Lineární proces [linear process]

Teoretickým základem modelů tzv.*Boxovy-Jenkinsovy metodologie* je *lineární proces*, který je definován jako

(1) $y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \ldots)\varepsilon_t = \psi(B).\varepsilon_t$,

kde $\{\varepsilon_t\}$ je tzv. bílý šum [white noise] [= *posloupnost nekorelovaných, stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konstantním konečným rozptylem* $\sigma^2 > 0$] a B je operátor časového posunu.

Dále se předpokládá, že mocninná řada $\psi(z)$ proměnné z konverguje pro $|z| \leq 1$ (tj. uvnitř a na jednotkovém kruhu v komplexní rovině).

Za tohoto předpokladu lze ukázat, že nekonečné řady náhodných veličin (1) pro jednotlivá *t konvergují podle kvadratického středu*[1], přičemž limitní hodnoty $\{y_t\}$ tvoří stacionární posloupnost s nulovou střední hodnotou $E(y_t) = 0$

Jiné vyjádření lineárního procesu (1), které je užitečné např. při konstrukci předpovědí, je možné v případě, že tento *proces je invertibilní* a lze ho zapsat jako

(2) $$y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \pi_3 y_{t-3} \ldots + \varepsilon_t$$ neboli

(2A) $$\varepsilon_t = y_t - \pi_1 y_{t-1} - \pi_2 y_{t-2} - \pi_3 y_{t-3} - \ldots = \pi(B).y_t,$$

Přitom *postačující podmínkou invertibility* je předpoklad analogický předpokladu (2), že

(3) mocninná řada $\pi(z)$ konverguje pro $|z| \leq 1$, tj. uvnitř a na jednotkovém kruhu v komplexní rovině.

Poznámka1 Existuje řada důvodů, proč modely postavené na principu lineárního procesu jsou vhodné pro modelování reality. Nechť pro stacionární proces $\{y_t\}$ s nulovou střední hodnotou předpovídáme hodnotu $\{y_t\}$ na základě znalosti minulých hodnot $Y_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\}$. Optimální předpovědí ve smyslu minimální chyby *MSE* je pak $E(y_{t-1} | Y_{t-1})$, přičemž chyba této předpovědi je

(4) $$e_t = y_t - E(y_t | Y_{t-1})$$

Má vlastnosti bílého šumu a označuje se jako inovace [innovation]. Označení je vcelku logické, protože inovační proces $\{e_t\}$ odpovídá nepredikovatelnému pohybu v hodnotách $\{y_t\}$. Jestliže je navíc proces $\{y_t\}$ normálně rozdělen, pak podmíněná střední hodnota $E(y_t | Y_{t-1})$ má tvar lineární kombinace hodnot $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\}$ a vztah (4) můžeme přepsat jako

(5) $$e_t = y_t - \pi_1 y_{t-1} - \pi_2 y_{t-2} - \ldots,$$

což je právě invertovaný tvar (2) lineárního procesu.

[1] Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_t\}$ konverguje k n.v. X podle středu (je cauchyovská podle středu), jestliže $\lim_{t\to\infty} E|X_t - X| = 0$, resp. $\lim_{s,t\to\infty} E|X_t - X_s| = 0$

Poznámka2 Protože platí $\varepsilon_t = \pi(B).y_t = \pi(B).\psi(B)\varepsilon_t$, musí zřejmě platit

(6) $$\pi(B).\psi(B) = 1$$

(6A) $\psi_1 - \pi_1 = 0$, $\psi_2 - \psi_1\pi_1 - \pi_2 = 0$, $\psi_3 - \psi_2\pi_1 - \psi_1\pi_2 - \pi_3 = 0$ atd.

Tyto vztahy lze použít pro převod parametrů ψ_j na parametry π_j a naopak. Formálně lze také uplatnit zápis

(7) $$\pi(B) = \psi(B)^{-1}.$$

Proces klouzavých součtů MA [moving average process][2]

Proces klouzavých součtů řádu q se značí $MA(q)$ má tvar

(11) $$y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + ... + \theta_q\varepsilon_{t-q} = \theta(B).\varepsilon_t$$

kde $\theta_1,\theta_2,...,\theta_q$ jsou parametry a $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + ... + \theta_q B^q$ je tzv. *operátor klouzavých součtů*. Proces $MA(q)$ tedy zřejmě vzniká useknutím lineárního procesu (1) v bodě, který odpovídá zpoždění q.

Proces $MA(q)$ je vždy stacionární, má nulovou střední hodnotu a rozptyl velikosti

(12) $$\sigma_y^2 = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2\right)\sigma^2$$ a má

autokorelační funkci

(13) $$\rho_k = \frac{\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + ... + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2}$$ pro $k = 1,2,...,q$

$$\rho_k = 0$$ pro $k > q$

Autokorelační funkce má tedy bod useknutí k_0 roven řádu modelu q.

ověření:

$$\rho_1 = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t}\sigma^2_{y_{t-1}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)}} =$$

$$\frac{cov(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \theta_1 cov(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + \theta_1 var(\varepsilon_{t-1}) + \theta_1^2 cov(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\theta_1^2)^2}} = \frac{\theta_1\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta_1^2\right)} = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

Parciální autokorelační funkce ρ_{kk} procesu $MA(q)$ nemá bod useknutí, ale je omezena lineární kombinací geometricky klesajících posloupností a sinusoid s geometricky klesajícími amplitudami.

