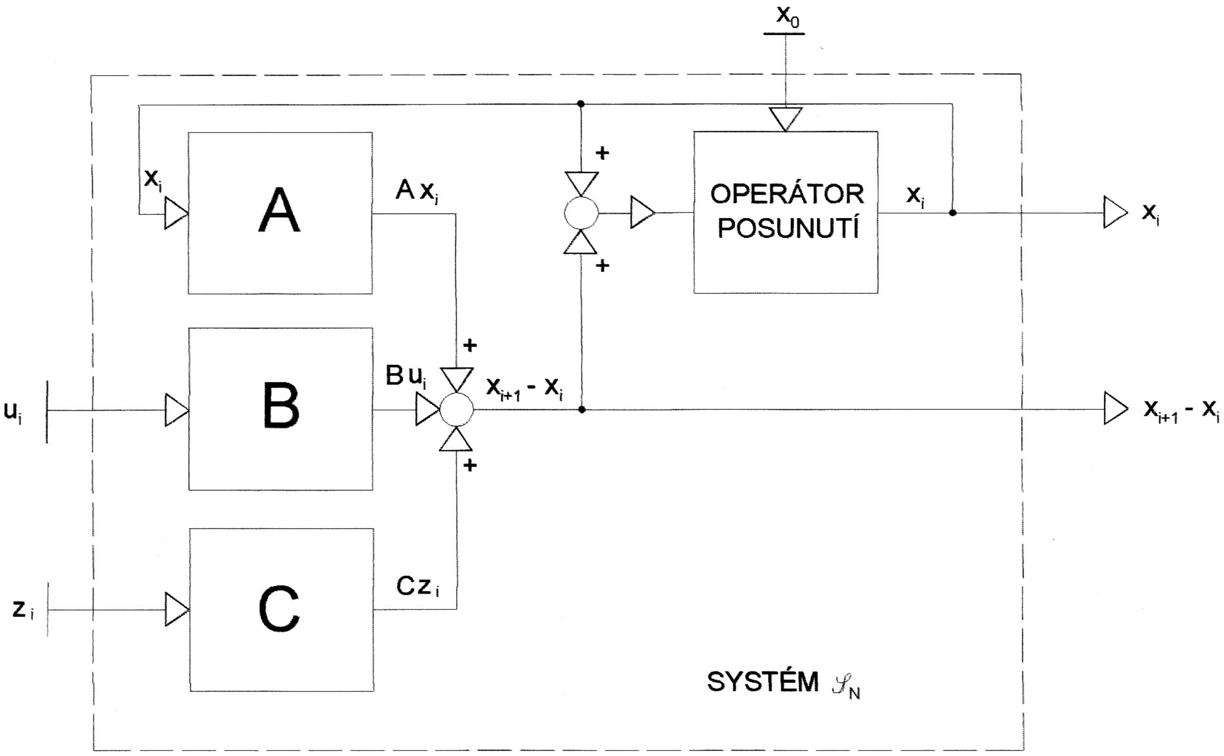
Obr. 1 Strukturální schéma lineárního časově invariantního systému $\mathcal{S}_N$



Kvadratické kritérium optimality, tzv. kvadratický funkcionál[+] je pak ve tvaru

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x}_i)^T \mathbf{Q}(x_i - \hat{x}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(u_i - \hat{u}_i)^T \mathbf{R}(u_i - \hat{u}_i) \qquad [3]$$

kde **Q** je daná matice typu (n x n),

R daná matice typu (r x r).

S ohledem na **existenci a jednoznačnost řešení** je matice **Q positivně semidefinitní a matice R je positivně definitnitní**. Jak **Q** a **R** jsou **obvykle diagonální matice**.

[+] Důležité je uvědomit si význam kvadratického funkcionálu. Prvky diagonální matice **Q** udávají váhy čtverců odchylek stavových proměnných od jejich nominálních průběhů. Některé prvky v **Q** mohou být nulové. Prvky diagonální matice **R** udávají váhy čtverců odchylek řídících proměnných od jejich nominálních průběhů. Všechny prvky diagonály **R** musí být nenulové, je to nezbytná podmínka pro matematické řešení.

Problém optimálního řízení spočívá v nalezení konečné posloupnosti r – rozměrných vektorů řízení $\{u_i^*,\ i = 0,1,\ldots,N-1\}$ takové, která minimalizuje kritérium [3] při kauzální relaci [1] a počáteční podmínce [2].

