Lineární proces [linear process]

Teoretickým základem modelů tzv.*Boxovy-Jenkinsovy metodologie* je *lineární proces*, který je definován jako

(1) $y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots).\varepsilon_t = \psi(B).\varepsilon_t$,

kde $\{\varepsilon_t\}$ je tzv. bílý šum [white noise] [= *posloupnost nekorelovaných, stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konstantním konečným rozptylem* $\sigma^2 > 0$] a B je operátor časového posunu.

Dále se předpokládá, že mocninná řada $\psi(z)$ proměnné z konverguje pro $|z| \le 1$ (tj. uvnitř a na jednotkovém kruhu v komplexní rovině).

Za tohoto předpokladu lze ukázat, že nekonečné řady náhodných veličin (1) pro jednotlivá *t konvergují podle kvadratického středu*[1], přičemž limitní hodnoty $\{y_t\}$ tvoří stacionární posloupnost s nulovou střední hodnotou $E(y_t) = 0$

Jiné vyjádření lineárního procesu (1), které je užitečné např. při konstrukci předpovědí, je možné v případě, že tento *proces je invertibilní* a lze ho zapsat jako

(2) $y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \pi_3 y_{t-3} \dots + \varepsilon_t$ neboli

(2A) $\varepsilon_t = y_t - \pi_1 y_{t-1} - \pi_2 y_{t-2} - \pi_3 y_{t-3} - \dots = \pi(B).y_t$,

Přitom *postačující podmínkou invertibility* je předpoklad analogický předpokladu (2), že

(3) mocninná řada $\pi(z)$ konverguje pro $|z| \le 1$, tj. uvnitř a na jednotkovém kruhu v komplexní rovině.

Poznámka1 Existuje řada důvodů, proč modely postavené na principu lineárního procesu jsou vhodné pro modelování reality. Nechť pro stacionární proces $\{y_t\}$ s nulovou střední hodnotou předpovídáme hodnotu $\{y_t\}$ na základě znalosti minulých hodnot $Y_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$. Optimální předpovědí ve smyslu minimální chyby *MSE* je pak $E(y_{t-1} | Y_{t-1})$, přičemž chyba této předpovědi je

(4) $e_t = y_t - E(y_t | Y_{t-1})$

Má vlastnosti bílého šumu a označuje se jako inovace [innovation]. Označení je vcelku logické, protože inovační proces $\{e_t\}$ odpovídá nepredikovatelnému pohybu v hodnotách $\{y_t\}$. Jestliže je navíc proces $\{y_t\}$ normálně rozdělen, pak podmíněná střední hodnota $E(y_t | Y_{t-1})$ má tvar lineární kombinace hodnot $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ a vztah (4) můžeme přepsat jako

(5) $e_t = y_t - \pi_1 y_{t-1} - \pi_2 y_{t-2} - \dots$,

což je právě invertovaný tvar (2) lineárního procesu.

---

[1] Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_t\}$ konverguje k n.v. X podle středu (je cauchyovská podle středu), jestliže $\lim_{t \to \infty} E|X_t - X| = 0$, resp. $\lim_{s,t \to \infty} E|X_t - X_s| = 0$

Poznámka2 Protože platí $\varepsilon_t = \pi(B).y_t = \pi(B).\psi(B)\varepsilon_t$, musí zřejmě platit

(6) $$\pi(B)\psi(B) = 1$$

(6A) $\psi_1 - \pi_1 = 0$, $\psi_2 - \psi_1\pi_1 - \pi_2 = 0$, $\psi_3 - \psi_2\pi_1 - \psi_1\pi_2 - \pi_3 = 0$ atd.

Tyto vztahy lze použít pro převod parametrů ψ_j na parametry π_j a naopak. Formálně lze také uplatnit zápis

(7) $$\pi(B) = \psi(B)^{-1}.$$

Proces klouzavých součtů MA [moving average process][2]

Proces klouzavých součtů řádu q se značí $MA(q)$ má tvar

(11) $$y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + ... + \theta_q\varepsilon_{t-q} = \theta(B).\varepsilon_t$$

kde $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$ jsou parametry a $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + ... + \theta_q B^q$ je tzv. *operátor klouzavých součtů*. Proces $MA(q)$ tedy zřejmě vzniká useknutím lineárního procesu (1) v bodě, který odpovídá zpoždění q.

Proces $MA(q)$ *je vždy stacionární*, má nulovou střední hodnotu a rozptyl velikosti

(12) $$\sigma_y^2 = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2\right)\sigma^2$$ a má

autokorelační funkci

(13) $$\rho_k = \frac{\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + ... + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2} \quad \text{pro } k = 1,2,...,q$$

$$\rho_k = 0 \quad \text{pro } k > q$$

Autokorelační funkce má tedy bod useknutí k_0 roven řádu modelu q.

ověření:

$$\rho_1 = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t}\sigma^2_{y_{t-1}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)}} =$$

$$\frac{cov(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \theta_1 cov(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + \theta_1 var(\varepsilon_{t-1}) + \theta_1^2 cov(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\theta_1^2)^2}} = \frac{\theta_1\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta_1^2\right)} = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

Parciální autokorelační funkce ρ_{kk} procesu $MA(q)$ nemá bod useknutí, ale je omezena lineární kombinací geometricky klesajících posloupností a sinusoid s geometricky klesajícími amplitudami.

Proces $MA(q)$ je invertibilní, jestliže všechny kořeny $z_1, z_2, ..., z_q$ polynomu $\theta(z)$ leží <u>*vně*</u> jednotkového kruhu v komplexní rovině (tj. $|z_1| > 1, |z_2| > 1, ..., |z_q| > 1$), neboť potom je splněn předpoklad (3).

---

[2] MA proces nemá žádnou přímou souvislost s dříve popsanou *metodou klouzavých průměrů* užívanou pro eliminaci trendu časové řady.

Proces $MA(1)$ - proces klouzavých součtů 1. řádu

(14) $$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

má *autokorelační funkci*

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}, \quad \rho_k = 0 \quad \text{pro } k > 1$$

s bodem useknutí $k_0 = 1$ **.**

ověření: **vyjdeme z definice (6)**

$$\rho_1 = \frac{\gamma_k}{\sigma_y^2} = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{var\, y_t}\sqrt{var\, y_{t-1}}} = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sigma_y \cdot \sigma_{y-1}}$$ **a vypočítáme**

$$\rho_1 = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t} \cdot \sigma^2_{y_{t-1}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)}} =$$

$$\frac{cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + \theta_1 cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + \theta_1 var(\varepsilon_{t-1}) + \theta_1^2 cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4 (1+\theta_1^2)^2}} = \frac{\theta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)} = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

protože ze čtyř členů v čitateli je jen jeden nenulový a dále platí

$$var\, y_t = var\, y_{t-1} = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_{\varepsilon_{t-1}}^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)$$

(Při odvozování respektujeme pravidlo nekorelovanosti náhodných složek $\varepsilon_t, \varepsilon_s$ pro $t \neq s$.)

$$\rho_k = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t} \cdot \sigma^2_{y_{t-k}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)}} =$$

$$\frac{cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) + \theta_1 cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k}) + \theta_1 cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k-1}) + \theta_1^2 cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k-1})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4 (1+\theta_1^2)^2}} = 0$$

protože při $k \geq 2$ **se ve jmenovateli neobjeví žádné dvě složky** $\varepsilon_s, \varepsilon_t$ **se stejným indexem.** □ **.**

Jeho *parciální autokorelační funkce* ρ_{kk} **má tvar** (bez bodu useknutí):

(15) $$\rho_{kk} = \frac{(-1)^k \theta_1^k (1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2k+2}}$$ **pro** $k = 1,2,3,...$