Proces $MA(q)$ je invertibilní, jestliže všechny kořeny $z_1, z_2,..., z_q$ polynomu $\theta(z)$ leží *vně* jednotkového kruhu v komplexní rovině (tj. $|z_1| > 1, |z_2| > 1,..., |z_q| > 1$), neboť potom je splněn předpoklad (3).

---

[2] MA proces nemá žádnou přímou souvislost s dříve popsanou *metodou klouzavých průměrů* užívanou pro eliminaci trendu časové řady.

Proces $MA(1)$ - proces klouzavých součtů 1. řádu

(14) $$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

má *autokorelační funkci*

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}\,,\quad \rho_k = 0 \quad \text{pro } k > 1$$

s bodem useknutí $k_0 = 1$ **.**

ověření: **vyjdeme z definice (6)**

$$\rho_1 = \frac{\gamma_k}{\sigma_y^2} = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{var\, y_t}\sqrt{var\, y_{t-1}}} = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sigma_y \cdot \sigma_{y-1}}$$ **a vypočítáme**

$$\rho_1 = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t} \cdot \sigma^2_{y_{t-1}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)}} =$$

$$\frac{cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + \theta_1 cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + \theta_1 var(\varepsilon_{t-1}) + \theta_1^2 cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4 (1+\theta_1^2)^2}} = \frac{\theta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)} = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

protože ze čtyř členů v čitateli je jen jeden nenulový a dále platí

$$var\, y_t = var\, y_{t-1} = \sigma_{\varepsilon_t}^2 + \theta_1^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_{t-1}}^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)$$

(Při odvozování respektujeme pravidlo nekorelovanosti náhodných složek $\varepsilon_t, \varepsilon_s$ pro $t \neq s$.)

$$\rho_k = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t} \cdot \sigma^2_{y_{t-k}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)}} =$$

$$\frac{cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) + \theta_1 cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k}) + \theta_1 cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k-1}) + \theta_1^2 cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k-1})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4 (1+\theta_1^2)^2}} = 0$$

protože při $k \geq 2$ **se ve jmenovateli neobjeví žádné dvě složky** $\varepsilon_s, \varepsilon_t$ **se stejným indexem.** □ **.**

Jeho *parciální autokorelační funkce* ρ_{kk} **má tvar** (bez bodu useknutí)**:**

(15) $$\rho_{kk} = \frac{(-1)^k \theta_1^k (1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2k+2}} \quad \text{pro } k = 1,2,3,\ldots$$

Takže je v *případě invertibility* procesu *opravdu* **neomezená geometricky klesající posloupnost**

(16) $$|\rho_{kk}| = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

***Podmínka invertibility* zde má totiž velmi jednoduchý tvar** $|\theta_1| < 1$ **. Protože**

$\rho_1 = \dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$**, musí pro invertibilní** $MA(1)$ **proces být** $|\rho_1| = \left| \dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \right| < 0{,}5$ **. Tato**

nerovnost platí dokonce pro všechna $|\theta_1| \neq 1$ **.**

Proces $MA(2)$ - proces klouzavých součtů 2. řádu

(17) $$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

má *autokorelační funkci*

(18) $$\rho_k = \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \quad pro \quad k = 1$$
$$= \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \quad pro \quad k = 2$$
$$= 0 \quad pro \quad k > 2$$

s bodem useknutí $k_0 = 2$.

ověření:

$$\rho_1 = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t}.\sigma^2_{y_{t-1}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \vartheta_1\varepsilon_{t-1} + \vartheta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1} + \vartheta_1\varepsilon_{t-2} + \vartheta_2\varepsilon_{t-3})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2).\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2).}} =$$
$$\frac{\theta_1 cov(\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-1}) + \vartheta_1\theta_2 cov(\varepsilon_{t-2},\varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)^2}} = \frac{\theta_1\sigma_\varepsilon^2 + \vartheta_1.\theta_2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)} = \frac{\theta_1 + \vartheta_1.\theta_2}{(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)}$$

$$\rho_2 = \frac{cov(y_t, y_{t-2})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t}.\sigma^2_{y_{t-2}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \vartheta_1\varepsilon_{t-1} + \vartheta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2} + \vartheta_1\varepsilon_{t-3} + \vartheta_2\varepsilon_{t-4})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2).}} =$$
$$\frac{\theta_2 cov(\varepsilon_{t-2},\varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)^2}} = \frac{\theta_2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2(1+\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)} = \frac{\theta_2}{1+\vartheta_1^2}.$$

$$\rho_k = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t}.\sigma^2_{y_{t-k}}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k} + \theta_1\varepsilon_{t-k-1} + \theta_2\varepsilon_{t-k-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2).}} =$$
$$\frac{0}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\theta_1^2)^2}} = 0$$

protože při $k \geq 3$ se ve jmenovateli neobjeví žádné dvě složky $\varepsilon_s, \varepsilon_t$ se stejným indexem.

Při odvozování respektujeme pravidlo nekorelovanosti náhodných složek $\varepsilon_t, \varepsilon_s$ pro $t \neq s$. □.