2. *Nutné podmínky optimality*

Vyjádření nutných podmínek vychází z **Pontrjaginova principu minima**. K řešení problému optimality použijeme nutné **podmínky optimality ve formě Hamiltonových kanonických rovnic. Hamiltonova funkce (Hamiltonián)** je pro daný problém ve tvaru

$$\mathrm{H}(x_i, p_{i+1}, u_i) = \frac{1}{2}(x_i - \hat{x}_i)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(x_i - \hat{x}_i) + \frac{1}{2}(u_i - \hat{u}_i)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(u_i - \hat{u}_i) + p_{i+1}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}x_i + \mathbf{B}u_i + \mathbf{C}z_i) \qquad [4]$$

kde p_i je **kovektor stavu** (resp. vektor souvisejících stavů, resp. vektor dynamických Langrangeových multiplikátorů).

Z nutných podmínek plynou za předpokladu symetrických matic **Hamiltonovy kanonické rovnice** popisující optimální trajektorie x_i^*, p_i^* a u_i^*

$$x_{i+1}^* - x_i^* = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_{i+1}}\Big|_* = \mathbf{A}x_i^* + \mathbf{B}u_i^* + \mathbf{C}z_i \qquad [5],$$

kde $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_{i+1}}\Big|_*$ značí hodnotu derivace podél optimálních trajektorií,

$$p_{i+1}^* - p_i^* = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}\Big|_* = -\mathbf{Q}(x_i^* - x_i) - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}p_{i+1}^* \qquad [6].$$

Rovnice jsou podmíněny **okrajovými podmínkami**

$$x_0^* = \xi \qquad [7],$$

$$p_N^* = \mathbf{Q}(x_N^* - \hat{x}_N) \qquad [8].$$

Nutná podmínka pro relativní minimum Hamiltonovy funkce má tvar

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_i}\Big|_* = 0 = \mathbf{R}(u_i^* - \hat{u}_i) + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}p_{i+1}^* \qquad [9]$$

Z toho plyne rovnice pro **optimální řízení**

$$u_i^* = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} p_{i+1}^* + \hat{u}_i \qquad [10].$$

Řešení rovnic [5] a [6] při [10] a při daných okrajových podmínkách na začátku intervalu [7] a na konci intervalu [8] představuje tzv. „**klasický lineární dvoubodový okrajový problém**", jehož řešení spolu se vztahem [10] určuje hledanou vektorovou posloupnost **{u_i^*, i = 0,1,...,N-1}.**

3. *Řešení úlohy optimálního řízení*

Dosazením rovnice [10] do rovnice [5] dostaneme vztah

$$x_{i+1}^* - x_i^* = \mathbf{A}x_i^* - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} p_{i+1}^* + \mathbf{B}\hat{u}_i + \mathbf{C}x_i \qquad [11]^+$$

i = 0,1,...,N-1

Předpokládejme, že existuje **posloupnost matic $\mathbf{K}_i$ a posloupnost vektorů** g_i takové, že pro kovektor stavu

$$p_i^* = \mathbf{K}_i x_i^* + g_i \qquad [12]$$

i = 0,1,...,N-1

platí, že **posloupnost { u_i^*, i = 0,1,...,N-1} je identická s posloupností { u_i^* [x_i]; i = 0,1,...,N-1}. Řízení lze vyjádřit jako funkci stavu systému.**

Za daného předpokladu můžeme výraz [10] zapsat ve tvaru

$$u_i^* = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}_{i+1}x_{i+1}^* + g_{i+1}) + \hat{u}_i \qquad [13],$$

$^+$ Rovnice [6] a [11] představují dvě **části soustavy diferenčních rovnic prvního řádu pro neznámé posloupnosti vektoru u_i^* a vektoru x_i^***. Všech **rovnic je 2n** s celkem **2n okrajovými podmínkami** [7] a [8].

Soustavu **lze řešit** a výslednou posloupnost kovektoru p_i^* **dosadit zpět do rovnice** [10], abychom získali hodnoty **posloupnosti vektorů optimálního řízení** u_i^*.

Postup je relativně **složitý**, výpočty při větším počtu proměnných jsou značně rozsáhlé. Použili jsme **proto jiný způsob řešení optimálního řízení** u_i^*, o kterém se zmiňujeme v následující části kapitoly.

a výraz [11] ve tvaru

$$x_{i+1}^{*} - x_i^{*} = \mathbf{A}x_i - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}x_{i+1}^{*} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}g_{i+1} + \mathbf{B}\hat{u}_i + \mathbf{C}z_i \qquad [14].$$

Rovnice [14] může být interpretována jako **stavová rovnice optimálně řízeného zpětnovazebního systému a rovnice** [13] jako **rovnice řídícího systému generujícího optimální řízení** u_i^* dané jako funkce stavu v okamžiku (i+1), tj. posunutím jedné periody vzorkování.