Takže je v *případě invertibility* procesu *opravdu* **neomezená geometricky klesající posloupnost**

(16) $$|\rho_{kk}| = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

***Podmínka invertibility* zde má totiž velmi jednoduchý tvar** $|\theta_1| < 1$ **. Protože**

$\rho_1 = \dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$, **musí pro invertibilní** $MA(1)$ **proces být** $|\rho_1| = \left|\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}\right| < 0{,}5$ **. Tato nerovnost platí dokonce pro všechna** $|\theta_1| \neq 1$ **.**

Proces $MA(2)$ - proces klouzavých součtů 2. řádu

(17) $$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

má *autokorelační funkci*

(18) $$\rho_k = \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \quad pro \quad k=1$$
$$= \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \quad pro \quad k=2$$
$$= 0 \quad pro \quad k>2$$

s bodem useknutí $k_0 = 2$.

ověření:

$$\rho_1 = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t} . \sigma^2_{y_{t-1}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \vartheta_1\varepsilon_{t-1} + \vartheta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1} + \vartheta_1\varepsilon_{t-2} + \vartheta_2\varepsilon_{t-3})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2).\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2).}} =$$
$$\frac{\theta_1 cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \vartheta_1\theta_2 cov(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)^2}} = \frac{\theta_1\sigma_\varepsilon^2 + \vartheta_1.\theta_2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)} = \frac{\theta_1 + \vartheta_1.\theta_2}{(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)}$$

$$\rho_2 = \frac{cov(y_t, y_{t-2})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t} . \sigma^2_{y_{t-2}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \vartheta_1\varepsilon_{t-1} + \vartheta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2} + \vartheta_1\varepsilon_{t-3} + \vartheta_2\varepsilon_{t-4})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2).}} =$$
$$\frac{\theta_2 cov(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)^2}} = \frac{\theta_2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)} = \frac{\theta_2}{1+\vartheta_1^2}$$.

$$\rho_k = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t} . \sigma^2_{y_{t-k}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k} + \theta_1\varepsilon_{t-k-1} + \theta_2\varepsilon_{t-k-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2).}} =$$
$$\frac{0}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\theta_1^2)^2}} = 0$$

protože při $k \geq 3$ se ve jmenovateli neobjeví žádné dvě složky $\varepsilon_s, \varepsilon_t$ se stejným indexem.

Při odvozování respektujeme pravidlo nekorelovanosti náhodných složek $\varepsilon_t, \varepsilon_s$ pro $t \neq s$. □ .

Podmínka *invertibility* (2) má pro proces $MA(2)$ tvar

(19) $$\theta_1 + \theta_2 > -1 \; , \; \theta_2 - \theta_1 > -1 \; , \; -1 < \theta_2 < 1,$$

takže *oblast invertibility procesu* $MA(2)$ v rovině s vodorovnou osou pro hodnoty θ_1 a se svislou osou pro hodnoty θ_2 vyplní vnitřek trojúhelníka s vrcholy $(-2,1)$, $(0,-1)$ a $(2,1)$.

Autoregresní proces AR [autoregressive process]

Autoregresní proces řádu p se značí $AR(p)$ má tvar

(21) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t = \phi(B).y_t + \varepsilon_t$$ neboli

(21A) $$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots + \phi_p y_{t-p} = \phi(B).y_t = \varepsilon_t$$, kde

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ **jsou parametry a** $\phi(B) = 1 - \phi_1 B + \dots - \phi_p B^p$ **je tzv.** ***autoregresní operátor*.**
Proces $AR(p)$ zřejmě vzniká useknutím lineárního procesu v bodě, který odpovídá velikosti zpoždění p.

Proces $AR(p)$ je stacionární, jestliže všechny kořeny $z_1, z_2, \dots, z_p$ polynomu $\phi(z)$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině (tj. pro všechna $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_p| > 1$**), protože pak je splněn předpoklad (3). Proces má v tom případě nulovou střední hodnotu a jeho rozptyl je roven**

(22) $$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \dots - \phi_p \rho_p}.$$

ověření: Definiční vyjádření procesu (21) vynásobíme y_t, a uplatníme střední hodnotu:

$$y_t.y_t = \phi_1 y_t.y_{t-1} + \phi_2 y_t.y_{t-2} + \dots + \phi_p y_t.y_{t-p} + y_t.\varepsilon_t$$

(23) $$Ey_t.y_t = \phi_1 Ey_t.y_{t-1} + \phi_2 Ey_t.y_{t-2} + \dots + \phi_p Ey_t.y_{t-p} + Ey_t.\varepsilon_t .$$

Vztah (23) podělíme rozptylem veličiny y_t. Dostaneme:

$$\frac{E(y_t^2)}{\sigma_y^2} = \phi_1 \frac{Ey_t.y_{t-1}}{\sigma_y^2} + \phi_2 \frac{Ey_t.y_{t-2}}{\sigma_y^2} + \dots + \phi_p \frac{Ey_t.y_{t-p}}{\sigma_y^2} + \frac{Ey_t.\varepsilon_t}{\sigma_y^2}.$$

Zřejmě máme $E(y_t^2) = \sigma_y^2$ **a** $\frac{E(y_t.y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \rho_k$ **, takže dostaneme**

$$1 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \dots + \phi_p \rho_p + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$ **, resp.** $$1 - \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \dots + \phi_p \rho_p = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$ **, a po vynásobení obou stran strany rozptylem y_t**

$$\sigma_y^2.(1 - \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \dots + \phi_p \rho_p) = \sigma_\varepsilon^2$$ **, z čehož plyne (22).** □.

a jeho *autokorelační funkce* splňuje diferenční rovnici

(24) $$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$$ **pro $k > 0$.**

Poznámka Pro odvození (24) stačí vynásobit všechny členy rovnosti (21) výrazem y_{t-k}/σ_y^2 a přejít ke středním hodnotám, přičemž vzhledem k možnosti vyjádření stacionárního $AR(p)$ procesu jako lineárního procesu (1), je $E(y_{t-k}.\varepsilon_t) = 0$ pro $k > 0$:

(21) $$\frac{y_t y_{t-k}}{\sigma_y^2} = \frac{\phi_1 y_{t-1} y_{t-k} + \phi_2 y_{t-2} y_{t-k} + \dots + \phi_p y_{t-p} y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k}}{\sigma_y^2}$$ **a dále**

$$\frac{E(y_t y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \frac{\phi_1 E(y_{t-1} y_{t-k}) + \phi_2 E(y_{t-2} y_{t-k}) + \dots + \phi_p E(y_{t-p} y_{t-k}) + \varepsilon_t y_{t-k}}{\sigma_y^2}$$ **, takže**

$$\rho_k = \frac{E(y_t y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \phi_1 \frac{E(y_{t-1} y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \phi_2 \frac{E(y_{t-2} y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \dots + \phi_p \frac{E(y_{t-p} y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \frac{E(\varepsilon_t y_{t-k})}{\sigma_y^2}$$

Neboli $$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} + 0$$ □.

