezaměňovat se stacionárními pravděpodobnostmi přechodu)**. Jestliže počáteční absolutní pravděpodobnost toho, že jsme ve stavu j je π_j (tj. $P\{X_0 = j\} = \pi_j$ pro všechna j, pak absolutní pravděpodobnost výskytu procesu ve stavu v čase $n = 1,2,\ldots$ .. je také dána těmito π_j tj. $P\{X_n = j\} = \pi_j$**

Zmiňme, že stacionární pravděpodobnosti sestávají z M+2 rovnic pro M+1 neznámých. Protože existuje jediné řešení, přinejmenším jedna rovnice musí být redundantní a může tedy být škrtnuta. Nemůže to ale být rovnice

$$\sum_{i=0}^{M} \pi_j = 1 ,$$

[1] V této části textu jsou stacionární pravděpodobnosti výše zavedené jako a_j značeny π_j .

protože řešení $\pi_j = 0$ by evidentně také vyhovovalo ostatním M+1 rovnicím. Dále: řešení kterýchkoliv jiných M+1 stacionárních rovnic je jednoznačné až na multiplikativní konstantu, přičemž právě díky zmíněné poslední rovnici je toto řešení „tlačeno“ k tomu, aby šlo o pravděpodobnostní rozdělení.

V příkladě se zásobami kamer mohou být rovnice stacionárního stavu vyjádřeny jako

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \pi_0 . p_{00} + \pi_1 . p_{10} + \pi_2 . p_{20} + \pi_3 . p_{30} \\
\pi_1 &= \pi_0 . p_{01} + \pi_1 . p_{11} + \pi_2 . p_{21} + \pi_3 . p_{31} \\
\pi_2 &= \pi_0 . p_{02} + \pi_1 . p_{12} + \pi_2 . p_{22} + \pi_3 . p_{32} \\
\pi_3 &= \pi_0 . p_{03} + \pi_1 . p_{13} + \pi_2 . p_{23} + \pi_3 . p_{33} \\
1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

Dosazení konkrétních hodnot za p_{ij} do těchto pěti rovnic vede ke vztahům

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= (0{,}080)\pi_0 + (0{,}632)\pi_1 + (0{,}264)\pi_2 + (0{,}080)\pi_3 \\
\pi_1 &= (0{,}184)\pi_0 + (0{,}368)\pi_1 + (0{,}368)\pi_2 + (0{,}184)\pi_3 \\
\pi_2 &= (0{,}368)\pi_0 + \qquad\qquad + (0{,}368)\pi_2 + (0{,}368)\pi_3 \\
\pi_3 &= (0{,}368)\pi_0 + \qquad\qquad\qquad\qquad + (0{,}368)\pi_3 \\
1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

(Algebraické) řešení těchto čtyř rovnic vede k simultánnímu řešení

$$\pi_0 = 0{,}285 \qquad \pi_1 = 0{,}285 \qquad \pi_2 = 0{,}264 \qquad \pi_3 = 0{,}166$$

kterýžto výsledek je již (téměř) shodný s výpočtem prvků matice $P^{(8)}$. Takže po mnoha týdnech provozu prodejny se pravděpodobnosti výskytu žádné, jedné, dvou a tří kamer v prodejně budou přibližovat k hodnotám 0,285, 0,285 0,264 a 0,166. Odpovídající střední doby návratu [expected recurrence times] jsou :

$$\mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = 3{,}51 \text{ týdnů}$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = 3{,}51 \text{ týdnů}$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = 3{,}79 \text{ týdnů}$$

$$\mu_{33} = \frac{1}{\pi_3} = 6{,}02 \text{ týdnů}$$

Interpretace tohoto výsledku je názorná: Průměrná doba v týdnech **, kdy se proces vrátí ze stavu** úplného **vyprodání kamer do téhož stavu je 3,51 týdnů. Shodou okolností jde o stejnou dobu, která představuje průměrnou dobu uplynulou od stavu 1 kamera na prodejně do stejného stavu. V případě návratu do stavu 2 kamer** (ze stejného východiska) **je tato doba již 3,79 týdnů, zatímco průměrná doba návratu do stavu plné zásoby 3 kamer, pokud ho sledujeme opět ze stejně "plného stavu" nepatrně přesahuje 6 týdnů.**