Podmínka *invertibility* (2) má pro proces $MA(2)$ tvar

(19) $$\theta_1 + \theta_2 > -1, \quad \theta_2 - \theta_1 > -1, \quad -1 < \theta_2 < 1,$$

takže *oblast invertibility procesu* $MA(2)$ v rovině s vodorovnou osou pro hodnoty θ_1 a se svislou osou pro hodnoty θ_2 vyplní vnitřek trojúhelníka s vrcholy $(-2,1)$, $(0,-1)$ a $(2,1)$.

Autoregresní proces AR [autoregressive process]

Autoregresní proces řádu p se značí $AR(p)$ má tvar

(21) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t = \phi(B).y_t + \varepsilon_t$$ neboli

(21A) $$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots + \phi_p y_{t-p} = \phi(B).y_t = \varepsilon_t$$, kde

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ jsou parametry a $\phi(B) = 1 - \phi_1 B + \dots - \phi_p B^p$ je tzv. *autoregresní operátor*.
Proces $AR(p)$ zřejmě vzniká useknutím lineárního procesu v bodě, který odpovídá velikosti zpoždění p.

Proces $AR(p)$ je stacionární, jestliže všechny kořeny $z_1, z_2, \dots, z_p$ polynomu $\phi(z)$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině (tj. pro všechna $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_p| > 1$ **), protože pak je splněn předpoklad (3). Proces má v tom případě nulovou střední hodnotu a jeho rozptyl je roven**

(22) $$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \dots - \phi_p\rho_p} .$$

ověření: Definiční vyjádření procesu (21) vynásobíme y_t, a uplatníme střední hodnotu:

$$y_t.y_t = \phi_1 y_t.y_{t-1} + \phi_2 y_t.y_{t-2} + \dots + \phi_p y_t.y_{t-p} + y_t.\varepsilon_t$$

(23) $$Ey_t.y_t = \phi_1 Ey_t.y_{t-1} + \phi_2 Ey_t.y_{t-2} + \dots + \phi_p Ey_t.y_{t-p} + Ey_t.\varepsilon_t .$$

Vztah (23) podělíme rozptylem veličiny y_t. Dostaneme:

$$\frac{E(y_t^2)}{\sigma_y^2} = \phi_1 \frac{Ey_t.y_{t-1}}{\sigma_y^2} + \phi_2 \frac{Ey_t.y_{t-2}}{\sigma_y^2} + \dots + \phi_p \frac{Ey_t.y_{t-p}}{\sigma_y^2} + \frac{Ey_t.\varepsilon_t}{\sigma_y^2} .$$

Zřejmě máme $E(y_t^2) = \sigma_y^2$ a $\frac{E(y_t.y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \rho_k$, takže dostaneme

$$1 = \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 + \dots + \phi_p\rho_p + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$, resp. $$1 - \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 + \dots + \phi_p\rho_p = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$, a po vynásobení obou stran strany rozptylem y_t

$$\sigma_y^2.(1 - \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 + \dots + \phi_p\rho_p) = \sigma_\varepsilon^2$$, z čehož plyne (22) . □ .

a jeho *autokorelační funkce* splňuje diferenční rovnici

(24) $$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \dots + \phi_p\rho_{k-p}$$ pro $k > 0$.

Poznámka Pro odvození (24) stačí vynásobit všechny členy rovnosti (21) výrazem y_{t-k}/σ_y^2 a přejít ke středním hodnotám, přičemž vzhledem k možnosti vyjádření stacionárního $AR(p)$ procesu jako lineárního procesu (1), je $E(y_{t-k}.\varepsilon_t) = 0$ pro $k > 0$:

(21) $$\frac{y_t y_{t-k}}{\sigma_y^2} = \frac{\phi_1 y_{t-1} y_{t-k} + \phi_2 y_{t-2} y_{t-k} + \dots + \phi_p y_{t-p} y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k}}{\sigma_y^2}$$ a dále

$$\frac{E(y_t y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \frac{\phi_1 E(y_{t-1} y_{t-k}) + \phi_2 E(y_{t-2} y_{t-k}) + \dots + \phi_p E(y_{t-p} y_{t-k}) + \varepsilon_t y_{t-k}}{\sigma_y^2}$$, takže

$$\rho_k = \frac{E(y_t y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \phi_1 \frac{E(y_{t-1} y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \phi_2 \frac{E(y_{t-2} y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \dots + \phi_p \frac{E(y_{t-p} y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \frac{E(\varepsilon_t y_{t-k})}{\sigma_y^2}$$

Neboli $$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} + 0$$ □ .

Z teorie diferenčních rovnic přitom plyne, že její řešení (24) lze vyjádřit ve tvaru

(25) $$\rho_k = \alpha_1 z_1^{-k} + \alpha_2 z_2^{-k} + \dots + \alpha_p z_p^{-k}$$ pro $k \geq 0$, kde

$z_1, z_2, \dots, z_p$ jsou navzájem různé kořeny polynomu $\phi(z)$ s vlastnostmi

$|z_1|, |z_2|, \dots, |z_p| > 1$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ jsou pevné koeficienty:

a) Pokud jsou kořeny z_i, z_j *komplexně sdružené*, pak mohou být nahrazeny jediným členem tvaru $\alpha . d^k . \sin(\lambda k + \phi)$ s $0 < d < 1$.

b) Pokud kořeny z_i, z_j *nejsou navzájem různé*, tzn. některý z nich je násobný, pak se pro kořen z_i s násobností *r* ve vyjádření objeví složitější člen typu $(\beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \dots \beta_r k^{r-1}) z_i^{-k}$, který je však výrazně překrýván průběhem členu z_i^{-k} . Tak či onak, je ***autokorelační funkce procesu*** $AR(p)$ v podstatě lineární kombinací *klesajících geometrických posloupností* a *sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami*.

soustava Yule-Walkerových rovnic

Jestliže zapíšeme výraz (23) jen pro $k = 1, 2, \dots, p$, pak dostaneme tzv. soustavu Yuleových-Walkerových rovnic pro vyjádření parametrů $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ pomocí autokorelací $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ (a naopak).

(26) $$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\dots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{aligned}$$.

Parciální autokorelační funkce ρ_{kk} procesu $AR(p)$ má bod useknutí k_0 rovný řádu modelu p . To plyne přímo z definice parciální autokorelační funkce, což činí z této funkce důležitý nástroj pro identifikaci autoregresních procesů.

Proces $AR(p)$ ***je vždy invertibilní.*** Je to zřejmé, neboť (23) je již zápis tohoto modelu v invertovaném tvaru.

Proces $AR(1)$ - autoregresní proces 1. řádu

(27) $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ **je stacionární pro** $|\phi_1| < 1$

V tomto případě má nulovou střední hodnotu a rozptyl procesu $AR(1)$ **je roven**

(28) $$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2} .$$

Jeho *autokorelační funkce* má tvar

(29) $\rho_k = \phi_1^k$ **pro** $k = 0,1,2,3,\ldots$

ve tvaru geometricky klesající posloupnosti (oscilující pro záporné ϕ_1 **a bez bodu useknutí) . Speciálně je pro** $k = 1$

(30) $\rho_1 = \phi_1$ **, což znamená, že**

$\rho_1 = \phi_1$ **první autokorelace procesu** $AR(1)$ **se rovná** právě **jeho autoregresnímu parametru. Proto důležitou roli v modelu hraje znaménko parametru** ϕ_1**.**

a) Pokud platí $\phi_1 > 0$ (pozitivní autokorelovanost), **pak je patrná setrvačnost ve znaménkách sousedních hodnot (s relativn ě malým překřížením časové osy)**

b) Pokud platí $\phi_1 < 0$ (negativní autokorelovanost), **pak to signalizuje relativně velmi časté přechody hodnot přes časovou osu, a velmi časté změny ve znaménkách sousedních hodnot časové řady.**

Parciální autokorelační funkce procesu $AR(1)$ **má tvar**

(31) $\rho_{11} = \phi_1$ **,** $\rho_{kk} = 0$ **pro** $k > 1$

s bodem useknutí $k_0 = 1$ **.**

Proces $AR(2)$ - autoregresní proces 2.řádu

(32) $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ **je stacionární pro**

(32A) $\phi_1 + \phi_2 < 1$ **,** $\phi_2 - \phi_1 < 1$ $-1 < \phi_2 < 1$ **,**

takže příslušná oblast stacionarity $AR(2)$ **v rovině s vodorovnou osou pro hodnoty** ϕ_1 **a svislou osou pro hodnoty** ϕ_2 **vyplní vnitřek trojúhelníka v vrcholy**

s vodorovnou osou pro hodnoty θ_1 **a se svislou osou pro hodnoty** θ_2 **vyplní vnitřek trojúhelníka s vrcholy** $(-2,-1)$, $(0,1)$ **a** $(2,-1)$**. V tom případě má proces** $AR(2)$ **nulovou střední hodnotu a rozptyl roven**

(33) $$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2} .$$

a jeho autokorelační funkce má tvar

$$\rho_k = \frac{z_1^{-1}\left(1-z_2^{-2}\right)z_1^{-k} - z_2^{-1}\left(1-z_1^{-2}\right)z_2^{-k}}{\left(z_1^{-1}-z_2^{-1}\right)\left(1+z_1^{-1}z_2^{-1}\right)}$$ **pro** $k \geq 0$ **, kde**

z_1, z_2 jsou navzájem různé kořeny polynomu $\phi(z)$ ($|z_1|,|z_2| > 1$; pro dvojnásobný kořen je tvar funkce analogický), ρ_k nemá bod useknutí a má tvar lineární kombinace dvou geometricky klesajících posloupností nebo tvar sinusoidy s geometricky klesající amplitudou.

Parciální autokorelační funkce procesu $AR(2)$ má bod useknutí roven $k_0 = 2$.

Smíšený proces ARMA [autoregressive and moving averages process]

Smíšený proces řádu p a q značený jako $ARMA\ (p,q)$ má tvar:

(41) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$ neboli

(41A) $$\phi(B) y_t = \theta(B)\varepsilon_t,$$

kde operátory $\phi(B)$ a $\theta(B)$ byly zavedeny v procesech $AR(p)$ a $MA(q)$. Podmínka stacionarity (resp. invertibility) smíšeného procesu $ARMA\ (p,q)$ je shodná s podmínkou procesu $AR(p)$ (resp. invertibility procesu $MA(q)$.)

Stacionární proces $ARMA\ (p,q)$ má nulovou střední hodnotu a jeho autokorelační funkce splňuje diferenční rovnici

(42) $$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$$ pro $k \geq q+1$

s řešením

(43) $$\rho_k = \alpha_1 z_1^{-k} + \alpha_2 z_2^{-k} + \dots + \alpha_p z_p^{-k}$$ pro $k \geq max(0, q-p+1)$,

kde $z_1, z_2, \dots, z_p$ jsou navzájem různé kořeny polynomu $\phi(z)$, $(|z_1|,|z_2|,\dots,|z_p|) > 1$.

Autokorelační funkce procesu $ARMA\ (p,q)$ nemá bod useknutí a je v podstatě lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami, ale s výjimkou počátečních hodnot $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots \rho_{q-p}$ (tato výjimka se uplatní jen v případě $q \geq p$).

Parciální autokorelační funkce procesu $ARMA\ (p,q)$ nemá bod useknutí a je omezena lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami, ale s výjimkou počátečních hodnot $\rho_{00}, \rho_{11}, \rho_{22}, \dots \rho_{p-1,p-1}$ (výjimka se uplatní, jen když $p \geq q$).

Proces $ARMA\ (1,1)$ je představován zápisem

(44) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

a je stacionární pro $|\phi_1| < 1$. V tom případě má nulovou střední hodnotu a rozptyl roven

(45) $$\sigma_y^2 = \frac{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2}.\sigma_\varepsilon^2.$$

ověření: Z definice procesu $ARMA(1,1)$ ve (44) víme, že platí

$$y_t . y_t = (\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}),$$ takže

$$E y_t . y_t = E(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2,$$ po roznásobení pak

$$E(y_t)^2 = \phi_1^2 E(y_{t-1})^2 + E(\varepsilon_t)^2 + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1})^2 + 2\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_t) + 2\theta_1 E(\varepsilon_{t-1}.\varepsilon_t) + 2\theta_1\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1})$$

$$E(y_t)^2 = \phi_1^2 E(y_{t-1})^2 + E(\varepsilon_t)^2 + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1})^2 + 2\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_t) + 2\theta_1\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1})$$

$$E(y_t)^2 = \phi_1^2 E(y_{t-1})^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + 2\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_t) + 2\theta_1\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1})$$

Vztah podělíme rozptylem veličiny y_t. Dostaneme (protože $2\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_t) = 0$):

$$\frac{E(y_t^2)}{\sigma_y^2} = \frac{\phi_1^2 E(y_t^2)}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{\theta_1^2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{2\theta_1\phi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1})}{\sigma_y^2}$$

$$1 = \phi_1^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{\theta_1^2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} + \frac{2\theta_1\phi_1\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$

$$(1-\phi_1^2)\sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 + 2\theta_1\phi_1\sigma_\varepsilon^2$$

a následně obdržíme shodu s (45)

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 + 2\theta_1\phi_1\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi_1^2)} = \frac{(1+\theta_1^2 + 2\theta_1\phi_1)}{(1-\phi_1^2)}\sigma_\varepsilon^2 .$$ □.

a má autokorelační funkci

(46) $$\rho_1 = \frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1 + \theta_1)}{1+\theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1}\sigma_\varepsilon^2 .$$

ověření:

podle (6) a (44) máme

$$\rho_1 = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sigma_y . \sigma_{y-1}} = \frac{E(y_t y_{t-1})}{\sigma_y^2} = \frac{E(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})}{\sigma_y^2}$$

Výraz ve čitateli předchozího zlomku lze rozepsat následovně:

$$E(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}) =$$

$$E(\phi_1^2 y_{t-1} y_{t-2}) + E(\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + E(\phi_1 y_{t-1} \theta_1 \varepsilon_{t-2})$$
$$+ E(\varepsilon_t \phi_1 y_{t-2}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t \theta_1 \varepsilon_{t-2}) +$$
$$+ E(\theta_1 \varepsilon_{t-1} \phi_1 y_{t-2}) + E(\theta_1 \varepsilon_{t-1}^2) + E(\theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2})$$

Vyjádříme-li jednotlivé členy předchozího devítičlenu, dostaneme:

$$E(\phi_1^2 y_{t-1} y_{t-2}) = \phi_1^2 . E(y_{t-1} y_{t-2}) = .$$

$$E(\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) = \phi_1 . E(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) = \phi_1 . \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\phi_1 y_{t-1} . \theta_1 \varepsilon_{t-2}) = \phi_1 . \theta_1 . E(y_{t-1} \varepsilon_{t-2}) = \phi_1 . \theta_1^2 . \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\varepsilon_t \phi_1 y_{t-2}) = \phi_1 . E(\varepsilon_t y_{t-2}) = 0$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$$

$$E(\varepsilon_t \theta_1 \varepsilon_{t-1}) = \theta_1 . E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$$

$$E(\theta_1 \varepsilon_{t-1} \phi_1 y_{t-1}) = \theta_1 \phi_1 . E(\varepsilon_{t-1} . y_{t-1}) = 0$$

$$E(\theta_1 \varepsilon_{t-1})^2 = \vartheta_1 E(\varepsilon_{t-1})^2 = \vartheta_1 . \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}) = \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}) = 0.$$

$$\rho_1 = \frac{xx + \phi_1 \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1 \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \vartheta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (xx + \phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 + \vartheta_1)}{\sigma_y^2}$$

$$\rho_1 = \frac{xx + \phi_1 \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1 \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \vartheta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (xx + \phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 + \vartheta_1)}{\frac{1 + \vartheta_1^2 + 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2} . \sigma_\varepsilon^2}$$

(47) $\rho_k = \phi_1 . \rho_{k-1}$. **pro** $k \geq 2$

bez bodu useknutí ve tvaru klesající geometrické posloupnosti s výjimkou ρ_0

Podmínkou invertibility procesu $ARMA\ (1,1)$ **je** $|\phi_1| < 1$ **.**

Parciální ρ_{kk} **autokorelační funkce procesu** $ARMA\ (1,1)$ **je omezena klesající geometrickou posloupností počínaje od** ρ_{11} **.**

Zobecnění stacionární proces s úrovňovou konstantou

Dosud uvedené stacionární procesy se vyznačovaly nulovou střední hodnotou. Jejich zobecnění pro situace, kdy je střední hodnota nenulová (ale zůstává v čase neměnná) **není však nijak obtížné:**

Vezmeme-li

Proces klouzavých součtů řádu $MA(q)$ **se střední hodnotou** μ **má tvar**

(51) $$y_t = \mu + \varepsilon_t + \vartheta_1 \varepsilon_{t-1} + \vartheta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \vartheta_q \varepsilon_{t-q} = \mu + \vartheta(B).\varepsilon_t$$

Smíšený proces $ARMA\ (p,q)$ **se střední hodnotou** μ **má tvar**

(52)

$$y_t - \mu = \phi_1 (y_{t-1} - \mu) + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p (y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1 . \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q . \varepsilon_{t-q}$$

neboli

(52A) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 . \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q . \varepsilon_{t-q}$$ **, kde**

$$\alpha = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p)\mu$$

Konstrukce modelů v Boxově-Jenkinsově metodologii

Podobně jako v ekonometrii, **sestává úplná tvorba modelu v** ***Boxově-Jenkinsově metodologii*** **z následujících třech kroků:**

(A) identifikace modelu Znamená to např. že pro analyzovanou časovou řadu $y_1, y_2, ..., y_n$ **identifikujeme jí adekvátní model** $AR(1)$

(B) odhad parametrů (kvantifikace) modelu. V rámci modelu $AR(1)$ se (dejme tomu) **jedná o model tvaru** $y_t = 0{,}72\, y_{t-1} + \varepsilon_t$ **při** $\sigma_\varepsilon^2 = 8{,}92$

(C) diagnostika modelu. V rámci odhadnutého modelu v (b) je tento model verifikován na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ **a prověří se jeho verifikační schopnosti.**

Pokud diagnostické výsledky z kroku (C) nejsou dostatečně přesvědčivé, je potřebné všechny tři kroky zopakovat pro alternativní model (často se ale jedná jen o korekci zamítnutého modelu, ke které nám provedená diagnostika poskytla dílčí návod).

(A) - Identifikace modelu

Příspěvek *autokorelační a parciální autokorelační funkce* k identifikaci modelu:

Obecnější poznatky o tvaru autokorelační a parciální autokorelační funkce stacionárních a invertibilních procesů $AR(p)$, $AR(q)$, $ARMA(p,q)$ přináší tabulka:

	$AR(p)$	$MA(q)$,	$ARMA(p,q)$
ρ_κ	**neexistuje** k_0 ρ_κ **ve tvaru U-křivky**	$k_0 = q$	**neexistuje** k_0 ρ_κ **ve tvaru U-křivky** **po prvních *q-p* hodnotách**
$\rho_{\kappa\kappa}$	$k_0 = p$ ρ_κ **omezená U-křivkou**	**neexistuje** k_0	ρ_κ **omezená U-křivkou** **po prvních *p-q* hodnotách**

Odpovídající identifikační postup pak spočívá v prohlídce grafického záznamu odhadnutého *korelogramu* a *parciálního korelogramu* modelované časové řady, kdy se snažíme řadě přiřadit nejvhodnější typ modelu právě pomocí charakteristik z tabulky. V případě pochybností testujeme potenciální bod useknutí k_0 **pomocí *Bartlettovy aproximace* s přibližným (asymptotickým) kritickým oborem (nejčastěji na hladině** $\alpha = 0{,}05$ **) pro autokorelační funkci**

(53) $$|r_k| \geq 2.\sqrt{\frac{1}{n}\left(1 + 2.\sum_{j=1}^{k_0} r_j^2\right)}$$ **pro některé** $k > k_0$

Druhou možností je aplikovat *Quenouilleovu aproximaci* s kritickým oborem (na hladině $\alpha = 0{,}05$ **) pro parciální autokorelační funkci**

(54) $$|r_{kk}| \geq 2.\sqrt{\frac{1}{n}}$$ pro některé $k > k_0$.

Identifikace pomocí informačních kritérií

Jde o modernější přístup k identifikaci, který snižuje míru subjektivity posuzování analytika a v jistém smyslu identifikaci automatizuje. K problému identifikace obecného modelu $ARMA\ (p,q)$ pro danou časovou řadu se zde přistupuje jako k problému odhadu parametrů p,q na základě optimalizačního kritéria

(60) $$(\hat{p},\hat{q}) = \arg\min_{(k,l)} A(k,l)$$, kde

$A(k,l)$ je vhodné kritérium, k jehož konstrukci musíme pro danou řadu odhadnout model $ARMA\ (k,l)$, přičemž minimalizaci provádíme pro předem zvolenou síť hodnot $k = 0,1,2,\dots,\ K \quad l = 0,1,2,\dots,\ L$.