Z teorie diferenčních rovnic přitom plyne, že její řešení (24) lze vyjádřit ve tvaru

(25) $$\rho_k = \alpha_1 z_1^{-k} + \alpha_2 z_2^{-k} + \dots + \alpha_p z_p^{-k}$$ **pro $k \geq 0$, kde**

$z_1, z_2, \dots, z_p$ **jsou navzájem různé kořeny polynomu $\phi(z)$ s vlastnostmi**

$|z_1|, |z_2|, \dots, |z_p| > 1$ **a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ jsou pevné koeficienty:**

***a) Pokud jsou kořeny** z_i, z_j **komplexně sdružené**, pak mohou být nahrazeny jediným členem tvaru $\alpha . d^k . \sin(\lambda k + \phi)$ s $0 < d < 1$.*

b) Pokud kořeny** z_i, z_j **nejsou navzájem různé**,* tzn. některý z nich je násobný, **pak se pro kořen z_i s násobností *r* ve vyjádření objeví** složitější **člen typu** $(\beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \dots \beta_r k^{r-1}) z_i^{-k}$, **který je však výrazně překrýván průběhem členu** z_i^{-k}. Tak či onak, je ***autokorelační funkce procesu $AR(p)$ **v podstatě lineární kombinací *klesajících geometrických posloupností* a *sinusoid různých frekvencí* s *geometricky klesajícími amplitudami*.**

soustava Yule-Walkerových rovnic

Jestliže zapíšeme výraz (23) jen pro $k = 1, 2, \dots, p$, pak dostaneme tzv. soustavu Yuleových-Walkerových rovnic pro vyjádření parametrů $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ pomocí autokorelací $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ (a naopak).

(26) $$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad .. + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots\dots + \phi_p . \end{aligned}$$

Parciální autokorelační funkce** ρ_{kk} **procesu** $AR(p)$ **má bod useknutí** k_0 **rovný řádu modelu** p. **To plyne přímo z definice parciální autokorelační funkce, což činí z této funkce důležitý nástroj pro identifikaci autoregresních procesů.

Proces** $AR(p)$ **je vždy invertibilní. **Je to zřejmé, neboť (23) je již zápis tohoto modelu v invertovaném tvaru.**

Proces $AR(1)$ - autoregresní proces 1. řádu

(27) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$ je stacionární pro $|\phi_1| < 1$

V tomto případě má nulovou střední hodnotu a rozptyl procesu $AR(1)$ je roven

(28) $$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}.$$

Jeho *autokorelační funkce* má tvar

(29) $$\rho_k = \phi_1^k$$ pro $k = 0,1,2,3,...$

ve tvaru geometricky klesající posloupnosti (oscilující pro záporné ϕ_1 a bez bodu useknutí) . Speciálně je pro $k = 1$

(30) $$\rho_1 = \phi_1$$, což znamená, že

$\rho_1 = \phi_1$ první autokorelace procesu $AR(1)$ se rovná právě jeho autoregresnímu parametru. Proto důležitou roli v modelu hraje znaménko parametru ϕ_1.

a) Pokud platí $\phi_1 > 0$ (pozitivní autokorelovanost), pak je patrná setrvačnost ve znaménkách sousedních hodnot (s relativn ě malým překřížením časové osy)

b) Pokud platí $\phi_1 < 0$ (negativní autokorelovanost), pak to signalizuje relativně velmi časté přechody hodnot přes časovou osu, a velmi časté změny ve znaménkách sousedních hodnot časové řady.

Parciální autokorelační funkce procesu $AR(1)$ má tvar

(31) $$\rho_{11} = \phi_1$$, $\rho_{kk} = 0$ pro $k > 1$

s bodem useknutí $k_0 = 1$.

Proces $AR(2)$ - autoregresní proces 2.řádu

(32) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$ je stacionární pro

(32A) $$\phi_1 + \phi_2 < 1 , \quad \phi_2 - \phi_1 < 1 \quad -1 < \phi_2 < 1 ,$$

takže příslušná oblast stacionarity $AR(2)$ v rovině s vodorovnou osou pro hodnoty ϕ_1 a svislou osou pro hodnoty ϕ_2 vyplní vnitřek trojúhelníka v vrcholy

s vodorovnou osou pro hodnoty θ_1 a se svislou osou pro hodnoty θ_2 vyplní vnitřek trojúhelníka s vrcholy $(-2,-1)$, $(0,1)$ a $(2,-1)$. V tom případě má proces $AR(2)$ nulovou střední hodnotu a rozptyl roven

(33) $$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2}.$$

a jeho autokorelační funkce má tvar

$$\rho_k = \frac{z_1^{-1}\left(1-z_2^{-2}\right)z_1^{-k} - z_2^{-1}\left(1-z_1^{-2}\right)z_2^{-k}}{\left(z_1^{-1}-z_2^{-1}\right)\left(1+z_1^{-1}z_2^{-1}\right)}$$ pro $k \geq 0$, kde

z_1 , z_2 jsou navzájem různé kořeny polynomu $\phi(z)$ ($|z_1|,|z_2| > 1$; pro dvojnásobný kořen je tvar funkce analogický), ρ_k nemá bod useknutí a má tvar lineární kombinace dvou geometricky klesajících posloupností nebo tvar sinusoidy s geometricky klesající amplitudou.

Parciální autokorelační funkce procesu $AR(2)$ má bod useknutí roven $k_0 = 2$.

Smíšený proces ARMA [autoregressive and moving averages process]

Smíšený proces řádu p a q značený jako $ARMA(p,q)$ má tvar:

(41) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 . \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q . \varepsilon_{t-q}$$ neboli

(41A) $$\phi(B) y_t = \theta(B) \varepsilon_t ,$$

kde operátory $\phi(B)$ a $\theta(B)$ byly zavedeny v procesech $AR(p)$ a $MA(q)$. Podmínka stacionarity (resp. invertibility) smíšeného procesu $ARMA(p,q)$ je shodná s podmínkou procesu $AR(p)$ (resp. invertibility procesu $MA(q)$.)

Stacionární proces $ARMA(p,q)$ má nulovou střední hodnotu a jeho autokorelační funkce splňuje diferenční rovnici

(42) $$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p}$$ pro $k \geq q + 1$

s řešením

(43) $$\rho_k = \alpha_1 z_1^{-k} + \alpha_2 z_2^{-k} + \ldots + \alpha_p z_p^{-k}$$ pro $k \geq \max(0, q - p + 1)$,

kde $z_1, z_2, \ldots, z_p$ jsou navzájem různé kořeny polynomu $\phi(z)$, $(|z_1|,|z_2|,\ldots,|z_p|) > 1$.

Autokorelační funkce procesu $ARMA(p,q)$ nemá bod useknutí a je v podstatě lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami, ale s výjimkou počátečních hodnot $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{q-p}$ (tato výjimka se uplatní jen v případě $q \geq p$).

Parciální autokorelační funkce procesu $ARMA(p,q)$ nemá bod useknutí a je omezena lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami, ale s výjimkou počátečních hodnot $\rho_{00}, \rho_{11}, \rho_{22}, \ldots \rho_{p-1,p-1}$ (výjimka se uplatní, jen když $p \geq q$).

Proces $ARMA(1,1)$ je představován zápisem

(44) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

a je stacionární pro $|\phi_1| < 1$. V tom případě má nulovou střední hodnotu a rozptyl roven

(45) $$\sigma_y^2 = \frac{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2} . \sigma_\varepsilon^2 .$$

ověření: **Z definice procesu** $ARMA\ (1,1)$ **ve (44) víme, že platí**

$$y_t . y_t = (\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})$$, **takže**

$$E y_t . y_t = E(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2$$ **, po roznásobení pak**

$$E(y_t^2) = \phi_1^2 E(y_{t-1}^2) + E(\varepsilon_t^2) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + 2\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_t) + 2\theta_1 E(\varepsilon_{t-1}.\varepsilon_t) + 2\theta_1\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1})$$

$$E(y_t^2) = \phi_1^2 E(y_{t-1}^2) + E(\varepsilon_t^2) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + 2\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_t) + 2\theta_1\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1})$$

$$E(y_t^2) = \phi_1^2 E(y_{t-1}^2) + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + 2\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_t) + 2\theta_1\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1})$$