1.14 Fundamentální matice regulárního řetězce

Pomocí limitní matice A definujeme *fundamentální matici regulárního řetězce*, která umožňuje stanovit střední dobu prvého přechodu do určitého stavu . U regulárního řetězce je střední doba setrvání v systému neomezená, nebóť každý stav se může opakovat libovolně často.[2] Proto tato charakteristika není zkoumána. **Fundamentální matici regulárního řetězce Z definujeme takto:**

(1.41) $$Z = [I - (P - A)]^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty}(P^n - A)$$

Pro výraz $[I - (P - A)]^{-1}$ lze použít rozvoje $I + (P - A) + (P - A)^2 + ...$, konvergují-li mocniny $(P - A)^k$ k nule. Tato podmínka je splněna, protože $P^n \to A$. Dále je možno dokázat platnost vztahu $(P - A)^n = P^n - A^n = P^n - A$ a tudíž i vztahu (1.41) .

Fundamentální matice Z má řadu vlastností, kterých lze využít při zkoumání středního počtu průchodů procesu určitým stavem.

Uveďme některé vlastnosti fundamentální matice Z : Věta 9 s tvrzeními

T4 $$P.Z = Z.P$$

Důkaz vlastnosti **T4** (DM)

$$PZ = P\left[I + \sum_{n=1}^{\infty}(P^n - A)\right] = P + \sum_{n=1}^{\infty}(P^{n+1} - PA) = \left[I + \sum_{n=1}^{\infty}(P^n - A)\right]P = ZP$$

v důsledku toho, že platí *komutativita* V3 : $AP = PA$ □ .

T5 $Z.\xi = \xi$ **, kde** ξ je sloupcový **vektor, jehož složky jsou tvořeny samými jedničkami.**

Důkaz vlastnosti **T5** (DM)

$$Z\xi = \left[I + \sum_{n=1}^{\infty}(P^n - A)\right].\xi = \left[\xi + \sum_{n=1}^{\infty}(P^n - A)\xi\right] = \xi + \sum_{n=1}^{\infty}(P^n\xi - A\xi) = \xi + \sum_{n=1}^{\infty}(\xi - \xi) = \xi$$

Pro *j-tý* prvek vektoru $v = A\xi$ **platí:** $v_j = \sum_{k=1}^{M} a_{jk}.1 = 1.\sum_{k=1}^{M} a_{jk} = 1$, **tedy** $A\xi = \xi$

Pro *j-tý* prvek vektoru $w = P^n\xi$ **platí:** $w_j = \sum_{k=1}^{M} p^{(n)}{}_{jk}.1 = 1.\sum_{k=1}^{M} p^{(n)}{}_{jk} = 1$, **tedy** $P^n\xi = \xi$

(protože jak matice P^n , tak limitní matice A mají jedničkové řádkové součty). □ .

T6 $a.Z = a$ pro řádkový vektor a . **Důkaz** vlastnosti **T6** (DM)

$$aZ = a[I - (P - A)]^{-1} = aI + a\sum_{n=1}^{\infty}(P^n - A) = a + \sum_{n=1}^{\infty}(aP^n - aA) = a + \sum_{n=1}^{\infty}(a - a) = a \text{ ,}$$

protože $aA = a$ (vlastnost limitní matice) a stejně tak $aP^n = a$. □ .

T7 $$I - Z = A - P.Z$$

Důkaz vlastnosti **T7** (VK)

$$(I - P)Z = (I - P)\left[I + (P - A) + (P^2 - A) + ...\right] = (I - P) + (P - A) + (P^2 - A) + (P^3 - A) + ...$$
$$- P(P - A) - P(P^2 - A) - ... = I - P + (P - A) = I - A$$

Převedením členů na příslušné strany rovnice získáme vztah $I - Z = A - PZ$ **.** □ □.