Adekvátnější než předchozí postup (60) je však uplatnit některé z *kritérií teorie informace*, kdy se penalizují zbytečně vysoké řády *l* a *k* a často tak docílit u odhadů jejich konzistence. Nejběžnější kritéria založená na tomto principu jsou

(A) AKAIKEho informační kritérium [Akaike information criterion]

(61) $$AIC\ (k,l) = \ln \sigma^2_{k,l} + 2.\frac{k+l+1}{n}$$

(B) SCHWARTZovo informační kritérium[Schwartz (Bayesian) information criterion]

(62) $$SIC\ (k,l) = \ln \sigma^2_{k,l} + \ln(n).\frac{k+l+1}{n}$$, kde

$\sigma^2_{k,l}$ je odhadnutý rozptyl bílého šumu procesu $ARMA\ (p,q)$ a v čitateli druhého členu je počet odhadovaných parametrů (se započtením eventuálně nenulové úrovňové konstanty μ, přičemž n je délka dané řady). Korektně by ale místo prvních členů v (61), resp. (62) měla být použita minimální hodnota logaritmované věrohodnostní funkce daného modelu vynásobená koeficientem (-2/n).

Kritérium BIC sice poskytuje silně konzistentní odhad řádu modelu (který konverguje skoro jistě, tj. s pravděpodobností 1), ale s velkým rozptylem (tj. odhad ale postrádá vydatnost).

U *kritéria AIC* je tomu přesně naopak: příslušný odhad řádu modelu je zde bohužel nekonzistentní, ale je vydatný.

Odhad parametrů ARMA modelu

V počáteční fázi kvantifikace modelu se postupuje tak, že se využijí existující vztahy mezi parametry daného modelu a jeho autokorelacemi, kdy např. v modelu $AR(1)$ platí, že $\phi_1 = \rho_1$. Takovéto odhady odvozené z momentů se však zpravidla považují jen za předběžné a slouží tedy jako počáteční odhady pro vlastní odhadové procedury, prováděné většinou iteračně vhodnou numerickou metodou.

model	momentové odhady	kontrolní nerovnosti pro r_k
$AR(1)$	$\phi_1 = r_1$, $\sigma^2 = \sigma^2_y(1-\phi_1 r_1)$	$\lvert r_1\rvert < 1$
$AR(2)$	$\phi_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}$, $\phi_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1-r_1^2}$, $\sigma^2 = \sigma^2_y(1-\phi_1 r_1 - \phi_2 r_2)$	$\lvert r_2\rvert < 1$, $r_1^2 < \frac{1+r_2}{2}$
$MA(1)$	$\theta_1 = \frac{1-\sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$, $\sigma^2 = \frac{\sigma^2_y}{1+\theta_1^2}$	$\lvert r_1\rvert < 1/2$
$MA(2)$	$\theta_1 = \theta_2 = 0{,}1$, $\sigma^2 = \frac{\sigma^2_y}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$	$r_1 + r_2 > -1/2$, $r_2 - r_1 > -1/2$, $r_1^2 < 4r_2(1-2r_2)$
$ARMA(1,1)$	$\phi_1 = \frac{r_2}{r_1}$, $\theta_1 = \frac{\hat b \pm \sqrt{\hat b^2 - 4}}{2}$	$2r_1^2 - \lvert r_1\rvert < r_2 < \lvert r_1\rvert$

$\hat b = \frac{1-2r_2+\phi_1^2}{r_1-\phi_1}$, $\sigma^2 = \frac{\sigma^2_{y^*}}{1+\theta_1^2}$, **kde** $\sigma^2_{y^*} = \sum_{t=1}^{n} \frac{(y_t^* - \bar y^*)^2}{n}$, $kde\ \ y_t^* = y_t - \phi_1 y_{t-1}$

Odhadové procedury pro konstrukci finálních odhadů v uvažovaných modelech **jsou vyslovené záležitostí metod nasazených v příslušném software. Např. v $AR(p)$ modelu zapsanému ve tvaru**

(21) $$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

lze použít klasický OLS-odhad spolu s klasickým OLS-odhadem jeho kovarianční matice, který je za předpokladu stacionarity procesu konzistentní. Lze totiž ukázat, že regresory v (21) splňují podmínku $\underset{T\to\infty}{p\lim}\left(\frac{1}{T}X'X\right) = V$, kde *V* je regulární matice a stejně tak ***i podmínku ortogonality*** $\underset{T\to\infty}{p\lim}\left(\frac{1}{T}X'\varepsilon\right) = 0$. **Z vyjádření stacionárního procesu $AR(p)$ ve tvaru lineárního procesu (1) speciálně plyne, že**

(63) $$cov(y_{t-1},\varepsilon_t) = cov(y_{t-2},\varepsilon_t) = \dots = cov(y_{t-p},\varepsilon_t) = 0.$$

V případě stacionárního a invertibilního $ARMA\,(p,q)$ **modelu (vyjádřeného pro jednoduchost s nulovou střední hodnotou)**

(41) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots\ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

se nejčastěji používají *NLLS –odhady* realizované pomocí některé z *metod Gauss-Newtonovy třídy*.

Příslušná *NLLS –odhadová procedura* zde spočívá v minimalizaci součtu čtverců

(64) $$\min_{\phi_1,\ldots,\phi_p,\theta_1,\ldots,\theta_q} \sum_{t=p+1}^{n} e_t\left(\phi_1,\ldots,\phi_p,\theta_1,\ldots,\theta_q\right)^2$$ **, kde**

$$e_t\left(\phi_1,\ldots,\phi_p,\theta_1,\ldots,\theta_q\right) = \varepsilon_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \ldots - \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

pro $t = p+1, p+2, \ldots, n$ **s vhodně zvolenými hodnotami** $e_{p-q+1}, e_{p-q+2}, \ldots\ldots e_p$.

Odhad rozptylu bílého šumu σ_ε^2 **se potom obvykle získá tak, že minimální hodnotu (64) vydělíme délkou řady *n*. Za předpokladu normality a při dost velkém *n* jsou odhadové výsledky** velmi **blízké ML-odhadu** (podmíněnému volbou $e_{p-q+1}, e_{p-q+2}, \ldots\ldots e_p$) **získanému maximalizací** logaritmované ***věrohodnostní funkce***

(65) $$L^*\left(\phi_1,\ldots,\theta_q\right) = -\frac{n-p}{2}\ln\left(2\pi\right) - \frac{n-p}{2}\ln\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=p+1}^{n} e_t(\phi_1,\ldots,\theta_q)^2$$ [3]

Tabulka: Přibližné hodnoty směrodatných odchylek odhadnutých parametrů ve vybraných stacionárních a invertibilních **modelech Boxovy-Jenkinsovy metodologie:**

$AR(1)$	$\sigma(\phi_1) = \sqrt{\dfrac{1-\phi_1^2}{n}}$
$AR(2)$	$\sigma(\phi_1) = \sigma(\phi_2) = \sqrt{\dfrac{1-\phi_2^2}{n}}$
$MA(1)$	$\sigma(\theta_1) = \sigma(\phi_2) = \sqrt{\dfrac{1-\theta_1^2}{n}}$
$MA(2)$	$\sigma(\phi_1) = \sigma(\theta_2) = \sqrt{\dfrac{1-\theta_2^2}{n}}$
$ARMA\,(1,1)$	$\sigma(\phi_1) = \sqrt{\dfrac{\left(1-\phi_1^2\right)\left(1+\phi_1\theta_1\right)^2}{n\left(\phi_1+\theta_1\right)^2}}$, $\sigma(\theta_1) = \sqrt{\dfrac{\left(1-\theta_1^2\right)\left(1+\phi_1\theta_1\right)^2}{n\left(\phi_1+\theta_1\right)^2}}$.

[3] Poznámka **výchozí** (nelogaritmovaná) **věrohodnostní funkce má tvar**

$$L\left(\phi_1,\ldots,\theta_q\right) = \prod_{t=1}^{n-p}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=p+1}^{n} e_t(\phi_1,\ldots,\theta_q)^2\right\}$$

Diagnostika modelu

Diagnostika modelu je v rámci *Box-Jenkinsovy metodologie* velmi **propracovaná. Spočívá v tom, že pomocí různých diagnostických/verifikačních nástrojů ověřujeme adekvátnost sestaveného modelu** (tj. prověřujeme, zda je skutečně konformní s analyzovanými daty). **Přitom obvykle musíme brát v úvahu několik aspektů:**

1. kontrola stacionarity modelu.

Především zde kontrolujeme, zda odhadnutý model skutečně splňuje *podmínku stacionarity*, tj. zda kořeny jeho odhadnutého autoregresního polynomu leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině (resp. zda ekvivalentně jejich převrácené hodnoty, což jsou kořeny autoregresního polynomu zapsaného s opačným uspořádáním mocnin leží uvnitř takového kruhu). Je také možné řadu rozdělit do několika úseků a testovat shodnost odhadnutých úrovní, rozptylů a autokorelací (popř. momentů vyšších řádů, zejména šikmost mezi jednotlivými úseky).

Jiný postup (tzv. *impuls response*) spočívá v analýze toho, jako odezvu má v odhadnutém modelu impuls m (většinou standardizovaný na velikost jedno nebo vícenásobek směrodatné odchylky bílého šumu), který nastal v jediném časovém okamžiku nebo opakovaně od daného časového okamžiku a přirozeně určuje následné hodnoty procesu – odhadnutá ARMA struktura se převede do tvaru lineárního procesu (1) a od daného okamžiku se sem dosazuje *inovační proces* s jedinou nenulovou hodnotu v tomto okamžiku nebo *inovační proces* se stále stejnými nenulovými hodnotami od tohoto okamžiku. Je-li analyzovaná řada stacionární, měla by s rostoucí časovou vzdáleností od okamžiku impulsů:

(1) odezva pro jediný impuls postupně odeznít až na nulovou hodnotu

(2) odezva pro opakovaný impuls se stabilizovat na určité (nenulové) **úrovni.**

2. kontrola struktury ARMA procesu

Rozumí se jí především *shoda korelační struktury odhadnuté z dat* (tj. autokorelační a parciální autokorelační funkce) s korelační strukturou vypočtenou z odhadnutého modelu, který ověřujeme. Jiná kontrola struktury modelu souvisí s testováním nekorelovanosti pro vypočtený bílý šum pomocí Q-testů.