Derivace elementárních funkcí

$$(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \mathbb{R}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(a^x)' = a^x lna, a > 0$$
$$(lnx)' = \frac{1}{x}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x.lna}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(cotgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(arccotgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Pravidla pro derivování

Pro lib. funkce $f(x),\ g(x)$ a $c \in \mathbb{R}$ platí ve všech bodech, kde mají f a g derivaci a kde jsou násl. výrazy definovány:

a) $(c.f(x))' = c.f'(x)$

b) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

c) $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

d) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Derivace složené funkce:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)).g'(x)$$

Derivace inverzní funkce:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Použití derivací

L'Hospitalovo pravidlo

Nechť $f(x),\ g(x)$ jsou takové funkce, že

$$lim f(x) = lim g(x) = 0$$

nebo

$$lim f(x) = \pm\infty,\ lim g(x) = \pm\infty.$$

Existuje-li vlastní nebo nevlastní limita $lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$, pak existuje $lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$lim \frac{f(x)}{g(x)} = lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha.$$

Rovnice tečny a normály

Má-li funkce $f(x)$ v bodě a derivaci $f'(a)$, tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $T[a, f(a)]$ je dána rovnicí

$$y - f(a) = f'(a).(x - a).$$

Rovnice normály ke grafu v bodě $T[a, f(a)]$ je pro $f'(a) \neq 0$:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}.(x - a)$$

a pro $f'(a) = 0$ je rovnice normály: $x = a$.

Diferenciál a Taylorův polynom

Má-li funkce $f(x)$ v bodě a derivaci $f'(a)$, pak

$$df(a) = f'(a).dx$$

nazýváme diferenciálem funkce $f(x)$ v bodě a. Pro malé $dx = x - a$ platí přibližná rovnost

$$f(x) \approx f(a) + df(a).$$

Má-li funkce $f(x)$ na intervalu I derivace až do řádu n, pro $a \in I$ definujeme Taylorův polynom řádu n funkce $f(x)$ v bodě a:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Pokud má funkce $f(x)$ na intervalu I derivace až do řádu $n+1$, pro $x \in I$ platí:

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1},$$

kde $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$ pro nějaké θ mezi x a a.

Funkce více proměnných

Diferenciál a Taylorův polynom pro funkce více proměnných

Nechť funkce $f(X)$, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ má v oblasti Ω spojité všechny parciální derivace prvního řádu. Potom

$$df(X^0) = f'_{x_1}(X^0)dx_1 + \ldots + f'_{x_n}(X^0)dx_n$$

nazveme diferenciálem funkce $f(X)$ v bodě $X^0 \in \Omega$. Pro bod $X \in \Omega$ blízký bodu X^0 platí:

$$f(X) \approx f(X^0) + df(X^0).$$

Pro $n = 2$ označme $X = [x, y]$ a má-li f v jistém okolí bodu $[a, b]$ spojité všechny parciální derivace druhého řádu, definujeme zde Taylorův polynom druhého řádu:

$$T_2(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}(f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)) +$$

$$+\frac{1}{2!}(f''_{x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{y^2}(a, b)(y - b)^2)$$

a platí zde:

$$f(x, y) \approx T_2(x, y).$$

Extrémy funkcí více proměnných

Nechť funkce $f(X)$, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je definována na oblasti Ω. Nechť X^0 je jejím stacionárním bodem, tj.

$$f'_{x_1}(X^0) = f'_{x_2}(X^0) = \ldots f'_{x_n}(X^0) = 0.$$

Nechť v jistém okolí $U_\delta(X^0)$ má funkce $f(X)$ spojité všechny parciální derivace druhého řádu. Označme

$$D_k = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_k} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} & \cdots & f''_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f''_{x_kx_1} & f''_{x_kx_2} & \cdots & f''_{x_k^2} \end{vmatrix}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Je-li $D_k(X^0) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$
(respektive $(-1)^k D_k(X^0) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$),
má funkce v lokální minimum (resp. maximum).

Základní neurčité integrály

$$\int 0dx = c,\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int e^x dx = e^x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + c,\ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin(x) + c,\ x \in (-1, 1)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1, x \in (-\infty, \infty) pro\ n \geq 0\ cel\acute{e},$$

$$x \in (-\infty, 0)\ nebo\ (0, \infty)\ pro\ n < 0\ cel\acute{e}, x \in (0, \infty)\ pro\ n\ necel\acute{e}$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c,\ x \in (0, \infty)\ nebo\ x \in (-\infty, 0)$$

$$\int \frac{dx}{cos^2(x)} = tg(x) + c,\ pro\ interval,\ kde\ \cos x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{sin^2(x)} = -cotg(x) + c,\ pro\ interval,\ kde\ \sin x \neq 0$$

Pravidla pro integrování

Metoda per partes:

Jestliľe funkce $u(x)$, $v(x)$ mají v intervalu I spojité derivace $u'(x)$, $v'(x)$, pak zde platí:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

1. Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
2. Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.
3. Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\int f(x)dx$.
4. Vypočítáme $F(x) = \int f(x)dx$.
5. Určíme interval I, na kterém platí $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
6. Hledaný integrál je $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c,\ t \in I$.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

1. Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$, tak aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.
2. Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$ a do daného integrálu dosadíme místo x výraz $\varphi(t)$ a místo dx výraz $\varphi'(t)dt$.
3. Určíme $G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.
4. Dosadíme do $G(t)$ místo t výraz $\varphi^{-1}(x)$ a dostaneme $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$.
5. Zkontrolujeme, zda na intervalu J platí $F'(x) = f(x)$.

Rozklad na parciální zlomky

Nechť $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ je ryze lomená reálná racionální funkce, jejíž čitatel a jmenovatel nemají stejný kořen. Nechť $g(x) =$

$$a_n(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\dots(x-\gamma)^m\cdot[(x-a)^2+b^2]^p\dots[(x-c)^2+d^2]^q,$$

(kde $\alpha,\ \beta,\ \dots,\ \gamma,\ a,\ b,\dots,\ c,\ d$ jsou reálná čísla a $k,\ l,\dots,\ m,\ p,\dots,\ q$ jsou přirozená čísla) je rozklad jmenovatele v reálném oboru.

Potom existují reálná čísla

$$A_1,\dots,A_k,\ B_1,\dots,\ B_l,\dots,\ C_1,\dots,\ C_m$$

a $M_1,\ N_1,\dots,\ M_p,\ N_p,\dots,\ P_1,\ Q_1,\dots,\ P_q,\ Q_q$ tak, ľe platí

$$\begin{aligned}R(x) &= \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\dots+\frac{A_1}{(x-\alpha)^1}+\\ &+\frac{B_l}{(x-\beta)^l}+\dots+\frac{B_1}{(x-\beta)^1}+\dots+\\ &+\frac{C_m}{(x-\gamma)^m}+\dots+\frac{C_1}{(x-\gamma)^1}+\\ &+\frac{M_px+N_p}{[(x-a)^2+b^2]^p}+\dots+\frac{M_1x+N_1}{[(x-a)^2+b^2]^1}+\dots+\\ &+\frac{P_qx+Q_q}{[(x-c)^2+d^2]^q}+\dots+\frac{P_1x+Q_1}{[(x-c)^2+d^2]^1}.\end{aligned}$$