---

[2] **To je nesprávně řečené a neodpovídá to pojmu trvalého stavu ! Místo toho by mělo být řečeno, že vždy existuje kladná pravděpodobnost přechodu do trvalého stavu v jakkoliv vzdálené budoucnosti.**

Střední doba prvního přechodu v regulárním řetězci

Při realizaci regulárního řetězce se mohou průběžně v čase vyskytovat všechny stavy. Proto nabývají významu *charakteristiky udávající střední dobu prvého přechodu do určitého stavu*.

Označme střední dobu prvního přechodu ze stavu *i* do stavu *k* jako m_{ik}. Střední dobu prvého „přechodu" pro případ $i=k$ (jde vlastně o *střední dobu prvého návratu*) můžeme vyjádřit jako

(1.42) $$m_{ii} = 1.p_{ii} + \sum_{k \neq i}^{M} p_{ik} m_{ki} \ .$$

Setrvá-li proces s pravděpodobností p_{ii} ve stavu i, stráví zde jednu časovou jednotku (s pravděpodobností p_{ii}). **Přejde-li s pravděpodobností p_{ik} do stavu k trvá první návrat** (první přechod z k do i) **v průměru m_{ki}. V ostatních případech můžeme střední dobu prvního přechodu z i do j vyjádřit jako**

(1.43) $$m_{ij} = 1.p_{ij} + \sum_{k \neq j}^{M} \left[p_{ik} m_{kj} + 1.p_{ik} \right]$$ **, kde**

přechod ze stavu i do stavu j může s pravděpodobností p_{ij} proběhnout hned v prvém kroku (za jednu časovou jednotku) **nebo všemi možnými kombinacemi z i do k, a to buď v jednom kroku nebo ve větším počtu kroků. Úpravou rovnice (1.43) můžeme přejít na tvar**

(1.43A) $$m_{ij} = \sum_{k \neq j}^{M} p_{ik} m_{kj} + 1 = \sum_{k=1}^{M} p_{ik} m_{kj} - p_{jj} m_{jj} + 1 \ .$$

Vyjádříme-li střední dobu prvého přechodu mezi jednotlivými stavy systému pomocí maticového vyjádření, dostáváme

(1.44) $$M = P\left(M - M^*\right) + E$$ **, kde M^* je**

matice obsahující jen diagonální prvky matice M a E je matice tvořená samými jedničkami. Lze tedy psát

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1M} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{M1} & m_{M2} & \dots & m_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M1} & p_{M2} & \dots & p_{MM} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & \dots & m_{1M} \\ m_{21} & 0 & \dots & m_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{M1} & m_{M2} & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Vyjádříme-li M v explicitním tvaru, dostaneme

(1.45) $$M = \left(I - Z + EZ^*\right) . M^*$$ **, kde**

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1M} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{M1} & m_{M2} & \dots & m_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1M} \\ z_{21} & 1-z_{22} & \dots & z_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{M1} & z_{M2} & \dots & 1-z_{MM} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{MM} \end{pmatrix}$$

matice Z^* je matice obsahující pouze diagonální prvky fundamentální matice Z. Při stanovení prvků diagonální matice M^* užijeme vztah $m_{ii} = 1/a_{ii}$, kde a_{ii} jsou složky limitního vektoru a.