Vztah podělíme rozptylem veličiny y_t **. Dostaneme (protože** $2\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_t) = 0$ **) :**

$$\frac{E(y_t^2)}{\sigma_y^2} = \frac{\phi_1^2 E(y_t^2)}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{\theta_1^2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{2\theta_1\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1})}{\sigma_y^2}$$

$$1 = \phi_1^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{\theta_1^2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{2\theta_1\phi_1\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$

$$(1-\phi_1^2)\sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 + 2\theta_1\phi_1\sigma_\varepsilon^2$$

a následně obdržíme shodu s (45)

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 + 2\theta_1\phi_1\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi_1^2)} = \frac{(1+\theta_1^2 + 2\theta_1\phi_1)}{(1-\phi_1^2)}.\sigma_\varepsilon^2 .$$ □.

a má autokorelační funkci

(46) $$\rho_1 = \frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1+\theta_1)}{1+\theta_1^2+2\phi_1\theta_1}.\sigma_\varepsilon^2 .$$

ověření:

podle (6) a (44) máme

$$\rho_1 = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sigma_y.\sigma_{y-1}} = \frac{E(y_t y_{t-1})}{\sigma_y^2} = \frac{E[(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2})]}{\sigma_y^2}$$

Výraz ve čitateli předchozího zlomku lze rozepsat následovně:

$$E[(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2})] =$$

$$E(\phi_1^2 y_{t-1} y_{t-2}) + E(\phi_1 y_{t-1}\varepsilon_{t-1}) + E(\phi_1 y_{t-1}\theta_1\varepsilon_{t-2})$$
$$+ E(\varepsilon_t\phi_1 y_{t-2}) + E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t\theta_1\varepsilon_{t-2}) +$$
$$+ E(\theta_1\varepsilon_{t-1}\phi_1 y_{t-2}) + E(\theta_1\varepsilon_{t-1}^2) + E(\theta_1^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})$$

Vyjádříme-li jednotlivé členy předchozího devítičlenu, dostaneme:

$$E(\phi_1^2 y_{t-1} y_{t-2}) = \phi_1^2.E(y_{t-1}y_{t-2}) =$$

$$E(\phi_1 y_{t-1}\varepsilon_{t-1}) = \phi_1.E(y_{t-1}\varepsilon_{t-1}) = \phi_1.\sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\phi_1 y_{t-1}.\theta_1\varepsilon_{t-2}) = \phi_1.\theta_1.E(y_{t-1}\varepsilon_{t-2}) = \phi_1.\theta_1^2.\sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\varepsilon_t\phi_1 y_{t-2}) = \phi_1.E(\varepsilon_t y_{t-2}) = 0$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$$

$$E(\varepsilon_t \theta_1 \varepsilon_{t-1}) = \theta_1 . E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$$

$$E(\theta_1 \varepsilon_{t-1} \phi_1 y_{t-1}) = \theta_1 \phi_1 . E(\varepsilon_{t-1} . y_{t-1}) = 0$$

$$E(\theta_1 \varepsilon_{t-1})^2 = \theta_1 E(\varepsilon_{t-1})^2 = \theta_1 . \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) = \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) = 0.$$

$$\rho_1 = \frac{xx + \phi_1 \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1 \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (xx + \phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 + \theta_1)}{\sigma_y^2}$$

$$\rho_1 = \frac{xx + \phi_1 \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1 \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (xx + \phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 + \theta_1)}{\frac{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1}{1 - \phi_1^2} . \sigma_\varepsilon^2}$$

(47) $\rho_k = \phi_1 . \rho_{k-1}$. **pro** $k \geq 2$

bez bodu useknutí ve tvaru klesající geometrické posloupnosti s výjimkou ρ_0

Podmínkou invertibility procesu $ARMA\ (1,1)$ **je** $|\phi_1| < 1$ **.**

Parciální ρ_{kk} **autokorelační funkce procesu** $ARMA\ (1,1)$ **je omezena klesající geometrickou posloupností počínaje od** ρ_{11} **.**

Zobecnění stacionární proces s úrovňovou konstantou

Dosud uvedené stacionární procesy se vyznačovaly nulovou střední hodnotou. Jejich zobecnění pro situace, kdy je střední hodnota nenulová (ale zůstává v čase neměnná) **není však nijak obtížné:**

Vezmeme-li

Proces klouzavých součtů řádu $MA(q)$ **se střední hodnotou** μ **má tvar**

(51) $$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \mu + \theta(B).\varepsilon_t$$

Smíšený proces $ARMA\ (p,q)$ **se střední hodnotou** μ **má tvar**

(52)
$$y_t - \mu = \phi_1 (y_{t-1} - \mu) + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p (y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1 . \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q . \varepsilon_{t-q}$$

neboli

(52A) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 . \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q . \varepsilon_{t-q}$$ **, kde**

$$\alpha = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p)\mu$$

Konstrukce modelů v Boxově-Jenkinsově metodologii

Podobně jako v ekonometrii, **sestává úplná tvorba modelu v** ***Boxově-Jenkinsově metodologii*** **z následujících třech kroků:**

(A) identifikace modelu Znamená to např. že pro analyzovanou časovou řadu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ **identifikujeme jí adekvátní model** $AR(1)$

(B) odhad parametrů (kvantifikace) modelu. V rámci modelu $AR(1)$ se (dejme tomu) **jedná o model tvaru** $y_t = 0{,}72\, y_{t-1} + \varepsilon_t$ **při** $\sigma_\varepsilon^2 = 8{,}92$

(C) diagnostika modelu. V rámci odhadnutého modelu v (b) je tento model verifikován na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ **a prověří se jeho verifikační schopnosti.**

Pokud diagnostické výsledky z kroku (C) nejsou dostatečně přesvědčivé, je potřebné všechny tři kroky zopakovat pro alternativní model (často se ale jedná jen o korekci zamítnutého modelu, ke které nám provedená diagnostika poskytla dílčí návod).

(A) - Identifikace modelu

Příspěvek *autokorelační a parciální autokorelační funkce* k identifikaci modelu:

Obecnější poznatky o tvaru autokorelační a parciální autokorelační funkce stacionárních a invertibilních procesů $AR(p)$, $AR(q)$, $ARMA(p,q)$ přináší tabulka:

	$AR(p)$	$MA(q)$,	$ARMA(p,q)$
ρ_k	**neexistuje** k_0	$k_0 = q$	**neexistuje** k_0
	ρ_k **ve tvaru U-křivky**		ρ_k **ve tvaru U-křivky**
			po prvních *q-p* hodnotách
ρ_{kk}	$k_0 = p$	**neexistuje** k_0	
	ρ_k **omezená U-křivkou**		ρ_k **omezená U-křivkou**
			po prvních *p-q* hodnotách

Odpovídající identifikační postup pak spočívá v prohlídce grafického záznamu odhadnutého *korelogramu* a *parciálního korelogramu* modelované časové řady, kdy se snažíme řadě přiřadit nejvhodnější typ modelu právě pomocí charakteristik z tabulky. V případě pochybností testujeme potenciální bod useknutí k_0 **pomocí *Bartlettovy aproximace* s přibližným (asymptotickým) kritickým oborem (nejčastěji na hladině** $\alpha = 0{,}05$ **) pro autokorelační funkci**

(53) $$|r_k| \geq 2.\sqrt{\frac{1}{n}\left(1 + 2.\sum_{j=1}^{k_0} r_j^2\right)}$$ **pro některé** $k > k_0$

Druhou možností je aplikovat *Quenouilleovu aproximaci* s kritickým oborem (na hladině $\alpha = 0{,}05$ **) pro parciální autokorelační funkci**

(54) $$|r_{kk}| \geq 2.\sqrt{\frac{1}{n}}$$ pro některé $k > k_0$.