Pindyck ukázal, že předpokládaná posloupnost matic $\mathbf{K}_i$ a posloupnost vektorů g_i s požadovanými vlastnostmi existuje a odvodil vztahy, z nichž mohou být stanoveny:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{Q} + (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{\mathrm{T}}[\mathbf{K}_{i+1} - \mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B}(\mathbf{R}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}](\mathbf{I}+\mathbf{A}) \qquad [15]$$

a

$$\begin{aligned} g_i = &-(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{\mathrm{T}}[\mathbf{K}_{i+1} - \mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B}(\mathbf{R}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B})^{-1}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}]\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}g_{i+1} + \\ &+(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{\mathrm{T}}g_{i+1} + (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{\mathrm{T}}[\mathbf{K}_{i+1} - \mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B}(\mathbf{R}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}]. \\ &.(\mathbf{B}\hat{u}_i + \mathbf{C}z_i) - \mathbf{Q}\hat{x}_i \end{aligned} \qquad [16]$$

Riccatiho rovnice [15] a určující rovnice [16] s okrajovými podmínkami

$$\mathbf{K}_N = \mathbf{Q} \qquad [17],$$
$$g_N = -\mathbf{Q}\hat{x}_N \qquad [18],$$

řeší náš problém optimálního řízení.

Posloupnost vektorů optimálního řízení u_i^* vyjádřených pomocí posloupnosti optimálních vektorů stavu x_i^* a řešení Riccatiho rovnice [15] a [16] je následující

$$\begin{aligned} u_i^* = &-(\mathbf{R}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}(\mathbf{I}+\mathbf{A})x_i^* + \\ &+(\mathbf{R}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}g_{i+1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}g_{i+1} - \\ &-(\mathbf{R}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}(\mathbf{B}\hat{u}_i + \mathbf{C}z_i) + \hat{u}_i \end{aligned} \qquad [19].$$

4. *Zpětná vazba*

Můžeme definovat posloupnost matic $\mathbf{H}_i$.

$$\mathbf{H}_i = -(\mathbf{R}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}(\mathbf{I}+\mathbf{A}) \qquad [20]$$

posloupnost vektorů h_i

$$\begin{aligned} \mathrm{h}_i = &(\mathbf{R}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}g_{i+1} - \\ &-(\mathbf{R}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{i+1}(\mathbf{B}\hat{u}_i + \mathbf{C}z_i) + \hat{u}_i \end{aligned} \qquad [21]$$

Posloupnost vektorů optimálního řízení u_i^* je tedy definována následovně:

$$u_i^* = -\mathbf{H}_i x_i^* + \mathrm{h}_i \qquad [22],$$

kde $\mathbf{H}_i$ je posloupnost **zpětnovazebních matic** typu (n x n), v čase i,

h_i je posloupnost **vektorů přímého řízení** rozměru n, v čase i

Zpětnovazební složka řízení, definovaná posloupností matic $\mathbf{H}_i$, **není závislá na** $\hat{x}_i$, $\hat{u}_i$ a z_i a představuje optimální řízení systému do počátku ve smyslu kritéria [3] pro $\hat{x}_i = 0$ a $\hat{u}_i = 0$ při nulovém vstupním exogenním vektoru z_i .

Strukturální schéma optimálně řízeného zpětnovazebního systému je znázorněno na obr.2.

5. *Shrnutí postupu řešení*

Jestliže jsme znali

- **kvantifikovaný systém** (matice parametrů **A**, **B**, **C**),
- **trajektorii exogenní** z_i **,**
- **nominální trajektorii řízení** $\hat{u}_i$,
- **nominální trajektorii stavové** $\hat{x}_i$ a
- **funkcionál** (matice **Q** a **R**)

bude postup řešení úlohy optimálního řízení následující:

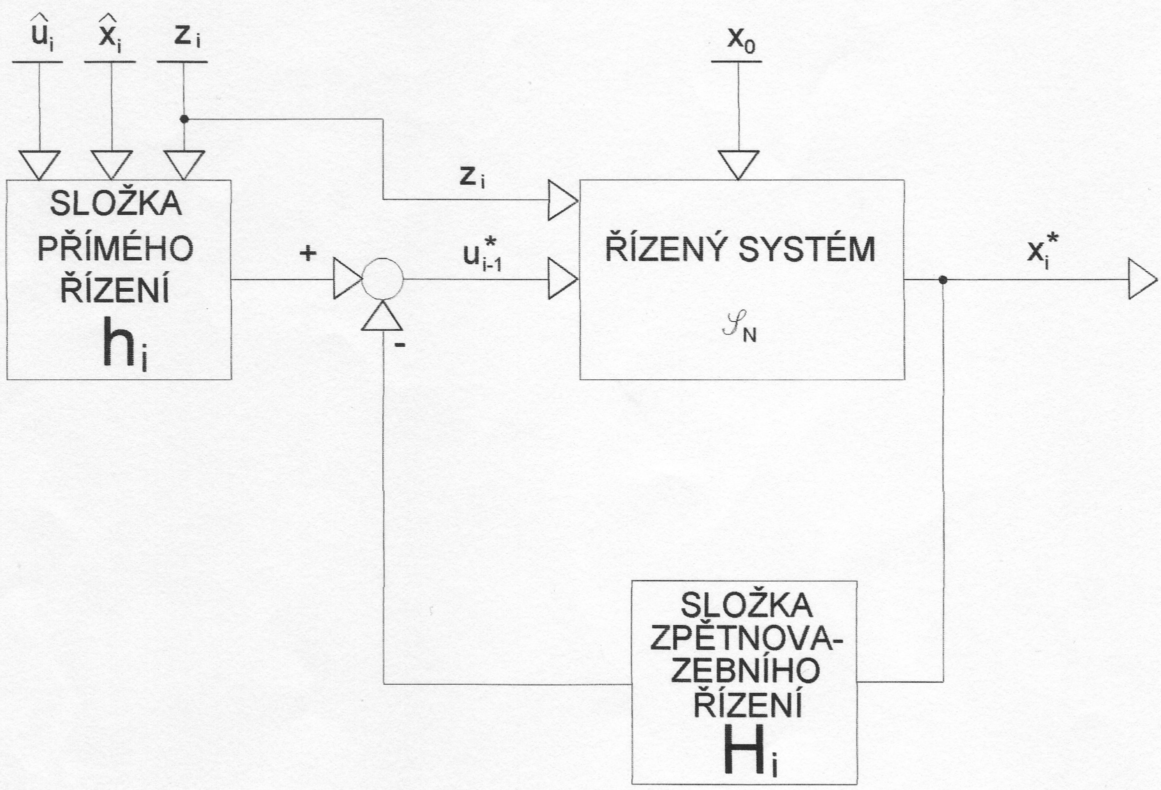
(i) Řešením **Riccatiho rovnice** [15] s okrajovou podmínkou [17] zpětně v čase, získáme hodnoty posloupnosti matic $\{\mathbf{K}_i ; i = 1,\ldots,N\}$ a N výsledných matic uložíme.

(ii) Vypočteme **určující rovnici** [16] s okrajovou podmínkou [18], tím získáme hodnoty posloupnosti vektorů $\{g_i ; i = 1,\ldots,N\}$ a uložíme N výsledných vektorů.

(iii) Vypočteme optimální řízení u_0^* pomocí rovnice [19] s použitím podmínky $x_0^* = \xi$.
Z rovnice systému [5] vypočteme vektor x_1^* , který je využit v rovnici [19] k výpočtu vektoru u_1^* . Vektor u_1^* použijeme pak zase v rovnici [5] k výpočtu vektoru x_2^* , atd. V postupu pokračujeme tak dlouho, až jsou vypočteny celé posloupnosti vektorů optimálního řízení $\{ u_i^* ; i = 0,1,\ldots,N-1\}$ a vektorů stavu $\{x_i^* ; i = 1,\ldots,N\}$.

(iv) Optimální hodnotu funkcionálu lze vyčíslit pomocí rovnice [3].

Obr. 2 Strukturální schéma lineárního časově invariantního optimálně řízeného zpětnovazebního systému



I když se může zdát uvedený postup řešení složitý, ve skutečnosti tomu tak není. Řešení všech popsaných kroků je rekursivní a kroků je pouze N. Vyžaduje invertování symetrických matic, násobení a sčítání matic. Je nutno pamatovat na to, že největší matice, která by mohla být v průběhu řešení invertována je řádu r. proto by za normálních okolností mělo být r menší než 10. Zpracování všech kroků (i) až (iv) uvedeného řešení vyžaduje minimální množství strojového času.