Lineární proces [linear process]

Teoretickým základem modelů tzv.*Boxovy-Jenkinsovy metodologie* je *lineární proces*, který je definován jako

(1) $y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + ... = \left(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + ..\right)\varepsilon_t = \psi(B).\varepsilon_t$,

kde $\{\varepsilon_t\}$ je tzv. bílý šum [white noise] [= *posloupnost nekorelovaných, stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konstantním konečným rozptylem* $\sigma^2 > 0$] a B je operátor časového posunu.

Dále se předpokládá, že mocninná řada $\psi(z)$ proměnné z konverguje pro $|z| \le 1$ (tj. uvnitř a na jednotkovém kruhu v komplexní rovině).

Za tohoto předpokladu lze ukázat, že nekonečné řady náhodných veličin (1) pro jednotlivá *t konvergují podle kvadratického středu*[1], přičemž limitní hodnoty $\{y_t\}$ tvoří stacionární posloupnost s nulovou střední hodnotou $E(y_t) = 0$

Jiné vyjádření lineárního procesu (1), které je užitečné např. při konstrukci předpovědí, je možné v případě, že tento *proces je invertibilní* a lze ho zapsat jako

(2) $y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \pi_3 y_{t-3} .... + \varepsilon_t$ neboli

(2A) $\varepsilon_t = y_t - \pi_1 y_{t-1} - \pi_2 y_{t-2} - \pi_3 y_{t-3} - ..... = \pi(B).y_t$,

Přitom *postačující podmínkou invertibility* je předpoklad analogický předpokladu (2), že

(3) mocninná řada $\pi(z)$ konverguje pro $|z| \le 1$, tj. uvnitř a na jednotkovém kruhu v komplexní rovině.

Poznámka1 Existuje řada důvodů, proč modely postavené na principu lineárního procesu jsou vhodné pro modelování reality. Nechť pro stacionární proces $\{y_t\}$ s nulovou střední hodnotou předpovídáme hodnotu $\{y_t\}$ na základě znalosti minulých hodnot $Y_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, ...\}$. Optimální předpovědí ve smyslu minimální chyby *MSE* je pak $E\{y_{t-1} | Y_{t-1}\}$, přičemž chyba této předpovědi je

(4) $e_t = y_t - E\left(y_t | Y_{t-1}\right)$

Má vlastnosti bílého šumu a označuje se jako inovace [innovation]. Označení je vcelku logické, protože inovační proces $\{e_t\}$ odpovídá nepredikovatelnému pohybu v hodnotách $\{y_t\}$. Jestliže je navíc proces $\{y_t\}$ normálně rozdělen, pak podmíněná střední hodnota $E\left(y_t | Y_{t-1}\right)$ má tvar lineární kombinace hodnot $\{y_{t-1}, y_{t-2}, ...\}$ a vztah (4) můžeme přepsat jako

(5) $e_t = y_t - \pi_1 y_{t-1} - \pi_2 y_{t-2} - ....$,

což je právě invertovaný tvar (2) lineárního procesu.

---

[1] Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_t\}$ konverguje k n.v. X podle středu (je cauchyovská podle středu), jestliže lim $_{t \to \infty} E|X_t - X| = 0$, resp. lim $_{s,t \to \infty} E|X_t - X_s| = 0$

Poznámka2 Protože platí $\varepsilon_t = \pi(B).y_t = \pi(B).\psi(B)\varepsilon_t$, musí zřejmě platit

(6) $$\pi(B).\psi(B) = 1$$

(6A) $\psi_1 - \pi_1 = 0$, $\psi_2 - \psi_1\pi_1 - \pi_2 = 0$, $\psi_3 - \psi_2\pi_1 - \psi_1\pi_2 - \pi_3 = 0$ atd.

Tyto vztahy lze použít pro převod parametrů $\{\psi_j\}$ na parametry $\{\pi_j\}$ a naopak. Formálně lze také uplatnit zápis

(7) $$\pi(B) = \psi(B)^{-1}.$$

Proces klouzavých součtů MA [moving average process][2]

Proces klouzavých součtů řádu q se značí $MA(q)$ má tvar

(11) $$y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + ... + \theta_q\varepsilon_{t-q} = \theta(B).\varepsilon_t$$

kde $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$ jsou parametry a $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + ... + \theta_q B^q$ je tzv. *operátor klouzavých součtů*. Proces $MA(q)$ tedy zřejmě vzniká useknutím lineárního procesu (1) v bodě, který odpovídá zpoždění q.

Proces $MA(q)$ je vždy stacionární, má nulovou střední hodnotu a rozptyl velikosti

(12) $$\sigma_y^2 = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2\right)\sigma^2$$ a má

autokorelační funkci

(13) $$\rho_k = \frac{\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + ... + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2}$$ pro $k = 1,2,...,q$

$\rho_k = 0$ pro $k > q$

Autokorelační funkce má tedy bod useknutí k_0 roven řádu modelu q.

ověření:

$$\rho_1 = \frac{\operatorname{cov}(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t}.\sigma^2_{y_{t-1}}}} = \frac{\operatorname{cov}(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)}.} =$$

$$\frac{\operatorname{cov}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \theta_1\operatorname{cov}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + \theta_1\operatorname{var}(\varepsilon_{t-1}) + \theta_1^2\operatorname{cov}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\theta_1^2)^2}} = \frac{\theta_1\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta_1^2\right)} = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

Parciální autokorelační funkce ρ_{kk} procesu $MA(q)$ nemá bod useknutí, ale je omezena lineární kombinací geometricky klesajících posloupností a sinusoid s geometricky klesajícími amplitudami.

Proces $MA(q)$ je invertibilní, jestliže všechny kořeny $z_1, z_2, .., z_q$ polynomu $\theta(z)$ leží <u>vně</u> jednotkového kruhu v komplexní rovině (tj. $|z_1| > 1, |z_2| > 1, ..., |z_q| > 1$, neboť potom je splněn předpoklad (3).

---

[2] MA proces nemá žádnou přímou souvislost s dříve popsanou *metodou klouzavých průměrů* užívanou pro eliminaci trendu časové řady.

Proces $MA(1)$ - proces klouzavých součtů 1. řádu

(14) $$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

má *autokorelační funkci*

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}, \quad \rho_k = 0 \quad \text{pro } k > 1$$

s bodem useknutí $k_0 = 1$ **.**

ověření: **vyjdeme z definice (6) obecného AR-procesu**

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\sigma_y^2} = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{var\, y_t}\sqrt{var\, y_{t-k}}} = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sigma_y . \sigma_{y-k}} \quad \text{a vypočítáme}$$

$$\rho_1 = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2 y_t . \sigma^2 y_{t-1}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)}.} =$$

$$\frac{cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + \theta_1 cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + \theta_1 var(\varepsilon_{t-1}) + \theta_1^2 cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4 (1+\theta_1^2)^2}} = \frac{\theta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 \left(1+\theta_1^2\right)} = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

protože ze čtyř členů v čitateli je jen jeden nenulový a protože **podle (14) dále platí**

$$var\, y_t = \sigma_{\varepsilon_t}^2 + \theta_1^2 . \sigma_{\varepsilon_{t-1}}^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)$$

$$var\, y_{t-1} = \sigma_{\varepsilon_{t-1}}^2 + \theta_1^2 . \sigma_{\varepsilon_{t-2}}^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)$$

(Při odvozování respektujeme pravidlo nekorelovanosti náhodných složek $\varepsilon_t, \varepsilon_s$ pro $t \neq s$.)

$$\rho_k = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\sigma^2 y_t . \sigma^2 y_{t-k}}} = \frac{cov(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2)}.} =$$

$$\frac{cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) + \theta_1 cov(\varepsilon_{t-1} . \varepsilon_{t-k}) + \theta_1 cov(\varepsilon_t . \varepsilon_{t-k-1}) + \theta_1^2 cov(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k-1})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4 (1+\theta_1^2)^2}} = 0$$

protože při $k \geq 2$ **se ve jmenovateli neobjeví žádné dvě složky** $\varepsilon_s, \varepsilon_t$ **se stejným indexem.** □ .

Jeho *parciální autokorelační funkce* ρ_{kk} **má tvar** (bez bodu useknutí)**:**

(15) $$\rho_{kk} = \frac{(-1)^k \theta_1^k \left(1-\theta_1^2\right)}{1-\theta_1^{2k+2}} \quad \text{pro } k = 1,2,3,\ldots$$

Takže je v *případě invertibility* procesu opravdu **geometricky klesající posloupnost**

(16) $$|\rho_{kk}| = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

Podmínka invertibility **zde má totiž velmi jednoduchý tvar** $|\theta_1| < 1$**. Protože** $\rho_1 = \dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$**, musí pro invertibilní** $MA(1)$ **proces být** $|\rho_1| = \left|\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}\right| < 0{,}5$**. Tato nerovnost platí dokonce pro všechna** $|\theta_1| \neq 1$**.**

MA(1)-polynom má tvar $\theta(B)=1+\theta_1 B$, tedy $\theta(z)=1+\theta_1 z$, po anulování $\theta_1 z=-1$, jediný (a to reálný) kořen MA(1)-polynomu je tedy roven $z=-1/\theta_1$. (θ_1 může být přirozeně také záporné.)

Má-li kořen tohoto polynomu *(pro invertibilitu)* ležet vně jednotkového kruhu, musí platit buď
(P1) $z=-1/\theta_1<-1$ nebo (P2) $z=-1/\theta_1>1$

* Podmínka (P1) může být splněna jen při kladném θ_1 a při splnění $\theta_1<1$ tj. $0<\theta_1<1$
* Podmínka (P2) může být splněna jen při záporném θ_1 a při splnění $\theta_1>-1$ tj. $-1<\theta_1<0$

Obě eventuality pokrývá souhrnná podmínka $|\theta_1|<1$.

Proces $MA(2)$ - proces klouzavých součtů 2. řádu

(17) $$y_t=\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2}$$

má *autokorelační funkci*

(18) $$\rho_k=\frac{\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}\quad pro\quad k=1$$
$$=\frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}\quad pro\quad k=2$$
$$=0\quad pro\quad k>2$$
s bodem useknutí $k_0=2$.

ověření:

$$var\, y_t=\sigma_{\varepsilon_t}^2+\theta_1^2.\sigma_{\varepsilon_{t-1}}^2+\theta_2^2.\sigma_{\varepsilon_{t-2}}^2=\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)$$

$$var\, y_{t-1}=\sigma_{\varepsilon_{t-1}}^2+\theta_1^2.\sigma_{\varepsilon_{t-2}}^2+\theta_2^2.\sigma_{\varepsilon_{t-3}}^2=\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)$$

$$var\, y_{t-2}=\sigma_{\varepsilon_{t-2}}^2+\theta_1^2.\sigma_{\varepsilon_{t-3}}^2+\theta_2^2.\sigma_{\varepsilon_{t-4}}^2=\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)$$

$$\rho_1=\frac{cov(y_t,y_{t-1})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t}.\sigma^2_{y_{t-1}}}}=\frac{cov(\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2},\varepsilon_{t-1}+\theta_1\varepsilon_{t-2}+\theta_2\varepsilon_{t-3})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2).\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2).}}=$$
$$\frac{\theta_1 cov(\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-1})+\theta_1\theta_2 cov(\varepsilon_{t-2},\varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\theta_1^2+\theta_2^2)^2}}=\frac{\theta_1\sigma_\varepsilon^2+\theta_1.\theta_2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}=\frac{\theta_1+\theta_1.\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}$$

$$\rho_2=\frac{cov(y_t,y_{t-2})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t}.\sigma^2_{y_{t-2}}}}=\frac{cov(\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2},\varepsilon_{t-2}+\theta_1\varepsilon_{t-3}+\theta_2\varepsilon_{t-4})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2).}}=$$
$$\frac{\theta_2 cov(\varepsilon_{t-2},\varepsilon_{t-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\theta_1^2+\theta_2^2)^2}}=\frac{\theta_2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}=\frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}.$$

$$\rho_k=\frac{cov(y_t,y_{t-k})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t}.\sigma^2_{y_{t-k}}}}=\frac{cov(\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2},\varepsilon_{t-k}+\theta_1\varepsilon_{t-k-1}+\theta_2\varepsilon_{t-k-2})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2).}}=$$
$$\frac{0}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^4(1+\theta_1^2)^2}}=0$$

protože při $k\ge 3$ se ve jmenovateli neobjeví žádné dvě složky $\varepsilon_s,\varepsilon_t$ se stejným indexem.

Při odvozování respektujeme pravidlo nekorelovanosti náhodných složek $\varepsilon_t,\varepsilon_s$ pro $t\ne s$. □.

Podmínka invertibility (2) má pro proces $MA(2)$ **tvar**

(19) $\theta_1 + \theta_2 > -1$, $\theta_2 - \theta_1 > -1$ $-1 < \theta_2 < 1$,

takže *oblast invertibility procesu* $MA(2)$ v rovině s vodorovnou osou pro hodnoty θ_1 a se svislou osou pro hodnoty θ_2 vyplní vnitřek trojúhelníka s vrcholy $(-2,1)$, $(0,-1)$ **a** $(2,1)$.

MA(2)-polynom má tvar $\phi(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2$, **tedy** $\phi(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2$, **po anulování** $0 = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2$ **neboli** $\theta_2 z^2 + \theta_1 z + 1 = 0$.

Kořeny AR (2)-polynomu získáme jako řešení této kvadratické rovnice s podmínkou $|z_1|, |z_2| > 1$ (pro reálný i komplexní případ).

Řešení této kvadratické rovnice je $z_1, z_2 = \dfrac{-\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$.

a) Jsou-li kořeny reálné, různé, pak musí být splněny podmínky

(A) $\theta_1^2 - 4\theta_2 > 0$, **tedy** $\theta_1^2 > 4\theta_2$ **a současně (B)** $\left| \dfrac{-\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} \right| > 1$, **tedy**

(B1) $\left| \dfrac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} \right| > 1$ **a také** **(B2)** $\left| \dfrac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} \right| > 1$

Pokud je $\theta_2 < 0$, pak je podmínka (A) splněna vždy.

První kořen $z_1 = \dfrac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$ **je záporný, protože** (při záporném jmenovateli) **má kladný čitatel.**

Druhý kořen $z_2 = \dfrac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$ **je kladný, protože** (při záporném jmenovateli) **má záporný čitatel** (bez ohledu na znaménko θ_1 odečítáme kladnou odmocninu, jejíž absolutní hodnota je při $\theta_2 < 0$ větší než absolutní hodnota $-\theta_1$.)

Podmínka (B1) má zde tvar $\dfrac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} < -1$ **tj.** $-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} > -2\theta_2$

tj. $\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} > -2\theta_2 + \theta_1$, **tj.** $\theta_1^2 - 4\theta_2 > 4\theta_2^2 + \theta_1^2 - 4\theta_2\theta_1$ **tj.** $-4\theta_2 > 4\theta_2^2 - 4\theta_2\theta_1$

tj. $0 > \theta_2^2 - \theta_2\theta_1 + \theta_2$ **tj.** $0 > \theta_2(\theta_2 - \theta_1 + 1)$ **tj.** $0 < \theta_2 - \theta_1 + 1$ **tj.** $-1 < \theta_2 - \theta_1$

Podmínka (B2) má zde tvar $\dfrac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} > 1$ **tj.** $-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} < 2\theta_2$

tj. $-\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} < 2\theta_2 + \theta_1$ **tj.** $\theta_1^2 - 4\theta_2 > 4\theta_2^2 + \theta_1^2 + 4\theta_2\theta_1$ **tj.** $-4\theta_2 > 4\theta_2^2 + 4\theta_2\theta_1$

tj. $0 > \theta_2^2 + \theta_2\theta_1 + \theta_2$, **tj.** $0 > \theta_2(\theta_2 + \theta_1 + 1)$ **tj.** $0 < \theta_2 + \theta_1 + 1$ $-1 < \theta_2 + \theta_1$. □.

Dohromady to pro vztahy obou parametrů znamená tyto podmínky:

(*) $\theta_2 - 1 < \theta_1 < \theta_2 + 1$

(**) $\theta_1 - 1 < \theta_2$ a současně $-\theta_1 - 1 < \theta_2$

Protože je $\theta_2 < 0$, musí být pravá strana (*) menší než 1, z čehož plyne $\theta_1 < 1$
Protože je $\theta_2 < 0$, musí být levá strana (*) větší než -1, z čehož plyne $\theta_1 > -1$

Řešením je tedy oblast tvořící trojúhelník s body A=[-1,0], B=[1,0] a C= [0, -1]

Pokud je $\theta_2 > 0$, pak podmínka $\theta_1^2 > 4\theta_2$ představuje skutečné omezení.

Znaménko prvního kořene $z_1 = \dfrac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$ závisí na znaménku θ_1:

Pokud $\theta_1 > 0$, pak je čitatel z_1 záporný (kladný obsah odmocniny je v absolutní hodnotě menší než θ_1), kořen z_1 je záporný

Pokud $\theta_1 < 0$ pak je čitatel z_1 zřejmě kladný (kladné jsou oba sčítance součtu), kořen je kladný

Znaménko druhého kořene $z_2 = \dfrac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$ rovněž závisí na znaménku θ_1:

Pokud $\theta_1 > 0$ pak je čitatel z_2 záporný (jmenovatel kladný), kořen z_2 je tedy záporný

Pokud $\theta_1 < 0$ pak je čitatel z_2 kladný (jmenovatel kladný), kořen z_2 je tedy kladný.

Pokud je tedy $\theta_1 > 0$, pak jsou oba kořeny záporné a musí platit současně:

$$z_1 = \frac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} < -1 \qquad z_2 = \frac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} < -1$$

$$\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} < -2\theta_2 + \theta_1 \qquad -\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2} < -2\theta_2 + \theta_1$$

Dále jen pokud je $-2\theta_2 + \theta_1 > 0$,tj. $\theta_1 > 2\theta_2 > 0$, jinak první nerovnost nemůže platit nikdy

$$\theta_1^2 - 4\theta_2 < 4\theta_2^2 + \theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2 \qquad \theta_1^2 - 4\theta_2 < 4\theta_2^2 + \theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2$$

$$-\theta_2 < \theta_2^2 - \theta_1\theta_2 \qquad -\theta_2 < \theta_2^2 - \theta_1\theta_2$$

$$-1 < \theta_2 - \theta_1 \qquad -1 < \theta_2 - \theta_1$$

Potenciálním řešením je množina $2\theta_2 < \theta_1 < \theta_2 + 1$ při podmínkách $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$, $\theta_2 < \left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2$

Pokud je naopak $\theta_1 < 0$, pak jsou oba kořeny kladné a musí platit současně:

Potenciálním řešením je množina $2\theta_2 < \theta_1 < \theta_2 + 1$ při podmínkách $\theta_1 < 0, \theta_2 > 0$, $\theta_2 < \left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2$

Všem vyžadovaným restrikcím vyhovující řešení ale nemůže existovat, protože vzhledem k podmínkám $\theta_1 < 0, \theta_2 > 0$ nemůže platit $2\theta_2 < \theta_1$

b) Jsou-li kořeny komplexně sdružené pak musí být splněny podmínky

(A*) $\theta_1^2 - 4\theta_2 < 0$, **tedy** $\theta_1^2 < 4\theta_2$ **tj.** $\theta_1 < 2\sqrt{\theta_2}$ a současně $\left|\dfrac{-\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}\right| > 1$

Platí-li $\theta_2 < 0$, není podmínka (A*) splněna nikdy (a tedy **kořeny komplexně sdružené být nemohou**)

Pro případné **komplexně sdružené kořeny tedy musí platit** $\theta_2 > 0$.

Podmínka $\theta_1^2 > 4\theta_2$ **představuje zde relevantní omezení.**

Kořeny mají tedy tvar
$$z_1 = \frac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} = \frac{-\theta_1}{2\theta_2} + i.\frac{\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$$
$$z_2 = \frac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2} = \frac{-\theta_1}{2\theta_2} - i.\frac{\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}$$

Absolutní hodnoty obou komplexně sdružených kořenů spočteme jako

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{-\theta_1}{2\theta_2}\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2}}{2\theta_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\theta_1^2}{4\theta_2^2} + \frac{\theta_1^2 - 4\theta_2}{4\theta_2^2}} = \sqrt{\frac{2\theta_1^2 - 4\theta_2}{4\theta_2^2}} = \frac{1}{2\theta_2}\sqrt{2\theta_1^2 - 4\theta_2}$$

Podmínka představující požadavek, aby oba ležely vně jednotkového kruhu, je dána nerovností

$\dfrac{1}{2\theta_2}\sqrt{2\theta_1^2 - 4\theta_2} > 1$ **,neboli při kladném** $\theta_2 > 0$

$\sqrt{2\theta_1^2 - 4\theta_2} > 2\theta_2$ **tj.** $2\theta_1^2 - 4\theta_2 > 4\theta_2^2$ **tj.** $\theta_1^2 - 2\theta_2 > 2\theta_2^2$ **tj,** $\theta_1^2 > 2(\theta_2^2 + \theta_2)$

$|\theta_1| > \sqrt{2\theta_2(\theta_2 + 1)}$.

Takže obor komplexně sdružených kořenů je dán oborem kladných **parametrů** $\theta_1, \theta_2 > 0$

splňujících složené podmínky $\sqrt{2\theta_2(\theta_2 + 1)} < |\theta_1| < 2\sqrt{\theta_2}$.

Omezení vyplývající z toho (aby pravá strana intervalu přípustných hodnot musí být větší než levá)

$\sqrt{2\theta_2(\theta_2 + 1)} < 2\sqrt{\theta_2}$ $\quad 2\theta_2(\theta_2 + 1) < 4\theta_2$ $\quad 2\theta_2^2 < 2\theta_2$ **, tedy** $0 < \theta_2 < 1$.

Z omezení $0 < \theta_2 < 1$ **a** $|\theta_1| < 2\sqrt{\theta_2}$ **plyne, že** $|\theta_1| < 2$

Řešením je tedy oblast tvořící lichoběžník s body A = [-1,0], B = [1,0], D = [2, 1], E = [-2, 1],

c) Je-li kořen reálný dvojnásobný, pak musí být diskriminant nulový, tj. $\theta_1^2 - 4\theta_2 = 0$**, neboli** $\theta_1^2 = 4\theta_2$**, čili** $\theta_1 = 2\sqrt{\theta_2}$ **, což mj. implikuje, že** $\theta_2 > 0$ **V tomto případě je kořen roven** $z = (z_1 = z_2) = \dfrac{-\theta_1}{2\theta_2}$ **, tedy s respektováním podmínky** $\theta_1^2 = 4\theta_2$ **máme** $z = \dfrac{-2\theta_1}{\theta_1^2} = \dfrac{-2}{\theta_1}$.

Pokud $\theta_1 > 0$ **,je kořen** $z = \dfrac{-2}{\theta_1}$ **záporný a podmínka invertibility zní** $z = \dfrac{-2}{\theta_1} < -1$**. Odtud máme** $-2 < -\theta_1$**, neboli** $2 > \theta_1$**, tedy** $0 < \theta_1 < 2$ **(a k němu příslušný** θ_2 **musí být v rozmezí** $\theta_2 \in (0,1)$**)**

Pokud naopak $\theta_1 < 0$ **, je kořen** $z = \dfrac{-2}{\theta_1}$ **kladný a podmínka invertibility zní** $z = \dfrac{-2}{\theta_1} > 1$**. Odtud plyne** $-2 < \theta_1$**. , tedy** $-2 < \theta_1 < 0$ **(a k němu příslušný** φ_2 **musí ležet v rozmezí** $\theta_2 \in (0,1)$**) .**

Je třeba si ale uvědomit, že v těchto případech by byl proces $MA(2)$ **určen vlastně jen jedním parametrem, protože oba jsou pevně svázány vztahem** $\theta_1^2 = 4\theta_2$**.**

Autoregresní proces AR [autoregressive process]

obecný autoregresní proces řádu p se značí $AR(p)$ má tvar

(21) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots.. + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t = \phi(B).y_t + \varepsilon_t$$ **neboli**

(21A) $$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \ldots.. + \phi_p y_{t-p} = \phi(B).y_t = \varepsilon_t$$ **, kde**

$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ **jsou parametry a** $\phi(B) = 1 - \phi_1 B + \ldots - \phi_p B^p$ **je tzv. *autoregresní operátor*.** **Proces** $AR(p)$ zřejmě **vzniká useknutím lineárního procesu v bodě, který odpovídá velikosti zpoždění** p **.**

Proces $AR(p)$ je stacionární, jestliže všechny kořeny $z_1, z_2, \ldots, z_p$ polynomu $\phi(z)$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině (tj. pro všechna $|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_p| > 1$**), protože pak je splněn předpoklad (3). Proces má v tom případě nulovou střední hodnotu a jeho rozptyl je roven**

(22) $$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \ldots. - \phi_p\rho_p} .$$

ověření: Definiční vyjádření procesu (21) vynásobíme y_t, a uplatníme střední hodnotu:

$$y_t.y_t = \phi_1 y_t.y_{t-1} + \phi_2 y_t.y_{t-2} + \ldots.. + \phi_p y_t.y_{t-p} + y_t.\varepsilon_t$$

(23) $$Ey_t.y_t = \phi_1 Ey_t.y_{t-1} + \phi_2 Ey_t.y_{t-2} + \ldots.. + \phi_p Ey_t.y_{t-p} + Ey_t.\varepsilon_t .$$

Vztah (23) podělíme rozptylem veličiny y_t . Dostaneme:

$$\frac{E(y_t^2)}{\sigma_y^2} = \varphi_1 \frac{E(y_t.y_{t-1})}{\sigma_y^2} + \varphi_2 \frac{E(y_t.y_{t-2})}{\sigma_y^2} + \ldots.. + \varphi_p \frac{E(y_t.y_{t-p})}{\sigma_y^2} + \frac{E(y_t..\varepsilon_t)}{\sigma_y^2} .$$

Zřejmě máme $E(y_t^2) = \sigma_y^2$ **a** $\dfrac{E(y_t, y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \rho_k$ **, takže dostaneme**

$$1 = \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 + \ldots.. + \phi_p\rho_p + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} \text{, resp. } 1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \ldots.. - \phi_p\rho_p = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$

a po vynásobení obou stran strany rozptylem y_t

$$\sigma_y^2.(1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \ldots.. - \phi_p\rho_p) = \sigma_\varepsilon^2$$ **, z čehož plyne (22).** □ .

a jeho *autokorelační funkce* splňuje diferenční rovnici

(24) $$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \ldots. + \phi_p\rho_{k-p}$$ **pro** $k > 0$ **.**

Poznámka Pro odvození (24) stačí vynásobit všechny členy rovnosti (21) výrazem y_{t-k} / σ_y^2 a přejít ke středním hodnotám, přičemž vzhledem k možnosti vyjádření stacionárního $AR(p)$ procesu jako lineárního procesu (1), je $E(y_{t-k}.\varepsilon_t) = 0$ pro $k > 0$:

(21) $$\frac{y_t y_{t-k}}{\sigma_y^2} = \frac{\phi_1 y_{t-1} y_{t-k} + \phi_2 y_{t-2} y_{t-k} + \dots + \phi_p y_{t-p} y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k}}{\sigma_y^2}$$ a dále

$$\frac{E(y_t y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \frac{\phi_1 E(y_{t-1} y_{t-k}) + \phi_2 (y_{t-2} y_{t-k}) + \dots + \phi_p (y_{t-p} y_{t-k}) + \varepsilon_t y_{t-k}}{\sigma_y^2}$$, takže

$$\rho_k = \frac{E(y_t y_{t-k})}{\sigma_y^2} = \phi_1 \frac{E(y_{t-1} y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \phi_2 \frac{E(y_{t-2} y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \dots + \phi_p \frac{E(y_{t-p}, y_{t-k})}{\sigma_y^2} + \frac{E(\varepsilon_t, y_{t-k})}{\sigma_y^2}$$

Neboli $$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} + 0$$ □ .

Z teorie diferenčních rovnic přitom plyne, že její řešení (24) lze vyjádřit ve tvaru

(25) $$\rho_k = \alpha_1 z_1^{-k} + \alpha_2 z_2^{-k} + \dots + \alpha_p z_p^{-k}$$ pro $k \geq 0$, kde

$z_1, z_2, \dots, z_p$ jsou navzájem různé kořeny polynomu $\phi(z)$ s vlastnostmi

$|z_1|, |z_2|, \dots, |z_p| > 1$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ jsou pevné koeficienty:

a) Pokud jsou kořeny z_i, z_j ***komplexně sdružené*****, pak mohou být nahrazeny jediným členem tvaru** $\alpha . d^k . sin(\lambda k + \phi)$ **s** $0 < d < 1$.

b) Pokud kořeny z_i, z_j ***nejsou navzájem různé*****,** tzn. některý z nich je násobný, **pak se pro kořen** z_i **s násobností *r* ve vyjádření objeví** složitější **člen typu** $(\beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + .. \beta_r k^{r-1}) z_i^{-k}$**, který je však výrazně překrýván průběhem členu** z_i^{-k}. Tak či onak, je ***autokorelační funkce procesu*** $AR(p)$ **v podstatě lineární kombinací *klesajících geometrických posloupností* a *sinusoid různých frekvencí* s *geometricky klesajícími amplitudami*.**

soustava Yule-Walkerových rovnic

Jestliže zapíšeme výraz (23) jen pro $k = 1, 2, \dots, p$**, pak dostaneme tzv. soustavu Yuleových-Walkerových rovnic pro vyjádření parametrů** $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ **pomocí autokorelací** $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ **(a naopak).**

(26)
$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots\dots\dots\dots + \phi_p \rho_{p-1}$$
$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots\dots\dots\dots + \phi_p \rho_{p-2}$$
....
$$\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots\dots + \phi_p.$$

Soustava *Yuleových-Walkerových* rovnic umožňuje vypočíst hodnoty autokorelační funkce na základě znalosti parametrů autoregresního procesu obecně p-tého řádu $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ **jako řešení soustavy p lineárních rovnic o p neznámých** $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$.

Parciální autokorelační funkce ρ_{kk} **procesu** $AR(p)$ **má bod useknutí** k_0 **rovný řádu modelu** p**. To plyne přímo z definice parciální autokorelační funkce, což činí z této funkce důležitý nástroj pro identifikaci autoregresních procesů.**

Proces $AR(p)$ ***je vždy invertibilní.*** **Je to zřejmé, neboť (23) je již zápis tohoto modelu v invertovaném tvaru.**

Proces $AR(1)$ **- autoregresní proces 1. řádu**

(27) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$ **je stacionární při** $|\phi_1| < 1$

V tomto případě má nulovou střední hodnotu a rozptyl procesu $AR(1)$ **je roven**

(28) $$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2} .$$

Jeho *autokorelační funkce* má tvar

(29) $$\rho_k = \phi_1^k$$ **pro** $k = 0,1,2,3,\ldots$

ve tvaru geometricky klesající posloupnosti (oscilující pro záporné ϕ_1 **a bez bodu useknutí). Speciálně je pro** $k = 1$

(30) $$\rho_1 = \phi_1$$ **, což znamená, že**

$\rho_1 = \phi_1$ **první autokorelace procesu** $AR(1)$ **se rovná** právě **jeho autoregresnímu parametru. Proto důležitou roli v modelu hraje znaménko parametru** ϕ_1**.**

a) Pokud platí $\phi_1 > 0$ (pozitivní autokorelovanost)**, pak je patrná setrvačnost ve znaménkách sousedních hodnot (s relativně malým překřížením časové osy)**

b) Pokud platí $\phi_1 < 0$ (negativní autokorelovanost)**, pak to signalizuje relativně velmi časté přechody hodnot přes časovou osu, a velmi časté změny ve znaménkách sousedních hodnot časové řady.**

Parciální autokorelační funkce procesu $AR(1)$ **má tvar**

(31) $$\rho_{11} = \varphi_1 \quad , \quad \rho_{kk} = 0$$ **pro** $k > 1$

s bodem useknutí $k_0 = 1$ **.**

AR(1)-polynom má tvar $\phi(B) = 1 - \phi_1 B$**, tedy** $\phi(z) = 1 - \phi_1 z$**, po anulování** $\phi_1 z = 1$**, jediný reálný kořen AR (1)-polynomu je tedy roven** $z = 1/\theta_1$**. (**θ_1 **může být i záporné,** byť je to neobvyklé).

Má-li kořen tohoto polynomu *(pro stacionaritu)* ležet vně jednotkového kruhu, musí platit

(R1) $z = 1/\phi_1 < -1$ **nebo** **(R2)** $z = 1/\phi_1 > 1$

Podmínka (R1) může být splněna jen při záporném ϕ_1 **a při splnění** $\phi_1 > -1$

Podmínka (R2) může být splněna jen při kladném ϕ_1 **a při splnění** $\phi_1 < 1$**.**

Obě eventuality pokrývá souhrnná podmínka $|\phi_1| < 1$ **.**

Proces $AR(2)$ - autoregresní proces 2.řádu

(32) $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ je stacionární pro

(32A) $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$ $-1 < \phi_2 < 1$,

takže příslušná oblast stacionarity $AR(2)$ v rovině s vodorovnou osou pro hodnoty ϕ_1 a svislou osou pro hodnoty ϕ_2 vyplní vnitřek trojúhelníka s vrcholy $(-2,-1)$, $(0,1)$ a $(2,-1)$. V tom případě má proces $AR(2)$ nulovou střední hodnotu a rozptyl roven

(33) $$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2}.$$

a jeho autokorelační funkce má tvar

$$\rho_k = \frac{z_1^{-1}\left(1-z_2^{-2}\right)z_1^{-k} - z_2^{-1}\left(1-z_1^{-2}\right)z_2^{-k}}{\left(z_1^{-1}-z_2^{-1}\right)\left(1+z_1^{-1}z_2^{-1}\right)}$$ pro $k \geq 0$, kde

z_1, z_2 jsou navzájem různé kořeny polynomu $\phi(z)$ ($|z_1|,|z_2 > 1|$; pro dvojnásobný kořen je tvar funkce analogický), ρ_k nemá bod useknutí a má tvar lineární kombinace dvou geometricky klesajících posloupností nebo tvar sinusoidy s geometricky klesající amplitudou.

Parciální autokorelační funkce procesu $AR(2)$ má bod useknutí roven $k_0 = 2$.

AR(2)-polynom má tvar $\phi(B) = 1-\phi_1 B - \phi_2 B^2$, tedy $\phi(z) = 1-\phi_1 z - \phi_2 z^2$, po anulování $0 = 1-\phi_1 z - \phi_2 z^2$ neboli $\varphi_2 z^2 + \varphi_1 z - 1 = 0$.

Kořeny AR (2)-polynomu získáme jako řešení této kvadratické rovnice s podmínkou $|z_1|,|z_2 > 1|$ (pro reálný i komplexní případ).

Řešení (obecně komplexní) příslušné kvadratické rovnice je $z_1, z_2 = \dfrac{-\varphi_1 \pm \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}$.

a) Jsou-li kořeny reálné, různé, pak musí být splněny podmínky

(A) $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 > 0$, tedy $\varphi_1^2 > -4\varphi_2$ a zároveň (B) $\left|\dfrac{-\varphi_1 \pm \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}\right| > 1$, tedy

(B1) $\left|\dfrac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}\right| > 1$ a současně také (B2) $\left|\dfrac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}\right| > 1$

Pokud je $\varphi_2 > 0$, pak je podmínka (A) splněna vždy a neznamená reálné omezení.

První kořen $z_1 = \dfrac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}$ je kladný, protože (při kladném jmenovateli) má kladný čitatel.

Podmínka stacionarity je tedy: $\dfrac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} > 1$ neboli $-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} > 2\varphi_2$

$\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} > 2\varphi_2 + \varphi_1$ $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 > 4\varphi_2^2 + 4\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2$ $\varphi_2 > \varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2$ tj. $1 > \varphi_2 + \varphi_1$

Druhý kořen $z_2 = \frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}$ **je záporný, neboť** (při kladném jmenovateli) **má záporný čitatel** (bez ohledu na znaménko φ_1 odčítáme odmocninu, jejíž abs.hodnota je při $\varphi_2 > 0$ větší než abs.hodnota - φ_1.)

Podmínka stacionarity je tedy: $\frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} < -1$ **neboli** $-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} < -2\varphi_2$

$2\varphi_2 - \varphi_1 < \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}$ $4\varphi_2^2 + \varphi_1^2 - 4\varphi_2\varphi_1 < \varphi_1^2 + 4\varphi_2$ $\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 < \varphi_2$ **tj.** $\varphi_2 - \varphi_1 < 1$

Takže v tomto případě musejí parametry splňovat nerovnosti $1 > \varphi_2 + \varphi_1$ $\varphi_2 < 1 + \varphi_1$ $\varphi_2 > 0$.

Útvarem, který tato omezení pokrývá, je trojúhelník tvořený body A=[-1,0] , B=[1,0] a C= [0, 1]

Pokud je $\varphi_2 < 0$**, pak podmínka (A) představuje reálné omezení** $\varphi_1^2 > -4\varphi_2$ **neboli** $-\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2 < \varphi_2$.

Tento útvar je vymezen plochou ležící mezi (nad) parabolou $\varphi_2 = -\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2$ **a osou** $\varphi_2 = 0$

Znaménko prvního kořene $z_1 = \frac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}$ **závisí ale na znaménku parametru** φ_1**, přičemž absolutní hodnota výrazu v odmocnině je vždy menší než absolutní hodnota** φ_1**:**

Jestliže uvažujeme $\varphi_1 > 0$ (nacházíme se v pravém dolním kvadrantu),

- pak kořen z_1 **je kladný, protože** (při záporném jmenovateli) **má záporný čitatel .**

Podmínka stacionarity tedy zní $z_1 = \frac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} > 1$, **tj.** $-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} < 2\varphi_2$

$\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} < 2\varphi_2 + \varphi_1$, **tedy** $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 4\varphi_2^2 + 4\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2$ **,tedy** $\varphi_2 < \varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2$ **,tj.** $1 > \varphi_2 + \varphi_1$

- a kořen z_2 **je též kladný, protože** (při záporném jmenovateli) **má i tento záporný čitatel** (menší než parametr φ_1)

Podmínka stacionarity tedy zní $z_2 = \frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} > 1$, **tj.** $-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} < 2\varphi_2$

$-(2\varphi_2 + \varphi_1) < \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}$ **,tj.** $4\varphi_2^2 + 4\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2 < \varphi_1^2 + 4\varphi_2$ **,tedy** $\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2 < \varphi_2$, **neboli při** $\varphi_2 < 0$ **dostáváme** $\varphi_2 + \varphi_1 > 1$ **tj. nerovnost přesně opačnou než byla podmínka vyvozená pro kořen** z_1.

Jestliže uvažujeme naopak $\varphi_1 < 0$ (nacházíme se v levém dolním kvadrantu),

- pak kořen z_1 **je záporný, protože** (při záporném jmenovateli) **má kladný čitatel .**

Podmínka stacionarity zde tedy zní $z_1 = \frac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} < -1$ **tj** $-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} > -2\varphi_2$

$\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} > -2\varphi_2 + \varphi_1$, **tedy** $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 > 4\varphi_2^2 - 4\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2$ **,tj.** $\varphi_2 > \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2$ **a při** $\varphi_2 < 0$

$1 < \varphi_2 - \varphi_1$

- a kořen z_2 **je také záporný, protože** (při záporném jmenovateli) **má i tento kladný čitatel (menší než kořen** φ_1 **)**

Podmínka stacionarity tedy zní $z_2 = \frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} < -1$ **tj** $-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2} > -2\varphi_2$

$-\varphi_1 + 2\varphi_2 > \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}$,tj. $4\varphi_2^2 - 4\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2 > \varphi_1^2 + 4\varphi_2$, tedy $\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 > \varphi_2$, neboli při $\varphi_2 < 0$ dostáváme $\varphi_2 - \varphi_1 < 1$ tzn. nerovnost přesně opačnou než byla podmínka vyvozená pro kořen z_1.

Znamená to tedy, že pokud je $\varphi_2 < 0$ nelze ani v případě $\varphi_1 > 0$ ani v opačném případě $\varphi_1 < 0$ nalézt žádnou dvojici komplexně sdružených kořenů, která by vyhovovala podmínkám kladeným na stacionaritu procesu AR(2).

b) Jsou-li kořeny komplexně sdružené pak musí být splněny podmínky

(A*) $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 0$, tedy $\varphi_1^2 < -4\varphi_2$ tj. $-\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2 > \varphi_2$ a současně **(B)** $\left|\frac{-\varphi_1 \pm \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}\right| > 1$, tedy

(B1) $\left|\frac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}\right| > 1$ **a současně také (B2)** $\left|\frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}\right| > 1$

Zřejmě (pro komplexně sdružené kořeny) **nemůže být** $\varphi_2 > 0$, neboť podmínka **(A*)** by nebyla splněna nikdy

Pro případné **komplexně sdružené kořeny tedy musí platit** $\varphi_2 < 0$.

Podmínka $\varphi_1^2 < -4\varphi_2$ představuje zde relevantní omezení.

Kořeny mají tedy tvar

$$z_1 = \frac{-\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} = \frac{-\varphi_1}{2\varphi_2} + i.\frac{\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}$$

$$z_2 = \frac{-\varphi_1 - \sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2} = \frac{-\varphi_1}{2\varphi_2} - i.\frac{\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}$$

Absolutní hodnoty obou komplexně sdružených kořenů spočteme jako

$$|z_1, z_2| = \sqrt{\left(\frac{-\varphi_1}{2\varphi_2}\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}}{2\varphi_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\varphi_1^2}{4\varphi_2^2} + \frac{\varphi_1^2 + 4\varphi_2}{4\varphi_2^2}} = \sqrt{\frac{2\varphi_1^2 + 4\varphi_2}{4\varphi_2^2}}$$

Podmínka představující požadavek, aby oba ležely vně jednotkového kruhu, je dána nerovností

$\sqrt{\frac{2\varphi_1^2 + 4\varphi_2}{4\varphi_2^2}} > 1$, **tj.** $\frac{2\varphi_1^2 + 4\varphi_2}{4\varphi_2^2} > 1$, **tj.** $2\varphi_1^2 + 4\varphi_2 > 4\varphi_2^2$, **tj.** $\varphi_1^2 + 2\varphi_2 > 2\varphi_2^2$

neboli při záporném $\varphi_2 < 0$ $\varphi_1^2 > 2\varphi_2(\varphi_2 - 1)$, **tj.** $|\varphi_1| > \sqrt{2\varphi_2(\varphi_2 - 1)}$.

Vyšetřujeme tedy množinu bodů, pro které současně platí tyto tři nerovnosti:

$\varphi_1^2 > 2\varphi_2(\varphi_2 - 1)$, $\varphi_1^2 < -4\varphi_2$ **a také** $\varphi_2 < 0$

splňujících složené podmínky $\sqrt{2\varphi_2(\varphi_2 - 1)} < |\varphi_1| < 2\sqrt{-\varphi_2}$

Omezení vyplývající z toho (aby pravá strana intervalu přípustných hodnot byla větší než levá)

$2\varphi_2(\varphi_2 - 1) < \varphi_1^2 < -4\varphi_2$, **odtud** $2\varphi_2^2 < -2\varphi_2$, **tedy** $\varphi_2 > -1$.

Z hraniční podmínky pro $\varphi_2 = -1$ odtud dále vyplývá omezení pro φ_1:

$2(-1)(-1-1) \le \varphi_1^2 \le 4\sqrt{-(-1)}$ **tj.** $2 = \sqrt{4} \le |\varphi_1| \le 2\sqrt{1} = 2$

Takže obor komplexně sdružených kořenů je zde dán oborem parametrů φ_1, φ_2, kde $\varphi_2 < 0$ a kde se navíc φ_2 může pohybovat jen v rozmezí $\varphi_2 \in (-1,0)$ a φ_1 v rozmezí $\varphi_1 \in (-2,2)$. První nerovnost v prvním omezení pak ještě vede k podmínce $|\varphi_1| > \varphi_2 - 1$, která se projeví dvěma lineárními omezeními $\varphi_2 < \varphi_1 - 1$ a $\varphi_2 < \varphi_1 + 1$.

Řešením je tedy oblast tvořící lichoběžník s body A = [-1,0], B = [1,0], D=[-2, -1], E = [2, -1],

Útvarem, který pokrývá jak oblast dvojice reálných, tak komplexně sdružených kořenů, je trojúhelník tvořený body D=[-2, -1] , B=[1,0] a E = [2, -1],]

c) By-li by kořen reálný dvojnásobný, pak musí být diskriminant nulový, tj. $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 = 0$, neboli $\varphi_1^2 = -4\varphi_2$, čili $\varphi_1 = 2\sqrt{-\varphi_2}$, což mj. implikuje, že $\varphi_2 < 0$ V tomto případě je kořen roven $z = (z_1 = z_2) = \dfrac{-\varphi_1}{2\varphi_2}$, tedy s respektováním podmínky $\varphi_1^2 = -4\varphi_2$ máme $z = \dfrac{-\varphi_1}{-\dfrac{\varphi_1^2}{2}} = \dfrac{2}{\varphi_1}$.

Pokud tedy $\varphi_1 > 0$, je kořen $z = \dfrac{2}{\varphi_1}$ kladný a podmínka stacionarity zde zní $z = \dfrac{2}{\varphi_1} > 1$. Odtud plyne $\varphi_1 < 2$, tedy $0 < \varphi_1 < 2$ a k němu příslušný φ_2 musí ležet v rozmezí $\varphi_2 \in (-1,0)$

Pokud naopak $\varphi_1 < 0$, je kořen $z = \dfrac{2}{\varphi_1}$ záporný a podmínka stacionarity zní $\dfrac{2}{\varphi_1} < -1$. Odtud plyne $2 > -\varphi_1$. , tedy $-2 < \varphi_1 < 0$ a k němu příslušný φ_2 musí ležet v rozmezí $\varphi_2 \in (0,1)$.

Je třeba si ale uvědomit, že v těchto případech by byl proces $AR(2)$ určen vlastně jen jedním parametrem, protože oba jsou pevně svázány vztahem $\varphi_1^2 = -4\varphi_2$.

Smíšený proces ARMA [autoregressive and moving averages process]

Smíšený proces řádu p **a** q značený jako $ARMA(p,q)$ **má tvar:**

(41) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 .\varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q .\varepsilon_{t-q}$$ **neboli**

(41A) $$\phi(B) y_t = \theta(B) \varepsilon_t \ ,$$

kde operátory $\phi(B)$ **a** $\theta(B)$ **byly zavedeny v procesech** $AR(p)$ **a** $MA(q)$**. Podmínka stacionarity (resp. invertibility) smíšeného procesu** $ARMA(p,q)$ **je shodná s podmínkou procesu** $AR(p)$ **(resp. invertibility procesu** $MA(q)$**.)**

Stacionární proces $ARMA(p,q)$ **má nulovou střední hodnotu a jeho autokorelační funkce splňuje diferenční rovnici**

(42) $$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + ... + \phi_p \rho_{k-p} \text{. pro } k \geq q+1$$

s řešením

(43) $$\rho_k = \alpha_1 z_1^{-k} + \alpha_2 z_2^{-k} + ... + \alpha_p z_p^{-k} \text{ pro } k \geq max(0, q-p+1),$$

kde $z_1, z_2, ..., z_p$ **jsou navzájem různé kořeny polynomu** $\phi(z), (|z_1|, |z_2|, ..., |z_p|) > 1$**.**

Autokorelační funkce procesu $ARMA(p,q)$ **nemá bod useknutí a je** v podstatě **lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami, ale s výjimkou počátečních hodnot** $\rho_0, \rho_1, \rho_2, ... \rho_{q-p}$ (tato výjimka se uplatní jen v případě $q \geq p$) **.**

Parciální autokorelační funkce procesu $ARMA(p,q)$ **nemá bod useknutí a je omezena lineární kombinací klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami, ale s výjimkou počátečních hodnot** $\rho_{00}, \rho_{11}, \rho_{22}, ... \rho_{p-q,p-q}$ (výjimka se uplatní, jen když $p \geq q$).

Proces $ARMA(1,1)$ **je představován zápisem**

(44) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

a je stacionární pro $|\phi_1| < 1$ **. V tom případě má nulovou střední hodnotu a rozptyl roven**

(45) $$\sigma_y^{\,2} = \frac{1 + \theta_1^{\,2} + 2\varphi_1 \theta_1}{1 - \varphi_1^{\,2}} .\sigma_\varepsilon^{\,2} \ .$$

ověření (45): **Z definice procesu** $ARMA(1,1)$ **ve (44) víme, že platí**

$$y_t . y_t = (\varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}).(\varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) \text{, takže}$$

$$E y_t . y_t = E(\varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2 \text{ , po roznásobení pak}$$

$$E(y_t)^2 = \varphi_1^{\,2} E(y_{t-1})^2 + E(\varepsilon_t)^2 + \theta_1^{\,2} E(\varepsilon_{t-1})^2 + 2\varphi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_t) + 2\theta_1 E(\varepsilon_{t-1}.\varepsilon_t) + 2\theta_1 \varphi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1}.)$$

Z nekorelovanosti y_{t-1} **vůči** ε_t **a** ε_t **vůči** ε_{t-1} **dostáváme** $E(y_{t-1}.\varepsilon_t) = 0$ **a** $E(\varepsilon_{t-1}.\varepsilon_t) = 0$

(46) $$E(y_t)^2 = \varphi_1^{\,2} E(y_{t-1})^2 + \sigma_\varepsilon^{\,2} + \theta_1^{\,2} \sigma_\varepsilon^{\,2} + 2\theta_1 \varphi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1}.)$$

Vztah (46) nyní podělíme rozptylem veličiny y_t Dostaneme:

$$\frac{E(y_t^2)}{\sigma_y^2}=\frac{\varphi_1^2 E(y_{t-1}^2)}{\sigma_y^2}+\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}+\frac{\theta_1^2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}+\frac{2\theta_1\varphi_1 E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1})}{\sigma_y^2}$$ a následně, protože

$E(y_{t-1}^2)=\sigma_y^2$ a $E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1})=E(\varepsilon_{t-1}.\varepsilon_{t-1})=\sigma_\varepsilon^2$

(47) $$1=\phi_1^2+\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}+\frac{\theta_1^2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}+\frac{2\theta_1\phi_1\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}$$, po úpravě

$$(1-\phi_1^2)\sigma_y^2=\sigma_\varepsilon^2+\theta_1^2\sigma_\varepsilon^2+2\theta_1\phi_1\sigma_\varepsilon^2$$

a následně obdržíme shodu s (45)

$$\sigma_y^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2+\theta_1^2\sigma_\varepsilon^2+2\theta_1\varphi_1\sigma_\varepsilon^2}{(1-\varphi_1^2)}=\frac{(1+\theta_1^2+2\theta_1\varphi_1)}{(1-\varphi_1^2)}.\sigma_\varepsilon^2.$$.

a má autokorelační funkci

(48) $$\rho_1=\frac{(1+\varphi_1\theta_1)(\varphi_1+\theta_1)}{1+\theta_1^2+2\varphi_1\theta_1}.$$

(49) $$\rho_k=\phi_1.\rho_{k-1}.\qquad \text{pro}\quad k\geq 2$$

bez bodu useknutí ve tvaru klesající geometrické posloupnosti s výjimkou ρ_0

ověření (48):

podle (....) a (44) máme

(50) $$\rho_1=\frac{cov(y_t,y_{t-1})}{\sigma_y.\sigma_{y-1}}=\frac{E(y_t y_{t-1})}{\sigma_y^2}=\frac{E(\phi_1 y_{t-1}+\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}).(\phi_1 y_{t-2}+\varepsilon_{t-1}+\theta_1\varepsilon_{t-2})}{\sigma_y^2}$$

Výraz v čitateli předchozího zlomku (50) lze rozepsat následovně:

$$E(\varphi_1 y_{t-1}+\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}).(\varphi_1 y_{t-2}+\varepsilon_{t-1}+\theta_1\varepsilon_{t-2})=$$

$$\begin{aligned}&=E(\varphi_1^2 y_{t-1}y_{t-2})+E(\varphi_1 y_{t-1}\varepsilon_{t-1})+E(\varphi_1 y_{t-1}\theta_1\varepsilon_{t-2})\\&+E(\varepsilon_t\varphi_1 y_{t-2})+E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})+E(\varepsilon_t.\theta_1\varepsilon_{t-2})+\\&+E(\theta_1\varepsilon_{t-1}.\varphi_1 y_{t-2})+E(\theta_1.\varepsilon_{t-1}^2)+E(\theta_1^2\varepsilon_{t-1}.\varepsilon_{t-2})\end{aligned}$$

Vyjádříme-li jednotlivé členy předchozího devítičlenu, dostaneme:

(c1) $$E(\varphi_1^2 y_{t-1}y_{t-2})=\varphi_1^2.E(y_{t-1}y_{t-2})=\varphi_1^2\rho_1.\sigma_y^2=\varphi_1^2\rho_1.\frac{1+\theta_1^2+2\varphi_1\theta_1}{1-\varphi_1^2}.\sigma_\varepsilon^2$$

(c2) $$E(\varphi_1 y_{t-1}\varepsilon_{t-1})=\varphi_1.E(y_{t-1}\varepsilon_{t-1})=\varphi_1.\sigma_\varepsilon^2$$

protože $E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-1})=E(\varphi_1 y_{t-2}+\varepsilon_{t-1}+\theta_1\varepsilon_{t-2}.\varepsilon_{t-1})=E(\varepsilon_{t-1})^2=\sigma_\varepsilon^2$

(c3) $$E(\varphi_1 y_{t-1}.\theta_1\varepsilon_{t-2})=\varphi_1\theta_1.E(y_{t-1}\varepsilon_{t-2})=\varphi_1\theta_1(\varphi_1+\theta_1).\sigma_\varepsilon^2$$

$$\begin{aligned}&E(y_{t-1}.\varepsilon_{t-2})=E(\varphi_1 y_{t-2}+\varepsilon_{t-1}+\theta_1\varepsilon_{t-2}.\varepsilon_{t-2})=E(\varphi_1 y_{t-2}\varepsilon_{t-2})+E(\varepsilon_{t-1}.\varepsilon_{t-2})+\theta_1 E(\varepsilon_{t-2}.\varepsilon_{t-2})=\\&=\varphi_1 E(y_{t-2}\varepsilon_{t-2})+0+\theta_1\sigma_\varepsilon^2=(\varphi_1+\theta_1).\sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

protože $E(y_{t-2}.\varepsilon_{t-2})=E(\varphi_1 y_{t-3}+\varepsilon_{t-2}+\theta_1\varepsilon_{t-3}.\varepsilon_{t-2})=E(\varepsilon_{t-2})^2=\sigma_\varepsilon^2$

(c4) $E(\varepsilon_t \varphi_1 y_{t-2}) = \varphi_1 . E(\varepsilon_t y_{t-2}) = 0$ v důsledku nekorelovanosti ε_t a y_{t-2}.

(c5) $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0$ v důsledku nekorelovanosti ε_t a ε_{t-1}.

(c6) $E(\varepsilon_t \theta_1 \varepsilon_{t-2}) = \theta_1 . E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) = 0$ v důsledku nekorelovanosti ε_t a ε_{t-2}

(c7) $E(\theta_1 \varepsilon_{t-1} \varphi_1 y_{t-2}) = \theta_1 \varphi_1 . E(\varepsilon_{t-1} . y_{t-2}) = 0$ v důsledku nekorelovanosti ε_{t-1} a y_{t-2}.

(c8) $E\left(\theta_1 \varepsilon_{t-1}{}^2\right) = \theta_1 E\left(\varepsilon_{t-1}{}^2\right) = \theta_1 . \sigma_\varepsilon{}^2$

(c9) $E\left(\theta_1{}^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}\right) = \theta_1{}^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) = 0.$ v důsledku nekorelovanosti ε_{t-1} a ε_{t-2}

Nyní postupně vše nenulové dosadíme do (50) :

$$\rho_1 = \frac{\phi_1{}^2 . \rho_1 . \sigma_y{}^2 . \sigma_\varepsilon{}^2 + \phi_1 \sigma_\varepsilon{}^2 + \phi_1 \theta_1{}^2 . \sigma_\varepsilon{}^2 + \phi_1 \theta_1 (\phi_1 + \theta_1) \sigma_\varepsilon{}^2 + \theta_1 \sigma_\varepsilon{}^2}{\sigma_y{}^2}$$

$$\rho_1 = \frac{\left[\phi_1{}^2 . \rho_1 . \sigma_y{}^2 + \phi_1 + \phi_1 \theta_1 (\phi_1 + \theta_1) + \theta_1\right] \sigma_\varepsilon{}^2}{\sigma_y{}^2}$$

$$\rho_1 \sigma_y{}^2 = \left[\phi_1{}^2 . \rho_1 . \sigma_y{}^2 + \phi_1 + \phi_1 \theta_1 (\phi_1 + \theta_1) + \theta_1\right] \sigma_\varepsilon{}^2$$

$$\rho_1 \sigma_y{}^2 (1 - \phi_1{}^2) = [\phi_1 + \phi_1 \theta_1 (\phi_1 + \theta_1) + \theta_1] . \sigma_\varepsilon{}^2$$

$$\rho_1 = \frac{[\phi_1 + \phi_1 \theta_1 (\phi_1 + \theta_1) + \theta_1] . \sigma_\varepsilon{}^2}{\sigma_y{}^2 (1 - \phi_1{}^2)}$$

Dále dosadíme z (45) $\sigma_y{}^2 \left(1 - \varphi_1{}^2\right) = \left(1 + \theta_1{}^2 + 2 \varphi_1 \theta_1\right) \sigma_\varepsilon{}^2$ a konečně máme

$$\rho_1 = \frac{[\varphi_1 + \varphi_1 \theta_1 (\varphi_1 + \theta_1) + \theta_1] \sigma_\varepsilon{}^2}{\left(1 + \theta_1{}^2 + 2 \varphi_1 \theta_1\right) \sigma_\varepsilon{}^2} = \frac{(1 + \varphi_1 \theta_1)(\varphi_1 + \theta_1)}{\left(1 + \theta_1{}^2 + 2 \varphi_1 \theta_1\right)} .$$

(50) $$\rho_k = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sigma_y . \sigma_{y-k}} = \frac{E(y_t y_{t-k})}{\sigma_y{}^2} = \frac{E(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}).(\phi_1 y_{t-k} + \varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})}{\sigma_y{}^2}$$

Výraz v čitateli předchozího zlomku (50) lze rozepsat následovně:

$$E(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}).(\phi_1 y_{t-k} + \varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1}) =$$

$$= E\left(\phi_1{}^2 y_{t-1} y_{t-k}\right) + E(\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_{t-k}) + E(\phi_1 y_{t-1} . \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})$$
$$+ E(\varepsilon_t \phi_1 y_{t-k}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) + E(\varepsilon_t . \theta_1 \varepsilon_{t-k-1}) +$$
$$+ E(\theta_1 \varepsilon_{t-1} . \phi_1 y_{t-k}) + E(\theta_1 . \varepsilon_{t-1} . \theta_1 . \varepsilon_{t-k}) + E\left(\theta_1{}^2 \varepsilon_{t-1} . \varepsilon_{t-k-1}\right)$$

Při $k \geq 2$ je všech 6 posledních členů rovných nule. První člen je roven

$$E\left(\phi_1{}^2 y_{t-1} y_{t-k}\right) = \phi_1{}^2 . E(y_{t-1} y_{t-k}) = \phi_1{}^2 . \rho_{k-1} . \sigma_y{}^2$$

$$E(\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_{t-k}) = \phi_1 E(y_{t-1} . \varepsilon_{t-k}) = \phi_1 E(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k}) =$$

$$= \phi_1{}^2 E(y_{t-2} . \varepsilon_{t-k}) + \phi_1 \theta_1 . E(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k}) = \phi_1{}^2 E(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k}) + \phi_1 \theta_1 E(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-k})$$

$$E(\phi_1 y_{t-1} . \theta_1 \varepsilon_{t-k-1}) = \phi_1 \theta_1 . E(y_{t-1} . \varepsilon_{t-k-1}) =$$

$$\phi_1 \theta_1 . E(\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} . \varepsilon_{t-k-1}) = \phi_1{}^2 \theta_1 . E(y_{t-2} \varepsilon_{t-k-1}) + \phi_1 \theta_1{}^2 E(\varepsilon_{t-2} . \varepsilon_{t-k-1})$$

Podmínkou invertibility procesu $ARMA(1,1)$ je $|\phi_1| < 1$.

Parciální ρ_{kk} autokorelační funkce procesu $ARMA(1,1)$ je omezena klesající geometrickou posloupností počínaje od ρ_{11} .

Zobecnění stacionární proces s úrovňovou konstantou

Dosud uvedené stacionární procesy se vyznačovaly nulovou střední hodnotou. Jejich zobecnění pro situace, kdy je střední hodnota nenulová (ale zůstává v čase neměnná) **není však nijak obtížné:**

Vezmeme-li

Proces klouzavých součtů řádu $MA(q)$ se střední hodnotou μ má tvar

(51) $$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \mu + \theta(B).\varepsilon_t$$

Smíšený proces $ARMA(p,q)$ se střední hodnotou μ má tvar

(52)
$$y_t - \mu = \phi_1 (y_{t-1} - \mu) + \phi_2 y_{t-2} + ... + \phi_p (y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1 .\varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q .\varepsilon_{t-q}$$

neboli

(52A) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 .\varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q .\varepsilon_{t-q}$$ **, kde**

$$\alpha = (1 - \phi_1 - \phi_2 - .... - \phi_p).\mu$$

Konstrukce modelů v Boxově-Jenkinsově metodologii

***Podobně jako v ekonometrii,* sestává úplná tvorba modelu v *Boxově-Jenkinsově metodologii* z následujících třech kroků:**

(A) identifikace modelu Znamená to např. že pro analyzovanou časovou řadu $y_1, y_2, ..., y_n$ identifikujeme jí adekvátní model $AR(1)$

(B) odhad parametrů (kvantifikace) modelu. V rámci modelu $AR(1)$ se (dejme tomu) **jedná o model tvaru $y_t = 0{,}72 y_{t-1} + \varepsilon_t$ při $\sigma_\varepsilon^2 = 8{,}92$**

(C) diagnostika modelu. V rámci odhadnutého modelu v (b) je tento model verifikován na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ a prověří se jeho verifikační schopnosti.

Pokud diagnostické výsledky z kroku (C) nejsou dostatečně přesvědčivé, je potřebné všechny tři kroky zopakovat pro alternativní model (často se ale jedná jen o korekci zamítnutého modelu, ke které nám provedená diagnostika poskytla dílčí návod).

(A) - Identifikace modelu

Příspěvek *autokorelační a parciální autokorelační funkce* k identifikaci modelu:

Obecnější poznatky o tvaru autokorelační a parciální autokorelační funkce stacionárních a invertibilních procesů $AR(p)$, $AR(q)$, $ARMA(p,q)$ přináší tabulka:

	$AR(p)$	$MA(q)$,	$ARMA(p,q)$
ρ_k	**neexistuje** k_0 ρ_k **ve tvaru U-křivky**	$k_0 = q$	**neexistuje** k_0 ρ_k **ve tvaru U-křivky** **po prvních *q-p* hodnotách**
ρ_{kk}	$k_0 = p$ ρ_k **omezená U-křivkou**	**neexistuje** k_0	ρ_k **omezená U-křivkou** **po prvních *p-q* hodnotách**

Odpovídající identifikační postup pak spočívá v prohlídce grafického záznamu odhadnutého *korelogramu* a *parciálního korelogramu* modelované časové řady, kdy se snažíme řadě přiřadit nejvhodnější typ modelu právě pomocí charakteristik z tabulky. V případě pochybností testujeme potenciální bod useknutí k_0 **pomocí *Bartlettovy aproximace* s přibližným (asymptotickým) kritickým oborem (nejčastěji na hladině** $\alpha = 0{,}05$**) pro autokorelační funkci**

(53) $$|r_k| \geq 2.\sqrt{\frac{1}{n}\left(1 + 2.\sum_{j=1}^{k_0} r_j^{\,2}\right)}$$ **pro některé** $k > k_0$

Druhou možností je aplikovat *Quenouilleovu aproximaci* s kritickým oborem (na hladině $\alpha = 0{,}05$**) pro parciální autokorelační funkci**

(54) $$|r_{kk}| \geq 2.\sqrt{\frac{1}{n}}$$ pro některé $k > k_0$.

Identifikace pomocí informačních kritérií

Jde o modernější přístup k identifikaci, který snižuje míru subjektivity posuzování analytika a v jistém smyslu identifikaci automatizuje. K problému identifikace obecného modelu $ARMA(p,q)$ pro danou časovou řadu se zde přistupuje jako k problému odhadu parametrů p,q na základě optimalizačního kritéria

(60) $$(\hat{p},\hat{q}) = \underset{(k,l)}{arg\,min}\, A(k,l)$$ **, kde**

$A(k,l)$ **je vhodné kritérium, k jehož konstrukci musíme pro danou řadu odhadnout model $ARMA(k,l)$, přičemž minimalizaci provádíme pro předem zvolenou síť hodnot $k = 0,1,2,...,K \quad l = 0,1,2,...,L$.**

Adekvátnější než předchozí postup (60) je však uplatnit některé z *kritérií teorie informace*, kdy se penalizují zbytečně vysoké řády *l* a *k* a často tak docílit u odhadů jejich konzistence. Nejběžnější kritéria založená na tomto principu jsou

(A) AKAIKEho informační kritérium **[Akaike information criterion 1974]**

(61) $$AIC(k,l) = ln\,\hat{\sigma}^2{}_{k,l} + 2.\frac{k+l}{n}$$

(B)SCHWARTZovo *informační* ***kritérium*** **[Schwartz** (Bayesian) **information criterion 1978]**

(62) $$SIC(k,l) = ln\,\hat{\sigma}^2{}_{k,l} + ln(n).\frac{k+l}{n}$$

(C) Hannanovo-Quinnovo kritérium **[Hannan-Quinn information criterion 1979]**

(63) $$SIC(k,l) = ln\,\hat{\sigma}^2{}_{k,l} + 2\,ln(ln(n)).\frac{k+l}{n}$$

(A) modifikované AKAIKEho informační kritérium **[Hurwich a Tsai criterion 1989]**

(64) $$AICC(k,l) = ln\,\hat{\sigma}^2{}_{k,l} + 2.\frac{k+l}{1-\frac{k+l+1}{n}}.\frac{1}{n}$$ **pro krátké řady, kde**

$\hat{\sigma}^2{}_{k,l}$ **je odhadnutý rozptyl bílého šumu procesu $ARMA(p,q)$ a v čitateli druhého členu je počet odhadovaných parametrů (se započtením eventuálně nenulové úrovňové konstanty μ, přičemž n je délka dané řady). Korektně by ale místo prvních členů v (61), resp. (62) měla být použita minimální hodnota logaritmované věrohodnostní funkce daného modelu vynásobená koeficientem (-2/n).**

Kritérium BIC **sice poskytuje** silně **konzistentní odhad řádu modelu (který konverguje skoro jistě, tj. s pravděpodobností 1), ale s velkým rozptylem (tj. odhad ale postrádá vydatnost).**

U *kritéria AIC* je tomu přesně naopak: příslušný odhad řádu modelu je zde bohužel **nekonzistentní, ale je vydatný.**

Odhad parametrů ARMA modelu

V počáteční fázi kvantifikace modelu se postupuje tak, že se využijí existující vztahy mezi parametry daného modelu a jeho autokorelacemi, kdy např. v modelu $AR(1)$ platí, že $\phi_1 = \rho_1$. Takovéto odhady odvozené z momentů se však zpravidla považují jen za předběžné a slouží tedy jako počáteční odhady pro vlastní odhadové procedury, prováděné většinou iteračně vhodnou numerickou metodou.

model	momentové odhady	kontrolní nerovnosti pro r_k
$AR(1)$	$\hat{\phi}_1 = r_1$, $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2{}_y\left(1-\hat{\phi}_1 r_1\right)$	$\lvert r_1\rvert < 1$
$AR(2)$	$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2} r_1$, $\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1-r_1^2}$ $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2{}_y\left(1-\hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2\right)$	$\lvert r_2\rvert < 1$, $r_1^2 < \frac{1+r_2}{2}$
$MA(1)$	$\hat{\theta}_1 = \frac{1-\sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2{}_y}{1+\hat{\theta}_1^2}$	$\lvert r_1\rvert < 1/2$
$MA(2)$	$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = 0{,}1$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2{}_y}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2}$	$r_1 + r_2 > -1/2$ $r_2 - r_1 > -1/2$ $r_1^2 < 4r_2\left(1-2r_2\right)$
$ARMA(1,1)$	$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1}$, $\hat{\theta}_1 = \frac{\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - 4}}{2}$	$2r_1^2 - \lvert r_1\rvert < r_2 < \lvert r_1\rvert$

$$\hat{b} = \frac{1-2r_2+\hat{\phi}_1^2}{r_1 - \hat{\phi}_1} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2{}_y{}^*}{1+\hat{\theta}_1^2}$$ **, kde** $$\hat{\sigma}^2{}_y{}^* = \sum_{t=1}^{n}\frac{\left(y_t{}^* - \bar{y}^*\right)}{n}, kde\ y_t{}^* = y_t - \phi_1 y_{t-1}$$

Dílčí doplnění DM: Jak patrno, momentové odhady vycházejí ze vztahů vyvozených pro teoretické hodnoty mezi parametry a rozptyly $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_y^2$, jenže jsou uvažovány „inverzně“:

Např. vzorec pro rozptyl bílého šumu u procesu MA (1) $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_y^2}{1+\theta_1^2}$ je vyvozen z výrazu pro rozptyl σ_y^2 procesu MA(1) $\sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta_1^2\right)$ uplatněného ve vzorci pro autokorelační funkci tohoto procesu.

Stejně tak je tomu u procesu MA (2) $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2{}_y}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$,neboť zde $\sigma_y^2 = \sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)$.

Podobně, vzorec pro rozptyl bílého šumu u procesu AR (1) $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_y^2(1-\varphi_1 r_1)$ je vyvozen ze vztahu (28) $\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi_1^2}$ pro výpočet rozptylu tohoto procesu s uvážením toho, že navíc platí $\rho_1 = \varphi_1$

Stejně tak je tomu u procesu AR (2) $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2{}_y}{1-\varphi_1^2-\varphi_2^2}$,neboť zde $\sigma_y^2 = \sigma^2{}_\varepsilon\left(1-\varphi_1 r_1 - \varphi_2 r_2\right)$.

Odhadové procedury pro konstrukci finálních odhadů v uvažovaných modelech **jsou vysloveně záležitostí metod nasazených v příslušném software. Např. v** $AR(p)$ **modelu zapsanému ve tvaru**

(21) $$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots.. + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

lze použít klasický OLS-odhad spolu s klasickým OLS-odhadem jeho kovarianční matice, který je za předpokladu stacionarity procesu konzistentní. Lze totiž ukázat, že regresory v (21) splňují podmínku $\underset{T\to\infty}{plim}\left(\frac{1}{T}X'X\right) = V$, **kde *V* je regulární matice a** stejně tak ***i podmínku ortogonality*** $\underset{T\to\infty}{plim}\left(\frac{1}{T}X'\varepsilon\right) = 0$. **Z vyjádření stacionárního procesu** $AR(p)$ **ve tvaru lineárního procesu (1) speciálně plyne, že**

(63) $$cov(y_{t-1}, \varepsilon_t) = cov(y_{t-2}, \varepsilon_t) = \ldots = cov(y_{t-p}, \varepsilon_t) = 0.$$

V případě stacionárního a invertibilního $ARMA(p,q)$ **modelu (vyjádřeného pro jednoduchost s nulovou střední hodnotou)**

(41) $$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots.. + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

se nejčastěji používají *NLLS –odhady* realizované pomocí některé z *metod Gauss-Newtonovy třídy*.
Příslušná *NLLS –odhadová procedura* zde spočívá v minimalizaci součtu čtverců

(64) $$\min_{\phi_1,\ldots,\phi_p,\theta_1,\ldots,\theta_q} \sum_{t=p+1}^{n} e_t(\phi_1,\ldots,\phi_p,\theta_1,\ldots,\theta_q)^2$$ **, kde**

$$e_t(\phi_1,\ldots,\phi_p,\theta_1,\ldots,\theta_q) = e_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \ldots.. - \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

pro $t = p+1, p+2, \ldots, n$ **s vhodně zvolenými hodnotami** $e_{p-q+1}, e_{p-q+2}, \ldots\ldots e_p$.

Odhad rozptylu bílého šumu σ_ε^2 **se potom obvykle získá tak, že minimální hodnotu (64) vydělíme délkou řady *n*. Za předpokladu normality a při dost velkém *n* jsou odhadové výsledky** velmi **blízké ML-odhadu** (podmíněnému volbou $e_{p-q+1}, e_{p-q+2}, \ldots\ldots e_p$) **získanému maximalizací** logaritmované ***věrohodnostní funkce***

(65) $$L^*(\phi_1,\ldots.,\theta_q) = -\frac{n-p}{2} ln(2\pi) - \frac{n-p}{2} ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^{n} e_i(\phi_1,\ldots.,\theta_q)$$ [3]

[3] Poznámka **výchozí** (nelogaritmovaná) **věrohodnostní funkce má tvar**

$$L(\phi_1,\ldots.,\theta_q) = \prod_{t=1}^{n-p} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^{n} e_i(\phi_1,\ldots.,\theta_q)^2\right\}$$

Tabulka: Přibližné hodnoty směrodatných odchylek odhadnutých parametrů ve vybraných stacionárních a invertibilních **modelech Boxovy-Jenkinsovy metodologie:**

$AR(1)$	$\hat{\sigma}(\phi_1)=\sqrt{\dfrac{1-\hat{\phi}_1^{\,2}}{n}}$
$AR(2)$	$\hat{\sigma}(\phi_1)=\hat{\sigma}(\hat{\phi}_2)=\sqrt{\dfrac{1-\hat{\phi}_2^{\,2}}{n}}$
$MA(1)$	$\hat{\sigma}(\theta_1)=\hat{\sigma}(\hat{\phi}_2)=\sqrt{\dfrac{1-\theta_1^{\,2}}{n}}$
$MA(2)$	$\hat{\sigma}(\hat{\phi}_1)=\hat{\sigma}(\hat{\theta}_2)=\sqrt{\dfrac{1-\hat{\theta}_2^{\,2}}{n}}$
$ARMA(1,1)$	$\hat{\sigma}(\phi_1)=\sqrt{\dfrac{(1-\hat{\phi}_1^{\,2})(1+\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1)^2}{n(\hat{\phi}_1+\hat{\theta}_1)^2}}$ $\quad\hat{\sigma}(\hat{\theta}_1)=\sqrt{\dfrac{(1-\hat{\theta}_1^{\,2})(1+\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1)^2}{n(\hat{\phi}_1+\hat{\theta}_1)^2}}$.

Diagnostika modelu

Diagnostika modelu je v rámci *Box-Jenkinsovy metodologie* velmi **propracovaná. Spočívá v tom, že pomocí různých diagnostických/verifikačních nástrojů ověřujeme adekvátnost sestaveného modelu** (tj. prověřujeme, zda je skutečně konformní s analyzovanými daty)**. Přitom obvykle musíme brát v úvahu několik aspektů:**

1. kontrola stacionarity modelu.

Především zde kontrolujeme, zda odhadnutý model skutečně splňuje *podmínku stacionarity*, tj. zda kořeny jeho odhadnutého autoregresního polynomu leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině (resp. zda ekvivalentně jejich převrácené hodnoty, což jsou kořeny autoregresního polynomu zapsaného s opačným uspořádáním mocnin leží uvnitř takovéhoto kruhu). Je také možné řadu rozdělit do několika úseků a testovat shodnost odhadnutých úrovní, rozptylů a autokorelací (popř. momentů vyšších řádů, zejména šikmost mezi jednotlivými úseky).

Jiný postup (tzv. *impuls response*) spočívá v analýze toho, jakou odezvu má v odhadnutém modelu impuls m (většinou standardizovaný na velikost jedno nebo vícenásobek směrodatné odchylky bílého šumu), který nastal v jediném časovém okamžiku nebo opakovaně od daného časového okamžiku a přirozeně určuje následné hodnoty procesu – odhadnutá ARMA struktura se převede do tvaru lineárního procesu (1) a od daného okamžiku se sem dosazuje *inovační proces* s jedinou nenulovou hodnotu v tomto okamžiku nebo *inovační proces* se stále stejnými nenulovými hodnotami od tohoto okamžiku. Je-li analyzovaná řada stacionární, měla by s rostoucí časovou vzdáleností od okamžiku impulsů:

(1) odezva pro jediný impuls postupně odeznít až na nulovou hodnotu

(2) odezva pro opakovaný impuls se stabilizovat na určité (nenulové) **úrovni.**

2. kontrola struktury ARMA procesu

Rozumí se jí především *shoda korelační struktury odhadnuté z dat* (tj. autokorelační a parciální autokorelační funkce) s korelační strukturou vypočtenou z odhadnutého modelu, který ověřujeme. Jiná kontrola struktury modelu souvisí s testováním nekorelovanosti pro vypočtený bílý šum pomocí *Q-testů*. (nazývaných také jako *portmanteau testy*)

3. grafická prohlídka vypočteného bílého šumu

Velmi důležitým diagnostickým nástrojem je vypočtený bílý šum $e_t = \hat{\varepsilon}_t$ z odhadnutého modelu řady (analogicky jako rezidua v regresním model). Jeho *grafický průběh*, odhadnutý *korelogram* apod. mohou indikovat případné vady modelu (ve standardní situaci obvykle očekáváme pro vypočtený bílý šum nulovou hodnotu, konstantní rozptyl, nekorelovanost a normalitu).

4. Testování nekorelovanosti bílého šumu

Používá se např. *Batlettova aproximace* nebo *Q-testy*.

Typy nestacionarity

V podstatě lze rozlišit dva základní typy nestacionarity:

1) Deterministická nestacionarita představovaná deterministickým trendem, např.:

(71) $$y_t = \alpha + \beta . t + \varepsilon_t$$ **, kde ε_t je bílý šum s rozptylem $\sigma_\varepsilon{}^2$**

Po eliminaci tohoto (lineárního) **trendu se řada stane stacionární** (v daném případě ve formě bílého šumu)**.**

2) Stochastická nestacionarita představovaná určitým typem stochastického procesu pro y_t nebo ε_t, např. $AR(1)$:

(72) $$y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t$$ **, kde ε_t je** opět **bílý šum s rozptylem $\sigma_\varepsilon{}^2$, kde se obvykle předpokládá, že $\varepsilon_t \approx i.i.d.$ Nestacionaritu (72) lze** v jistých případech modelovat pomocí speciálních stochastických modelů a s využitím těchto modelů **následně stacionarizovat. Konkrétně model (72) je tzv. *náhodná procházka s driftem* [random walk with drift]. Příslušnou časovou řadu lze v tomto případě jednoduše stacionarizovat přechodem k řadě prvních diferencí Δy_t , protože dle modelu (71) je**

(73) $$\Delta y_t = \alpha + \varepsilon_t$$ **, tzn. jedná se o bílý šum posunutý na úroveň α, což je evidentně stacionární řada. Podstata stochastické nestacionarity modelu (72) je ale lépe viditelná při jeho přepisu do tvaru**

(74) $$y_t = y_1 + \alpha.(t-1) + \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau \text{ .}$$

Řada má tedy nejen deterministický trend (zde lineární se sklonem α), ale také stochastický trend spočívající v postupné kumulaci hodnot bílého šumu.

Interpretačně zajímavé jsou také podmíněné hodnoty:

(75) $$E(\Delta y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1) = \alpha$$

(76) $$E(y_t|y_1) = y_1 + \alpha.(t-1), \quad var(y_t|y_1) = \sigma^2(t-1) \quad corr(y_{t-k}, y_t|y_1) = \sqrt{\frac{t-k-1}{t-1}}$$:

ověření: $$E(y_t|y_1) = E\left(y_1 + \alpha.(t-1) + \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau |y_1\right) = y_1 + \alpha.(t-1) + \sum_{\tau=2}^{t}(E\varepsilon_\tau = 0) = y_1 + \alpha.(t-1)$$

ověření: $$var(y_t|y_1) = var\left(y_1 + \alpha.(t-1) + \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau |y_1\right) = var\left(\sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau |y_1\right) = \sum_{\tau=2}^{t}(var\, \varepsilon_\tau |y_1) = \sigma^2(t-1)$$

ověření: $$corr(y_{t-k}, y_t|y_1) = corr\left(y_1 + \alpha.(t-k-1) + \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_{\tau-k} |y_1|, y_1 + \alpha.(t-1) + \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau |y_1\right) =$$
$$corr\left(\sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_{\tau-k} |y_1|, \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau |y_1\right) = \sqrt{\frac{t-k-1}{t-1}}$$

Ze vztahu (75) je vidět, že řada má tendenci nevracet se k předchozí úrovni, ale v průměru směřovat k vyšším hodnotám pro $\alpha > 0$ nebo k nižším hodnotám pro $\alpha < 0$. I kdyby platilo $\alpha = 0$, pak tato náhodná procházka bez driftu protne na rozdíl od bílého šumu vodorovnou osu s nulovou úrovní jen zřídka. Ze vztahů(76) zase vyplývá, že střední hodnota a rozptyl (volatilita) této řady jsou neomezené, zatímco autokorelační funkce má hodnoty velmi blízké jedné a k nule klesá tempem pomalejším než lineárním.

Poznámka 1 Uvažujme poněkud obecnější zápis vztahu (72)

(72*) $$y_t = \alpha + \phi_1 . y_{t-1} + \varepsilon_t$$.

Je patrné, že (72*) je speciální zápis (72*) při $\phi_1 = 1$. Je-li $\phi_1 < 1$,pak se zřejmě jedná o stacionární proces $AR(1)$ s nenulovou střední hodnotou $\mu = \frac{\alpha}{1-\phi_1}$

(77) $$y_t - \mu = \phi_1 .(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$. , který lze také přepsat pomocí prvních diferencí jako

(78) $$\Delta y_t = (\phi_1 - 1).(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$.

Pro podmíněnou střední hodnotu (75) stacionárního procesu $AR(1)$ tedy zřejmě platí:

(79A) $$E(\Delta y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) < 0 \ pro \ y_{t-1} > \mu$$,

(79B) $$E(\Delta y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) > 0 \ pro \ y_{t-1} < \mu$$, tzn. na rozdíl od *náhodné procházky s driftem* má nyní proces tendenci nedriftovat a vracet se k předchozí úrovni [tzv. mean reverting] . Konečně zbývající případ $|\phi_1| > 1$ je již velmi neobvyklý a specifický, minimálně se vyskytující v reálných situacích: v tomto případě se jedná o *explozívní proces* [tzv. explosive process], který roste s mocninami ϕ_1^k - např. proces $y_t = 3y_{t-1} + \varepsilon_t$ začne být od určitého času t srovnatelný s deterministickou posloupností 3^t bez ohledu na tvar bílého šumu ε_t.

Poznámka 2 Pro předchozí modely ještě jednou odlišnost jejich stacionarizace:

V modelu (71) $y_t = \alpha + \beta.t + \varepsilon_t$ s deterministickým trendem pro dosažení stacionarity stačí pomocí regrese eliminovat trend. Diferencování by se zde pro stacionarizaci nemělo používat, neboť vede k modelům s reziduální složkou ve tvaru (neinvertibilního) MA-procesu

(80) $$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

V modelu (72) $y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t$ náhodné procházky s driftem stačí pro dosažení stacionarity jednou diferencovat. Pokud jde o případnou regresní eliminaci stochastického trendu, není zde jasné, co vlastně eliminovat. Mohli bychom sice přejít k ještě obecnějšímu rozšíření modelu (77) do tvaru

(77*A) $y_t = \alpha + \beta t + \phi_1 . y_{t-1} + \varepsilon_t$. nebo $\Delta y_t = \alpha + \beta t + (\phi_1 - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$

s deterministickým i stochastickým trendem, ale zde by případná eliminace trendu pomocí regrese narazila na již zmíněný problém, že t-poměr nemusí mít (ani asymptoticky) t-rozdělení Model (77*) ze také zapsat ve tvaru

$$y_t - \beta_0 + \beta_1 t = \phi_1 . (y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 (t-1)) + \varepsilon_t \text{ , kde } \beta_1 = \frac{\beta}{1-\phi_1} \text{ , } \beta_0 = \frac{\alpha - \phi_1 \beta_1}{1 - \phi_1} \text{ ,}$$

tzn., že speciálně při $|\phi_1| < 1$ se vlastně jedná o stacionární AR(1) proces s lineárním trendem.

Testy na jednotkový kořen [unit root tests]

Možnost stacionarizace časové řady pomocí diferencování svědčí o přítomnosti (přibližně) jednotkového kořene v autoregresním operátoru příslušného modelu. Např. v modelu (72) má autoregresní operátor zřejmě jako svůj jediný kořen právě kořen rovný 1. Rozhodnutím o přítomnosti takovéhoto jednotkového kořene (nebo vícenásobného) je často klíčovým bodem analýzy. Na přítomnost jednotkového kořene by asi bylo možné soudit z tvaru odhadnutého korelogramu, kdy indikací jeho přítomnosti je velmi pomalý pokles korelogramu od jednotkové hodnoty k nule (jednotlivé odhadnuté autokorelace s rostoucí délkou řady konvergují v nestacionárním modelu k jedné). Protože ale subjektivním pohledem na korelogram by se nedaly odlišit nestacionární modely typu $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ od stacionárních s téměř jednotkovým kořenem $y_t = 0{,}96\, y_{t-1} + \varepsilon_t$, je žádoucí použít vyvinuté statistické testy na příslušné hladině významnosti.

Dickey-Fullerův test

Dickey-Fullerův test byl prvním z testů vyvinutých pro testování jednotkového kořen. Přitom byly navrženy tři jeho verze označované souhrnně jako τ-testy.

(1) τ-test tvaru $H_0 : y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ proti alternativě $H_1 : y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ pro $\phi_1 < 1$, tzn. *jednostranný test náhodné procházky proti stacionárnímu* $AR(1)$ *procesu,* neboť případná nestacionarita při $\phi_1 \le -1$ je v realitě málo významná.

(2) τ **-test tvaru** $H_0 : y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ **proti alternativě** $H_1 : y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ **pro** $\phi_1 < 1$**,tzn. *jednostranný test náhodné procházky proti*** $AR(1)$ ***procesu s nenulovou*** **hladinou.**

(3) τ **-test tvaru** $H_0 : y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ **proti alternativě** $H_1 : y_t = \alpha + \beta.t + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ **pro** $\phi_1 < 1$ **, tzn. *jednostranný test náhodné procházky proti*** $AR(1)$ ***procesu s lineárním trendem.***

Zápis nulové hypotézy je pro všechny tři vyšetřované případy tentýž, tzn.:

(81) $$H_0 : \Delta y_t = \psi.y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{při } \psi = 0 ,$$

zatímco obecný zápis alternativy je

(82) $$H_1 : \Delta y_t = \alpha + \beta t + \psi.y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{při } \psi < 0 ,$$

kde $\psi = \varphi_1 - 1$ **a**

(1) $\alpha = \beta = 0$

(2) $\beta = 0$

Přitom v případě alternativ (2) nebo (3) jde jen o to, zda $\psi < 0$ **a vůbec nás nezajímá případná významnost úrovňové konstanty** α **ani parametru sklonu** β**, tím spíše ne jejich číselné hodnoty, které by při výskytu *nestacionarity* stejně nemusely být korektně spočteny.**

Testovou statistikou je ve všech třech variantách *Dickey-Fullerova testu* klasický *t-poměr* (prostě se testuje významnost regresního parametru ψ **v modelu (81) tzn.**

$DF = \dfrac{\hat{\psi}}{\hat{\sigma}(\hat{\psi})}$ **, kde odhady parametrů získáme metodami získanými dříve a s kritickým oborem**

$$DF \le t_{1-\alpha}{}^*(n) \; .$$

Zde však (za platnosti nulové hypotézy stacionarity) <u>statistika DF nemá</u> <u>(a to ani asymptoticky a ani při platnosti $\varepsilon_t \approx i.i.d.$)</u> **<u>t-rozdělení jako v případě klasického t.-poměru, ale má nestandardní</u>** <u>(a nepojmenované)</u> **<u>rozdělení, pro které bylo nutné kritické hodnoty naprogramovat simulačně</u> a zvlášť pro jednotlivé typy alternativ (1),(2),(3) a pro různé délky řad n. viz tabulka níže.**

Obecně zde platí, že dané rozdělené má tlustší konce než příslušné *t-rozdělení*, takže jeho kritické hodnoty jsou v absolutní hodnotě více než dvojnásobně v porovnání s odpovídajícími hodnotami t-rozdělení.

Např. 5% kritická hodnota a při $n \to \infty$ **je kritická hodnota -3,41 v absolutní hodnotě více než 2x větší než adekvátní kritická hodnota -1,645 po klasický t-test), tj. pro zamítnutí nulové hypotézy** $\psi = 0$ **proto potřebujeme významnější hodnotu t-poměru** (pracujeme totiž s nestacionárním regresorem). **Kritické hodnoty uvedli poprvé již *Dickey* a *Fuller*, většina software ale využívá sofistikovanější výpočet odpovídajících p-hodnot podle McKinnona [1996].**

hladina významnosti	10%=0,1	5%=0,05	1%=0,01
kritické hodnoty pro τ-test	-1,62	-1,95	-2,58
kritické hodnoty pro τ_{μ}-test	-2,57	-2,86	-3,43
kritické hodnoty pro τ_{τ}-test	-3,12	-3,41	-3,96

Rozšířený Dickey-Fullerův test

Předchozí test je aplikovatelná jen tehdy, jestliže reziduální složka představuje nezávislý bílý šum. Jestliže závisle proměnná Δy_t obsahuje autokorelovanost, která není v modelu – řádně zohledněna, potom má *DF-test* chybu prvního druhu (tj.pravděpodobnost zamítnutí H_0) větší než deklarované α. Pro takový případ byl navržen Rozšířený Dickey-Fullerův test (ADF-test) [augmented DF-test], který místo (81) formuluje nulovou hypotézu jako

(83) $$H_0 : \Delta y_t = \psi . y_{t-1} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{pro} \quad \psi = 0 \ ,$$

Přičemž testová statistika a kritické hodnoty pro jednotlivé varianty (1),(2),(3) tj. po τ-test, τ_{μ}-test, τ_{τ}-test zůstávají stejné jako před rozšířením (test se opět týká jen parametru ψ, přidané autoregresní členy v jen absorbují dynamickou strukturu obsaženou v závisle proměnné. Pro stanovení řádu p přidaných autoregresních členů se doporučuje aplikovat informační kritéria uvedená výše.

Phillipsův-Perronův test

PF_test je podobný ADF –testu s tou odlišností, že zohlednění případné neuatokorelovanosti reziduí se neprovádí rozšířením o autoregresní člen jako tam, ale přímo korekcí odhadnuté směrodatné odchylky ve jmenovateli původního *DF-testu*. V podstatě se jedná o aplikaci *Neweyové-Westova odhadu* typu HAC (typu *heteroskedasticity and autocorrelation consistent estimator*), jako v případě autoregresního modelu s autokorelovanými reziduy.

KPSS-test [Kwaitkovski, Phillips, Schmidt, Shin [1992]

Tento test reaguje na skutečnost, že *DF-test* někdy mívá slabou rozlišovací schopnost. Má-li teoretický model tvar $y_t = 0{,}96 y_{t-1} + \varepsilon_t$, pak by nulová hypotéza jednotkového kořene měla být zamítnuta. Nelze-li ji zamítnout, pak to korektně znamená, že buď opravdu platí nestacionarita nebo že máme k zamítnutí jen nepostačující informaci (např. jen krátký úsek řady $y_t = 0{,}96 y_{t-1} + \varepsilon_t$). *KPSS-test* byl proto navržen tak, že hypotézy H_0, H_1 mají tvar přesně opačný, než jak je tomu u *ADF-testu* (jako nulová se testuje stacionarita vůči alternativní hypotéze nestacionarity). Přitom se doporučuje provádět *ADF-test* a *KPSS-test* vždy simultánně a za směrodatný brát pouze takový výstup, kdy

(a) $_{ADF}H_0$ se zamítá a současně $_{KPSS}H_0$ zamítnout nelze (v tom případě je potvrzena stacionarita)

(b) $\underline{{}_{ADF}H_0}$ **nelze zamítnout a současně** $\underline{{}_{KPSS}H_0}$ **se zamítá** **(v tom případě je potvrzena nestacionarita). Zbývající dvě kombinace výsledků se berou jako neprůkazné. Uvedené testy na jednotkový kořen (včetně dalších bývají součástí moderních softwarových testovacích systémů.**

Proces ARIMA

Pro časové řady se stochastickým trendem typu (72) , které lze stacionarizovat diferencováním, jsou v rámci Box-Jenkinsovy metodologie určeny procesy ARIMA.

Integrovaný smíšený proces řádu p,d,q značený jako $ARIMA(p,d,q)$ **[integrated]** **má tvar**

(84) $$\phi(B)w_t = \alpha + \theta(B)\varepsilon_t.$$

(84A) $$w_t = \Delta^d y_t.$$

je d-tá diference časové řady $y_t.$ **a tento proces je stacionární (i invertibilní) model** $ARIMA(p,q)$ **. Jiným i slovy: V takovém modelu ARIMA se nejprve provede stacionarizace pomocí vhodné diference modelované řady a takto vzniklá již stacionární řada se modeluje pomocí smíšeného modelu ARMA. Nezřídka se ovšem pro** $ARIMA(p,d,q)$ **volí souhrnný zápis tvaru**

(85) $$\phi(B)\Delta^d y_t. = \alpha + \theta(B)\varepsilon_t.$$

Speciálním případem je integrovaný *I(d)* proces zapisovaný obvykle v jednoduchém tvaru $\Delta^d y_t. = \varepsilon_t.$**, který vlastně vzniká načítáním bílého šumu /odtud „integrovaný") např. pro** $d = 1$ **je**

(86) $$y_t = y_1 + \sum_{\tau=2}^{t} \varepsilon_\tau.$$

Poznámka3: Tzv. *driftový parametr* α **modeluje případnou nenulovou úroveň procesu** w_t **tj. deterministický trend ve tvaru polynomu d-tého řádu pro původní řadu** y_t**. Pro** $\alpha = 0$ **a** $d > 0$ **je model ARIMA pro řadu** y_t **invariantní vůči případnému posunu řady o libovolnou konstantu. Proto je v tomto případě zbytečné řadu modelovanou jako ARIMA nejprve centrovat odečtením výběrového průměru.**

Poznámka4: Operátor $\phi(B)\Delta^d$ **na levé straně (85) se někdy nazývá *zobecněný autoregresní operátor*. Je pro něj charakteristické to, že odpovídající polynom** $\phi(z)\Delta^d$ **má p kořenů ležících vně jednotkového kruhu v komplexní rovině a navíc d-násobný jednotkový kořen. Obecnějším typem jsou modely ARUMA , které mají aspoň jeden z těchto kořenů na jednotkové kružnici , ale různý od jednotkového kořene, a explozivní modely , které mají aspoň jeden z těchto kořenů uvnitř jednotkového kruhu.**

Konstrukce modelu $ARIMA(p,d,q)$ je založena na tvorbě stacionárního modelu $ARMA(p,q)$ pro příslušně diferencovanou časovou řadu (přitom ale nesmíme opomenout případnou počáteční transformaci řady za účelem její linearizace, která se provádí ještě před diferencováním). Řád diferencování d přitom v realitě obvykle nepřekročí dvojku (rutinní časové řady ekonomického a finančního charakteru obvykle mívají $d=1$ a speciálně řady spotřebitelských indexů či nominálních mezd mohou někdy mít $d=2$. Možností, jak stanovit řád diferencování d pro analyzovanou řadu, jsou zejména:

- *testy na jednotkový kořen*
- *subjektivní prohlídka řad $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$ a jejich odhadnutých korelogramů a parciálních korelogramů* – speciálně pomalý (lineární) pokles odhadnutých autokorelací je indikací pro další diferencování řady
- *porovnání výběrových směrodatných odchylek* (*volatilit*) řad $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
- volí se ten řád diferencování, který odpovídá případu s nejmenší *volatilitou*; při vyšších hodnotách se však volatility mohou začít s navyšováním d d růst a mluví se pak o tzv. *prediferencování*.
- - aplikace *informačních kritérií* modifikovaných pro modely $ARIMA$.