Identifikace pomocí informačních kritérií

Jde o modernější přístup k identifikaci, který snižuje míru subjektivity posuzování analytika a v jistém smyslu identifikaci automatizuje. K problému identifikace obecného modelu $ARMA(p,q)$ pro danou časovou řadu se zde přistupuje jako k problému odhadu parametrů p,q na základě optimalizačního kritéria

(60) $$(\hat{p},\hat{q}) = \arg\min_{(k,l)} A(k,l)$$ **, kde**

$A(k,l)$ **je vhodné kritérium, k jehož konstrukci musíme pro danou řadu odhadnout model** $ARMA(k,l)$**, přičemž minimalizaci provádíme pro předem zvolenou síť hodnot** $k = 0,1,2,\dots,K$ $l = 0,1,2,\dots,L$ **.**

Adekvátnější než předchozí postup (60) je však uplatnit některé z *kritérií teorie informace*, kdy se penalizují zbytečně vysoké řády *l* a *k* a často tak docílit u odhadů jejich konzistence. Nejběžnější kritéria založená na tomto principu jsou

(A) AKAIKEho informační kritérium **[Akaike information criterion]**

(61) $$AIC(k,l) = \ln\hat{\sigma}^2_{k,l} + 2.\frac{k+l+1}{n}$$

(B) SCHWARTZovo informační kritérium**[Schwartz** (Bayesian) **information criterion]**

(62) $$SIC(k,l) = \ln\hat{\sigma}^2_{k,l} + \ln(n).\frac{k+l+1}{n}$$ **, kde**

$\hat{\sigma}^2_{k,l}$ **je odhadnutý rozptyl bílého šumu procesu** $ARMA(p,q)$ **a v čitateli druhého členu je počet odhadovaných parametrů (se započtením eventuálně nenulové úrovňové konstanty** μ**, přičemž n je délka dané řady). Korektně by ale místo prvních členů v (61), resp. (62) měla být použita minimální hodnota logaritmované věrohodnostní funkce daného modelu vynásobená koeficientem (-2/n).**

Kritérium BIC **sice poskytuje** silně **konzistentní odhad řádu modelu (který konverguje skoro jistě, tj. s pravděpodobností 1), ale s velkým rozptylem (tj. odhad ale postrádá vydatnost).**

U *kritéria AIC* je tomu přesně naopak: příslušný odhad řádu modelu je zde bohužel **nekonzistentní, ale je vydatný.**

Odhad parametrů ARMA modelu

V počáteční fázi kvantifikace modelu se postupuje tak, že se využijí existující vztahy mezi parametry daného modelu a jeho autokorelacemi, kdy např. v modelu $AR(1)$ platí, že $\phi_1 = \rho_1$. Takovéto odhady odvozené z momentů se však zpravidla považují jen za předběžné a slouží tedy jako počáteční odhady pro vlastní odhadové procedury, prováděné většinou iteračně vhodnou numerickou metodou.

model	momentové odhady	kontrolní nerovnosti pro r_k
$AR(1)$	$\phi_1 = r_1$, $\sigma^2 = \sigma^2_y(1-\phi_1 r_1)$	$\lvert r_1 \rvert < 1$
$AR(2)$	$\phi_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}$, $\phi_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1-r_1^2}$, $\sigma^2 = \sigma^2_y(1-\phi_1 r_1 - \phi_2 r_2)$	$\lvert r_2 \rvert < 1$, $r_1^2 < \frac{1+r_2}{2}$
$MA(1)$	$\theta_1 = \frac{1-\sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$, $\sigma^2 = \frac{\sigma^2_y}{1+\theta_1^2}$	$\lvert r_1 \rvert < 1/2$
$MA(2)$	$\theta_1 = \theta_2 = 0{,}1$, $\sigma^2 = \frac{\sigma^2_y}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$	$r_1 + r_2 > -1/2$, $r_2 - r_1 > -1/2$, $r_1^2 < 4r_2(1-2r_2)$
$ARMA(1,1)$	$\phi_1 = \frac{r_2}{r_1}$, $\theta_1 = \frac{\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2-4}}{2}$	$2r_1^2 - \lvert r_1 \rvert < r_2 < \lvert r_1 \rvert$

$\hat{b} = \frac{1-2r_2+\phi_1^2}{r_1-\phi_1}$, $\sigma^2 = \frac{\sigma^2_{y^*}}{1+\theta_1^2}$, **kde** $\sigma^2_{y^*} = \sum_{t=1}^{n}\frac{(y_t^* - \bar{y}^*)^2}{n}$, $kde\ \ y_t^* = y_t - \phi_1 y_{t-1}$

Odhadové procedury pro konstrukci finálních odhadů v uvažovaných modelech **jsou vysloveně záležitostí metod nasazených v příslušném software. Např. v** $AR(p)$ **modelu zapsanému ve tvaru**

(21) $$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

lze použít klasický OLS-odhad spolu s klasickým OLS-odhadem jeho kovarianční matice, který je za předpokladu stacionarity procesu konzistentní. Lze totiž ukázat, že regresory v (21) splňují podmínku $\underset{T\to\infty}{p\lim}\left(\frac{1}{T}X'X\right) = V$ **, kde *V* je regulární matice a** stejně tak ***i podmínku ortogonality*** $\underset{T\to\infty}{p\lim}\left(\frac{1}{T}X'\varepsilon\right) = 0$**. Z vyjádření stacionárního procesu** $AR(p)$ **ve tvaru lineárního procesu (1) speciálně plyne, že**

(63) $$cov(y_{t-1},\varepsilon_t) = cov(y_{t-2},\varepsilon_t) = .. = cov(y_{t-p},\varepsilon_t) = 0.$$

V případě stacionárního a invertibilního $ARMA\,(p,q)$ modelu (vyjádřeného pro jednoduchost s nulovou střední hodnotou)

(41) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

se nejčastěji používají ***NLLS* –odhady** realizované pomocí některé z ***metod Gauss-Newtonovy třídy***.

Příslušná ***NLLS* –odhadová procedura** zde spočívá v minimalizaci součtu čtverců

(64) $$\min_{\phi_1,\ldots,\phi_p,\theta_1,\ldots,\theta_q} \sum_{t=p+1}^{n} e_t^2(\phi_1,\ldots,\phi_p,\theta_1,\ldots,\theta_q)$$, kde

$$e_t(\phi_1,\ldots,\phi_p,\theta_1,\ldots,\theta_q) = \varepsilon_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \ldots - \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

pro $t = p+1, p+2, \ldots, n$ s vhodně zvolenými hodnotami $e_{p-q+1}, e_{p-q+2}, \ldots, e_p$.

Odhad rozptylu bílého šumu σ_ε^2 se potom obvykle získá tak, že minimální hodnotu **(64)** vydělíme délkou řady ***n***. Za předpokladu normality a při dost velkém ***n*** jsou odhadové výsledky velmi blízké **ML-odhadu** (podmíněnému volbou $e_{p-q+1}, e_{p-q+2}, \ldots, e_p$) získanému maximalizací logaritmované ***věrohodnostní funkce***

(65) $$L^*(\phi_1,\ldots,\theta_q) = -\frac{n-p}{2}\ln(2\pi) - \frac{n-p}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=p+1}^{n} e_t^2(\phi_1,\ldots,\theta_q)$$ [3]

Tabulka: Přibližné hodnoty směrodatných odchylek odhadnutých parametrů ve vybraných stacionárních a invertibilních **modelech Boxovy-Jenkinsovy metodologie:**

$AR(1)$	$\sigma(\phi_1) = \sqrt{\dfrac{1-\phi_1^2}{n}}$	
$AR(2)$	$\sigma(\phi_1) = \sigma(\phi_2) = \sqrt{\dfrac{1-\phi_2^2}{n}}$	
$MA(1)$	$\sigma(\theta_1) = \sigma(\phi_2) = \sqrt{\dfrac{1-\theta_1^2}{n}}$	
$MA(2)$	$\sigma(\phi_1) = \sigma(\theta_2) = \sqrt{\dfrac{1-\theta_2^2}{n}}$	
$ARMA\,(1,1)$	$\sigma(\phi_1) = \sqrt{\dfrac{(1-\phi_1^2)(1+\phi_1\theta_1)^2}{n(\phi_1+\theta_1)^2}}$	$\sigma(\theta_1) = \sqrt{\dfrac{(1-\theta_1^2)(1+\phi_1\theta_1)^2}{n(\phi_1+\theta_1)^2}}$.

[3] Poznámka **výchozí** (nelogaritmovaná) **věrohodnostní funkce má tvar**

$$L(\phi_1,\ldots,\theta_q) = \prod_{t=1}^{n-p} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=p+1}^{n} e_t(\phi_1,\ldots,\theta_q)^2\right\}$$

Diagnostika modelu

Diagnostika modelu je v rámci *Box-Jenkinsovy metodologie* velmi propracovaná. Spočívá v tom, že pomocí různých diagnostických/verifikačních nástrojů ověřujeme adekvátnost sestaveného modelu (tj. prověřujeme, zda je skutečně konformní s analyzovanými daty)**. Přitom obvykle musíme brát v úvahu několik aspektů:**

1. kontrola stacionarity modelu.

Především zde kontrolujeme, zda odhadnutý model skutečně splňuje *podmínku stacionarity*, tj. zda kořeny jeho odhadnutého autoregresního polynomu leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině (resp. zda ekvivalentně jejich převrácené hodnoty, což jsou kořeny autoregresního polynomu zapsaného s opačným uspořádáním mocnin leží uvnitř takovéhoto kruhu). Je také možné řadu rozdělit do několika úseků a testovat shodnost odhadnutých úrovní, rozptylů a autokorelací (popř. momentů vyšších řádů, zejména šikmost mezi jednotlivými úseky).

Jiný postup (tzv. *impuls response*) spočívá v analýze toho, jakou odezvu má v odhadnutém modelu impuls m (většinou standardizovaný na velikost jedno nebo vícenásobek směrodatné odchylky bílého šumu), který nastal v jediném časovém okamžiku nebo opakovaně od daného časového okamžiku a přirozeně určuje následné hodnoty procesu – odhadnutá ARMA struktura se převede do tvaru lineárního procesu (1) a od daného okamžiku se sem dosazuje *inovační proces* s jedinou nenulovou hodnotu v tomto okamžiku nebo *inovační proces* se stále stejnými nenulovými hodnotami od tohoto okamžiku. Je-li analyzovaná řada stacionární, měla by s rostoucí časovou vzdáleností od okamžiku impulsů:

(1) odezva pro jediný impuls postupně odeznít až na nulovou hodnotu

(2) odezva pro opakovaný impuls se stabilizovat na určité (nenulové) **úrovni.**

2. kontrola struktury ARMA procesu

Rozumí se jí především *shoda korelační struktury odhadnuté z dat* (tj. autokorelační a parciální autokorelační funkce) s korelační strukturou vypočtenou z odhadnutého modelu, který ověřujeme. Jiná kontrola struktury modelu souvisí s testováním nekorelovanosti pro vypočtený bílý šum pomocí *Q-testů*. (nazývaných také jako *portmanteau testy*)

3. grafická prohlídka vypočteného bílého šumu

Velmi důležitým diagnostickým nástrojem je vypočtený bílý šum $e_t = \varepsilon_t$ **z odhadnutého modelu řady (analogicky jako rezidua v regresním model). Jeho *grafický průběh*, odhadnutý *korelogram* apod. mohou indikovat případné vady modelu (ve standardní situaci obvykle očekáváme pro vypočtený bílý šum nulovou hodnotu, konstantní rozptyl, nekorelovanost a normalitu).**

4. Testování nekorelovanosti bílého šumu

Používá se např. *Batlettova aproximace* nebo *Q-testy*.

Typy nestacionarity

V podstatě lze rozlišit dva základní typy nestacionarity:

1) Deterministická nestacionarita představovaná deterministickým trendem, např.:

(71) $$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$ **, kde ε_t je bílý šum s rozptylem σ_ε^2**

Po eliminaci tohoto (lineárního) **trendu se řada stane stacionární** (v daném případě ve formě bílého šumu)**.**

2) Stochastická nestacionarita představovaná určitým typem stochastického procesu pro y_t nebo ε_t, např. $AR(1)$:

(72) $$y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t$$ **, kde ε_t je** opět **bílý šum s rozptylem σ_ε^2, kde se obvykle předpokládá, že $\varepsilon_t \approx i.i.d.$ Nestacionaritu (72) lze** v jistých případech modelovat pomocí speciálních stochastických modelů a s využitím těchto modelů **následně stacionarizovat. Konkrétně model (72) je tzv. *náhodná procházka s driftem* [random walk with drift]. Příslušnou časovou řadu lze v tomto případě jednoduše stacionarizovat přechodem k řadě prvních diferencí Δy_t, protože dle modelu (71) je**

(73) $$\Delta y_t = \alpha + \varepsilon_t$$ **, tzn. jedná se o bílý šum posunutý na úroveň α**, což je evidentně stacionární řada. **Podstata stochastické nestacionarity modelu (72) je ale lépe viditelná při jeho přepisu do tvaru**

(74) $$y_t = y_1 + \alpha(t-1) + \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau \, .$$

Řada má tedy nejen deterministický trend (zde lineární se sklonem α)**, ale také stochastický trend spočívající v postupné kumulaci hodnot bílého šumu.**

Interpretačně zajímavé jsou také podmíněné hodnoty:

(75) $$E(\Delta y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_1) = \alpha$$

(76) $$E(y_t|y_1) = y_1 + \alpha(t-1), \quad var(y_t|y_1) = \sigma^2(t-1), \quad corr(y_{t-k}, y_t|y_1) = \frac{t-k-1}{t-1} :$$

ověření: $$E(y_t|y_1) = E\left(y_1 + \alpha(t-1) + \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau | y_1\right) = y_1 + \alpha(t-1) + \sum_{\tau=2}^{t} (E\varepsilon_\tau = 0) = y_1 + \alpha(t-1)$$

$$var(y_t|y_1) = var\left(y_1 + \alpha(t-1) + \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau | y_1\right) = var\left(\sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau | y_1\right) = \sum_{\tau=2}^{t} (var\, \varepsilon_\tau | y_1) = \sigma_\varepsilon^2 (t-1)$$

$$corr(y_{t-k}, y_t|y_1) = corr\left(y_1 + \alpha(t-k-1) + \sum_{\tau=2}^{t-k} \varepsilon_\tau | y_1, y_1 + \alpha(t-1) + \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau | y_1\right) =$$

$$= \frac{cov\left(\left(\sum_{\tau=2}^{t-k} \varepsilon_\tau | y_1\right)\left(\sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau | y_1\right)\right)}{\sigma_y^2} = \frac{(t-k-1)\sigma_\varepsilon^2}{(t-1)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{t-k-1}{t-1} \qquad \square \, .$$

Ze vztahu **(75)** je vidět, že **řada má tendenci nevracet se k předchozí úrovni, ale** v průměru **směřovat k vyšším hodnotám pro $\alpha > 0$ nebo k nižším hodnotám pro $\alpha < 0$. I kdyby platilo $\alpha = 0$, pak tato náhodná procházka bez driftu protne na rozdíl od bílého šumu vodorovnou osu s nulovou úrovní jen zřídka.** Ze vztahů (76) zase vyplývá, že **střední hodnota a rozptyl** (volatilita) **této řady jsou neomezené, zatímco autokorelační funkce má hodnoty velmi blízké jedné a k nule klesá tempem pomalejším než lineárním.**

Poznámka 1 Uvažujme poněkud obecnější zápis vztahu (72)

(72*) $$y_t = \alpha + \phi_1 . y_{t-1} + \varepsilon_t \, .$$

Je patrné, že (72*) je speciální zápis (72*) při $\phi_1 = 1$. Je-li $\phi_1 < 1$,pak se zřejmě jedná o stacionární proces $AR(1)$ s nenulovou střední hodnotou $\mu = \dfrac{\alpha}{1-\phi_1}$

(77) $$y_t - \mu = \phi_1 . (y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \, .$$, který lze také přepsat pomocí prvních diferencí jako

(78) $$\Delta y_t = (\phi_1 - 1)(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \, .$$

Pro podmíněnou střední hodnotu (75) stacionárního procesu $AR(1)$ tedy zřejmě platí:

(79A) $$E(\Delta y_t | y_{t-1}, \ldots, y_1) < 0 \ pro \ y_{t-1} > \mu ,$$

(79B) $$E(\Delta y_t | y_{t-1}, \ldots, y_1) > 0 \ pro \ y_{t-1} < \mu$$, tzn. na rozdíl od *náhodné procházky s driftem* má nyní proces tendenci nedriftovat a vracet se k předchozí úrovni [tzv. mean reverting] . Konečně zbývající případ $|\phi_1| > 1$ je již velmi neobvyklý a specifický, minimálně se vyskytující v reálných situacích: v tomto případě se jedná o *explozívní proces* [tzv. explosive process], který roste s mocninami ϕ_1^k - např. proces $y_t = 3 y_{t-1} + \varepsilon_t$ začne být od určitého času t srovnatelný s deterministickou posloupností 3^t bez ohledu na tvar bílého šumu ε_t.

Poznámka 2 Pro předchozí modely ještě jednou odlišnost jejich stacionarizace:

V modelu (71) $y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$ s deterministickým trendem pro dosažení stacionarity stačí pomocí regrese eliminovat trend. Diferencování by se zde pro stacionarizaci nemělo používat, neboť vede k modelům s reziduální složkou ve tvaru (neinvertibilního) MA-procesu

(80) $$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

V modelu (72) $y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t$ náhodné procházky s driftem stačí pro dosažení stacionarity jednou diferencovat. Pokud jde o případnou regresní eliminaci stochastického trendu, není zde jasné, co vlastně eliminovat. Mohli bychom sice přejít k ještě obecnějšímu rozšíření modelu (77) do tvaru

(77*A) $y_t = \alpha + \beta t + \phi_1 . y_{t-1} + \varepsilon_t$. nebo $\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\phi_1 - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$

s deterministickým i stochastickým trendem, ale zde by případná eliminace trendu pomocí regrese narazila na již zmíněný problém, že t-poměr nemusí mít (ani asymptoticky) t-rozdělení Model (77*) ze také zapsat ve tvaru

$$y_t - \beta_0 + \beta_1 t = \phi_1 . (y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 (t-1)) + \varepsilon_t$$, kde $\beta_1 = \dfrac{\beta}{1-\phi_1}$, $\beta_0 = \dfrac{\alpha - \phi_1 \beta_1}{1-\phi_1}$,

tzn., že speciálně při $|\phi_1| < 1$ se vlastně jedná o stacionární AR(1) proces s lineárním trendem.

Testy na jednotkový kořen [unit root tests]

Možnost stacionarizace časové řady pomocí diferencování svědčí o přítomnosti (přibližně) jednotkového kořene v autoregresním operátoru příslušného modelu. Např. v modelu (72) má autoregresní operátor zřejmě jako svůj jediný kořen právě kořen rovný 1. Rozhodnutím o přítomnosti takovéhoto jednotkového kořene (nebo vícenásobného) je často klíčovým bodem analýzy. Na přítomnost jednotkového kořene by asi bylo možné soudit z tvaru odhadnutého korelogramu, kdy indikací jeho přítomnosti je velmi pomalý pokles korelogramu od jednotkové hodnoty k nule (jednotlivé odhadnuté autokorelace s rostoucí délkou řady konvergují v nestacionárním modelu k jedné). Protože ale subjektivním pohledem na korelogram by se nedaly odlišit nestacionární modely typu $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ od stacionárních s téměř jednotkovým kořenem $y_t = 0{,}96\, y_{t-1} + \varepsilon_t$, je žádoucí použít vyvinuté statistické testy na příslušné hladině významnosti.

Dickey-Fullerův test

Dickey-Fullerův test **byl prvním z testů vyvinutých pro testování jednotkového kořen.** Přitom **byly navrženy tři jeho verze označované souhrnně jako τ -testy.**

(1) τ -test tvaru $H_0 : y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ proti alternativě $H_1 : y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ pro $\phi_1 < 1$, tzn. ***jednostranný test náhodné procházky proti stacionárnímu*** $AR(1)$ ***procesu,*** **neboť případná nestacionarita při $\phi_1 \le -1$ je v realitě málo významná.**

(2) τ -test tvaru $H_0 : y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ proti alternativě $H_1 : y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ pro $\phi_1 < 1$,tzn. ***jednostranný test náhodné procházky proti*** $AR(1)$ ***procesu s nenulovou*** **hladinou.**

(3) τ -test tvaru $H_0 : y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ proti alternativě $H_1 : y_t = \alpha + \beta t + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ pro $\phi_1 < 1$, tzn. ***jednostranný test náhodné procházky proti*** $AR(1)$ ***procesu s lineárním trendem.***

Zápis nulové hypotézy je pro všechny tři vyšetřované případy tentýž, tzn.:

(81) $$H_0 : \Delta y_t = \psi\, y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{při } \psi = 0 ,$$

zatímco obecný zápis alternativy je

(82) $$H_1 : \Delta y_t = \alpha + \beta t + \psi\, y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{při } \psi < 0 ,$$

kde $\psi = \varphi_1 - 1$ a

(1) $\alpha = \beta = 0$

(2) $\beta = 0$

Přitom v případě alternativ (2) nebo (3) jde jen o to, zda $\psi < 0$ a vůbec nás nezajímá případná významnost úrovňové konstanty α ani parametru sklonu β, tím spíše ne jejich číselné hodnoty, které by při výskytu ***nestacionarity*** **stejně nemusely být korektně spočteny.**

Testovou statistikou je ve všech třech variantách *Dickey-Fullerova testu* klasický *t-poměr* (prostě se testuje významnost regresního parametru ψ v modelu (81) tzn. $DF = \frac{\hat{\psi}}{\hat{\sigma}(\hat{\psi})}$, kde odhady parametrů získáme metodami získanými dříve a s kritickým oborem

$$DF \leq t_{1-\alpha}^{*}(n) .$$

Zde však (za platnosti nulové hypotézy stacionarity) statistika DF nemá (a to ani asymptoticky a ani při platnosti $\varepsilon_t \approx i.i.d.$) t-rozdělení jako v případě klasického t.-poměru, ale má nestandardní (a nepojmenované) rozdělení, pro které bylo nutné kritické hodnoty naprogramovat simulačně a zvlášť pro jednotlivé typy alternativ (1),(2),(3) a pro různé délky řad n. viz tabulka níže.

Obecně zde platí, že dané rozdělené má tlustší konce než příslušné *t-rozdělení*, takže jeho kritické hodnoty jsou v absolutní hodnotě více než dvojnásobně v porovnání s odpovídajícími hodnotami t-rozdělení.

Např. 5% kritická hodnota a při $n \to \infty$ je kritická hodnota -3,41 v absolutní hodnotě více než 2x větší než adekvátní kritická hodnota -1,645 po klasický t-test), tj. pro zamítnutí nulové hypotézy $\psi = 0$ proto potřebujeme významnější hodnotu t-poměru (pracujeme totiž s nestacionárním regresorem). Kritické hodnoty uvedli poprvé již *Dickey* a *Fuller*, většina software ale využívá sofistikovanější výpočet odpovídajících p-hodnot podle McKinnona [1996].

hladina významnosti	10%=0,1	5%=0,05	1%=0,01
kritické hodnoty pro τ -test	-1,62	-1,95	-2,58
kritické hodnoty pro τ_{μ} -test	-2,57	-2,86	-3,43
kritické hodnoty pro τ_{τ} -test	-3,12	-3,41	-3,96

Rozšířený Dickey-Fullerův test

Předchozí test je aplikovatelná jen tehdy, jestliže reziduální složka představuje nezávislý bílý šum. Jestliže závisle proměnná Δy_t obsahuje autokorelovanost, která není v modelu – řádně zohledněna, potom má *DF-test* chybu prvního druhu (tj.pravděpodobnost zamítnutí H_0) větší než deklarované α . Pro takový případ byl navržen Rozšířený Dickey-Fullerův test (ADF-test) [augmented DF-test], který místo (81) formuluje nulovou hypotézu jako

(83) $$H_0 : \Delta y_t = \psi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{pro} \quad \psi = 0 ,$$

Přičemž testová statistika a kritické hodnoty pro jednotlivé varianty (1),(2),(3) tj. po τ -test, τ_{μ} -test, τ_{τ} -test zůstávají stejné jako před rozšířením (test se opět týká jen parametru ψ , přidané autoregresní členy v jen absorbují dynamickou strukturu obsaženou v závisle proměnné. Pro stanovení řádu p přidaných autoregresních členů se doporučuje aplikovat informační kritéria uvedená výše.

Phillipsův-Perronův test

PF_test je podobný ADF –testu s tou odlišností, že zohlednění případné neuatokorelovanosti reziduí se neprovádí rozšířením o autoregresní člen jako tam, ale přímo korekcí odhadnuté směrodatné odchylky ve jmenovateli původního *DF-testu*. V podstatě se jedná o aplikaci *Newey-Westova odhadu* typu HAC (typu *heteroskedstasticity and autocorrelation consistent estimator*), jako v případě autoregresního modelu s autokorelovanými reziduy.

KPSS-test [Kwaitkovski, Phillips, Schmidt, Shin [1992]

Tento test reaguje na skutečnost, že *DF-test* někdy mívá slabou rozlišovací schopnost. Má-li teoretický model tvar $y_t = 0{,}96\, y_{t-1} + \varepsilon_t$, pak by nulová hypotéza jednotkového kořene měla být zamítnuta. Nelze-li ji zamítnout, pak to korektně znamená, že buď opravdu platí nestacionarita nebo že máme k zamítnutí jen nepostačující informaci (např. jen krátký úsek řady $y_t = 0{,}96\, y_{t-1} + \varepsilon_t$). *KPSS-test* byl proto navržen tak, že hypotézy H_0, H_1 mají tvar přesně opačný, než jak je tomu u *ADF-testu* (jako nulová se testuje stacionarita vůči alternativní hypotéze nestacionarity). Přitom se doporučuje provádět *ADF-test* a *KPSS-test* vždy simultánně a za směrodatný brát pouze takový výstup, kdy

(a) $_{ADF}H_0$ se zamítá a současně $_{KPSS}H_0$ zamítnout nelze (v tom případě je potvrzena stacionarita)

(b) $_{ADF}H_0$ nelze zamítnout a současně $_{KPSS}H_0$ se zamítá (v tom případě je potvrzena nestacionarita). Zbývající dvě kombinace výsledků se berou jako neprůkazné. Uvedené testy na jednotkový kořen (včetně dalších bývají součástí moderních softwarových testovacích systémů.

Proces ARIMA

Pro časové řady se stochastickým trendem typu (72) , které lze stacionarizovat diferencováním, jsou v rámci Box-Jenkinsovy metodologie určeny procesy ARIMA.

Integrovaný smíšený proces řádu p, d, f značený jako $ARIMA\,(p, d, q)$ [integrated] má tvar

(84) $$\phi(B)\, w_t = \alpha + \vartheta(B)\varepsilon_t .$$

(84A) $$w_t = \Delta\, y_t .$$

je d-tá diference časové řady y_t. a tento proces je stacionární (i invertibilní) model $ARIMA\,(p, q)$. Jiným i slovy: V takovém modelu ARIMA se nejprve provede stacionarizace pomocí vhodné diference modelované řady a takto vzniklá již stacionární řada se modeluje pomocí smíšeného modelu ARMA. Nezřídka se ovšem pro $ARIMA\,(p, d, q)$ volí souhrnný zápis tvaru

(85) $$\phi(B)\,\Delta\, y_t . = \alpha + \vartheta(B)\varepsilon_t .$$

Speciálním případem je integrovaný *I(d)* proces zapisovaný obvykle v jednoduchém tvaru $\Delta y_t = \varepsilon_t$, který vlastně vzniká načítáním bílého šumu /odtud „integrovaný") např. pro $d = 1$ je

(86)
$$y_t = y_1 + \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau$$

Poznámka3: Tzv. ***driftový parametr*** α modeluje případnou nenulovou úroveň procesu w_t tj. deterministický trend ve tvaru polynomu d-tého řádu pro původní řadu y_t. Pro $\alpha = 0$ a $d > 0$ je model ARIMA pro řadu y_t invariantní vůči případnému posunu řady o libovolnou konstantu. Proto je v tomto případě zbytečné řadu modelovanou jako ARIMA nejprve centrovat odečtením výběrového průměru.

Poznámka4: Operátor $\phi(B)\Delta$ na levé straně (85) se někdy nazývá ***zobecněný autoregresní operátor***. Je pro něj charakteristické to, že odpovídající polynom $\phi(z)\Delta$ má p kořenů ležících vně jednotkového kruhu v komplexní rovině a navíc d-násobný jednotkový kořen. Obecnějším typem jsou modely ARUMA , které mají aspoň jeden z těchto kořenů na jednotkové kružnici , ale různý od jednotkového kořene, a explozivní modely , které mají aspoň jeden z těchto kořenů uvnitř jednotkového kruhu.

Konstrukce modelu $ARIMA\ (p,d,q)$ je založena na tvorbě stacionárního modelu $ARMA\ (p,q)$ pro příslušně diferencovanou časovou řadu (přitom ale nesmíme opomenout případnou počáteční transformaci řady za účelem její linearizace, která se provádí ještě před diferencováním). Řád diferencování d přitom v realitě obvykle nepřekročí dvojku (rutinní časové řady ekonomického a finančního charakteru obvykle mívají $d = 1$ a speciálně řady spotřebitelských indexů či nominálních mezd mohou někdy mít $d = 2$. Možností, jak stanovit řád diferencování d pro analyzovanou řadu, jsou zejména:

- *testy na jednotkový kořen*
- *subjektivní prohlídka řad $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$ a jejich odhadnutých korelogramů a parciálních korelogramů* – speciálně pomalý (lineární) pokles odhadnutých autokorelací je indikací pro další diferencování řady
- *porovnání výběrových směrodatných odchylek* (*volatilit*) řad $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
- volí se ten řád diferencování, který odpovídá případu s nejmenší *volatilitou*; při vyšších hodnotách se však volatility mohou začít s navyšováním d d růst a mluví se pak o tzv. *prediferencování*.
- - aplikace *informačních kritérií* modifikovaných pro modely $ARIMA$.