Výpočty jednotlivých charakteristik ukážeme dále na příkladě:

Příklad Trh práce

VK příklad 2.3

Při analýze pracovního trhu mohou jednotliví pracovníci buď

- **pracovat ve své vlastní profesi**
- **pracovat v jiné profesi**
- **ocitnout se mezi nezaměstnanými**

Při statistickém sledování souboru pracovníků se ukázalo, že během jednotlivých měsíců došlo ke změnám mezi jednotlivými následovně:

Ve své profesi pracovalo i v následujícím měsíci 80% pracovníků, 10% přešlo k jiným povoláním a 10% se stalo nezaměstnanými. Z pracovníků pracujících mimo svou profesi přišlo 10% v následujícím měsíci ke své profesi, 70% zůstalo i nadále pracovat mimo svou profesi a 20% přišlo v následujícím měsíci o práci. Z nezaměstnaných našlo práci ve své profesi 5% osob, 30% nezaměstnaných získalo práci mimo svou profesi a 65% zůstalo i v dalším měsíci nezaměstnanými.

Ze zadání úlohy plyne, že **matice pravděpodobností přechodu má tvar**

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,05 & 0,3 & 0,65 \end{pmatrix}.$$

Úlohou je stanovit limitní matici A, fundamentální matici Z a matici středních dob prvého přechodu M.

Ze zadání úlohy je zřejmé, že matice pravděpodobností přechodu P je regulární. Limitní vektor a stanovíme řešením soustavy rovnic $a.P = a$, kde $a = (a_1 \quad a_2 \quad a_3)$ s respektování podmínky $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. pro stanovení limitního vektoru a dostaneme po dosazení prvků matice P soustavu rovnic:

$$0,8a_1 + 0,1a_2 + 0,05a_3 = a_1$$

$$0,1a_1 + 0,7a_2 + 0,3a_3 = a_2$$

$$0,1a_1 + 0,2a_2 + 0,65a_3 = a_3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 .$$

Jednu z prvních tří rovnic vynecháme a spolu se čtvrtou rovnici řešíme pro neznámé a_1, a_2, a_3. Dostaneme limitní vektor $a = (0,28125 \quad 0,406245 \quad 0,3125)$

Limitní matice A má přirozeně **všechny řádky stejné: Jsou tvořeny prvky limitního vektoru, tedy**

$$A = \begin{pmatrix} 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,3125 \end{pmatrix}.$$

K výpočtu fundamentální matice Z použijeme vztah (1.41), kde

$$Z = [I - (P - A)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}28496 & -1{,}1270 & -0{,}7277 \\ -0{,}5879 & 1{,}6855 & -0{,}09766 \\ -0{,}9004 & 0{,}1230 & 1{,}7773 \end{pmatrix}.$$

Zde je vidět, že ne všechny prvky fundamentální matice Z musí být kladné. Matice Z totiž jistým způsobem zachycuje „odchylky“ od limitní matice A.

Matici M středních dob prvého přechodu do stavů $1,2,3$ dostaneme užitím vztahu (1.45) $M = (I - Z + EZ^*).M^*$, v němž

I je jednotková matice, Z^*, M^* jsou matice obsahující jen diagonální prvky matice M a E je matice tvořená samými jedničkami, konkrétně tedy

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Z^* = \begin{pmatrix} 0{,}28496 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}6855 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}7773 \end{pmatrix}.$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 3{,}5556 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}4615 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}20 \end{pmatrix}$$

Při určení prvků diagonální matice M* na hlavní diagonále vycházíme z toho, že pro střední doby prvého návratu m_{ii} platí $m_{ii} = 1/a_i$, kde a_i jsou složky limitního vektoru a. Dosazením příslušných matic do vztahu (1.45)

$$M = (I - Z + EZ^*).M^*$$

dostaneme matici středních dob prvého přechodu M ve tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 3{,}5556 & 6{,}9229 & 7{,}9999 \\ 12{,}222 & 2{,}4615 & 5{,}999 \\ 13{,}333 & 3{,}846 & 3{,}19995 \end{pmatrix}$$

Jestliže tedy pracovník pracuje ve své profesi (stav 1), pak v průměru za 8 měsíců se stane nezaměstnaným.

Aparátu, který poskytuje teorie Markovových řetězců, lze často s úspěchem využít při projektování systémů řízení zásob. Postup prezentujeme na dalším příkladě: