Metoda exponenciálního vyrovnávání[1]

[R.G.Brown-R.F.Meyer]

Je dalším z přístupů, který je řazen (vedle metody klouzavých průměrů) **k adaptivním technikám určení trendové složky časové řady .**

Výchozí úvahou této techniky je, že se k predikci nové hodnoty časové řady :

a) berou v úvahu všechna dostupná pozorování časové řady

b) starší pozorování jsou z hlediska síly ovlivnění aktuálních předpovědí bràna s nižší významností než pozorování nová (aktuální).

Váhová struktura, která je při *Brownově exponenciálním vyrovnávání* uplatněna, je představována geometrickým rozdělením. Váhy jsou tedy stanoveny podle vzorce

(1) $$w_i = (1-\alpha).\alpha^i$$

Je patrné, že váhy splňují podmínku $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$**, neboť**

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha).\alpha^i = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1.$$

Nechť nepřekvapí, že váhová struktura se řídí rozdělením, které je definováno na neomezeném oboru, přestože počet pozorování časové řady, kterým jsou váhy přiřazovány je vždy konečný - z matematického hlediska nepředstavuje tato okolnost žádný problém.

Název exponenciální by odpovídal zespojitění situace, neboť obdobou diskrétního geometrického rozdělení je ve spojitém případě rozdělení exponenciální. *Název tedy nemá nic společného s exponenciálním průběhem trendu.*

Podobně jako *metoda klouzavých průměrů* je i *exponenciální vyrovnávání* založeno na lokáním vyrovnání časové řady jednoduchou matematickou křivkou (na rozdíl od metody klouzavých průměrů se však vzatá pozorování neváží „symetricky„).

Podle typu vyrovnávající křivky rozlišujeme tři základní verze tohoto postupu :

1. **Jednoduché (konstantní) exponenciální vyrovnávání (lokálně vyrovnávající křivkou je** po částech ***konstantní funkce***).
2. **Dvojité** (také **lineární) exponenciální vyrovnávání (zde je lokálně vyrovnávající křivkou *lineární funkce***).
3. **Trojité** (také **kvadratické) exponenciální vyrovnání (uplatňuje se parabola 2. stupně lokálně vyrovnávající křivkou *kvadratická funkce***)

---

[1] **Postup všech typů exponenciálního vyrovnávání je zevrubně popsán v monografii:**
Brown,R.,G.: Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series. *London, Prentice-Hall 1963.* **popř. v článku**
Brown,R.,G.,Meyer, R.,F.“: The fundamental theory of exponential smoothing. *Operations Research 9/1961 str. 673-684.*

Všechny verze exponenciálního vyrovnávání se opírají o následující úvahu :

V kterémkoliv bodě (pevně zvoleném okamžiku *t*) máme k dispozici jednak :

- **poslední pozorování analyzované časové řady,** tedy y_t
- **předpověď téhož pozorování** y_t^* **(určenou** dříve **na základě předtím**, tj. do času t-1 **dostupných pozorování, tedy do hodnoty** y_{t-1} **včetně).**

Předpověď pro "opravenou hodnotu" $\hat{y}_t$ **tedy** nyní **vytvořme pomocí váženého průměru**

(2) $$\hat{y}_t = \alpha.y_t + (1-\alpha).\hat{y}_{t-1}$$

tzn. že ***nová předpověď je konstruována jako vážený aritmetický průměr skutečné hodnoty "nového" pozorování*** y_t ***a „staré„ předpovědi tohoto pozorování y***

tzn. že ***nová předpověď je konstruována jako vážený aritmetický průměr skutečné hodnoty "nového" pozorování*** y_t ***a „staré„ předpovědi tohoto pozorování*** y_t* (při informaci dostupné do okamžiku *t-1* včetně). **Hodnota "váhové" konstanty** α **rozhoduje o tom, které z obou uplatňujících se informací přisoudíme větší význam (resp. v jaké proporci budeme tyto informace brát).**

Opakovanou substitucí dostáváme ze vztahu (2) výraz

$$\hat{y}_t = \alpha.y_t + (1-\alpha)[\alpha.y_{t-1} + (1-\alpha)\hat{y}_{t-2}] = \alpha.y_t + \alpha.(1-\alpha).y_{t-1} + (1-\alpha^2)\hat{y}_{t-2}$$

$$\hat{y}_t = \alpha.y_t + \alpha.(1-\alpha).y_{t-1} + (1-\alpha^2)[\alpha.y_{t-2} + (1-\alpha).\hat{y}_{t-3}]$$

$$\hat{y}_t = \alpha.y_t + \alpha.(1-\alpha).y_{t-1} + (1-\alpha)^2\alpha.y_{t-2} + (1-\alpha)^3\hat{y}_{t-3}$$ atd., až po

(3) $$\hat{y}_t = \alpha.y_t + (1-\alpha).\alpha.y_{t-1} + \ldots + (1-\alpha)^{n-1}\alpha.y_{t-n+1} + (1-\alpha)^n\hat{y}_{t-n}$$

Při dostatečně velkém n (teoreticky pro n $\to \infty$) **dospějeme k nekonečnému součtu**

(4) $$\hat{y}_t = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha.(1-\alpha)^j\hat{y}_{t-j}$$ **, což je**

vlastně ***aritmetický průměr*** (o nekonečném počtu členů) ***„vyrovnaných hodnot"*** **s vahami ve tvaru (1) .**

Výraz (2) $\hat{y}_t = \alpha.y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}$ **, kde** $\alpha = 1-\beta$ **je vyrovnávací konstanta**

lze dále **jednoduchou úpravou přepsat na tvar**

$$\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} + \alpha.(y_t - \hat{y}_{t-1}) = \hat{y}_{t-1} + \alpha.(y_t - \hat{y}_t(t-1)) = \hat{y}_{t-1} + \alpha.d_t,$$

který bývá nazýván jako chybový či korekční:

pro opravu předchozí vyrovnané hodnoty $\hat{y}_{t-1}$ **použijeme (jakmile dostaneme pozorování** y_t **) příslušně upravenou chybu předpovědi dt o jeden krok dopředu (konstruovanou v čase t -1)**

(2´) $$y_t{}^* = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j} + \alpha d_{t-1}{}^*$$ **, kde** $d_{t-1}{}^* = y_{t-1}{}^* - y_t$

což lze interpretovat tak, že novou předpověď y_t * **pro** y_t **dostaneme jako součet**

skutečné hodnoty pozorování y_t **a určitého (100xα) procentního podílu chyby předpovědi** d_{t-1}^{*} **téže veličiny** y_t **určené na základě informací známých jen do minulého období** ***t-1*** (predikce je sestrojená toliko z hodnot $y_1,\dots,y_{t-1}$) **.**

Důležitou otázkou je v tomto kontextu volby „vyrovnávající konstanty„ α**: zpravidla se omezujeme na rozsah mezi (0,1 – 0,3). Někdy je však vyrovnávací konstanta pojímána jako doplněk** α **do 1, stanoví se tedy** $\gamma \in (0{,}9\,;\,0{,}7)$**.** ***Čím je hodnota*** γ ***blíže k 1 tím váhy přiřazované jednotlivým pozorováním směrem do minulosti klesají pomaleji.***

O rychlosti klesání dává představu toto srovnání s konstantou γ**:**

k =	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		**10**
Srovnejme:	**0,9**	**0,81**	**0,729**	**0,6561**	**0,59049**	**0,531441**	**………………...**	**0,34868**
	0,8	**0,64,**	**0,512**	**0,4096**	**0,32768**	**0,262144**	**………………...**	**0,1342177**
	0,7	**0,49,**	**0,343**	**0,2401**	**0,16807**	**0,117649**	**………………...**	**0,02709**

Zatímco podíl vah u nejčerstvějších (nezpožděných) **pozorování je 9/7 = 1,2857 : 1, je u desátých pozorování** (tj. se zpožděním 9) **tento poměr již 0,3487/ 0282 tj. 12,34/1**

,7	0,49	0,343	0,2401	0,16807	0,117649	0,082354	0,057648	0,040354	0,028248
0,9	0,81	0,729	0,6561	0,59049	0,531441	0,478297	0,430467	0,38742	0,348678

Přirozenou otázkou je, zda existují užitečná **vodítka pro určení konstanty** α **:**

a) Pravidla vyvozená ze statistických požadavků na odhady obecně **:**

a1) Jedna možnost vychází z volby vyrovnávací konstanty ze vztahu

(5) $\dfrac{1}{n}=\dfrac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}$ **odkud pro dané n dostaneme** $\alpha_0=\dfrac{n}{n+2}$

a2) Další z možností vychází z variantního modelu **(vyrovnání parabolou** ***k-tého*** **řádu), na základě kterého se volí** α_0 **tak, aby vyhovovalo vztahu**

(6) $1-\alpha_0=(1-\alpha_k)^{k+1}$ α_k je tzv. **ekvivalentní vyrovnávací konstanta.**

a3) Ještě jiná možnost vychází z **nejlépe vyrovnávajícího** (pozorované hodnoty časové řady) **klouzavého průměru délky** d**. Pak se stanoví** α **jako**

pro konstantní/jednoduché exponenciální vyrovnávání a stejně tak

(7A) pro **<u>dvojité exponenciální vyrovnávání</u>** **(klouzavý průměr)** $\alpha=\dfrac{d-1}{d+1}$

(7B) pro trojité exponenciální vyrovnávání [2] $\alpha=\sqrt{\dfrac{d-1}{d+1}}$**, kde**

d **je délka (počet členů) nejlépe vyrovnávajícího klouzavého průměru .**

b) Simulační způsob: interval 0,7 - 1 se rozdělí např. na 30 úseků po 0,01, provedou se predikce na několik kroků dopředu, ***spočte se průměrná*** *nebo střední* ***kvadratická chyba predikce a vyhledá se taková hodnota*** α***, při které je tato chyba predikce nejmenší.***

Poznámka: **Výpočtové vzorce** (zejména ***u trojitého exponenciálního vyrovnávání***) **jsou** již **natolik** (technicky) **složité, že je uživatel zpravidla odkázán na některý ze softwarových produktů určených k analýze časových řad,** které zpravidla všechny tři verze exponenciálního vyrovnávání obsahují. **Proto je daleko vhodnější pořídit si příslušné software *(STATGRAPHICS, SPSS, RATS* apod.*)*, než pracně počítat hodnoty vyrovnání a předpovědí** (rekurentně) **tabulkovými procesory, kalkulačkou nebo dokonce ručně.**

Komparační zhodnocení: **čím je vyrovnávací konstanta α vzdálenější od 1** (tedy blíže k nule)**, tím je vyrovnání flexibilnější a provedená následná predikce vykazuje vyšší rozkolísanost.**

Podobný rys vykazuje také *trojité exponenciální vyrovnávání* ve srovnání s *dvojitým* a zejména vůči *jednoduchému*, které dává velmi rigidní předpovědi (tj. po částech konstantním trendem) .

1. Jednoduché (konstantní) exponenciální vyrovnávání

Formulace modelu je založena na představě, že pro dané pevné t a hodnoty zpoždění $j = 0,1,2,3,\ldots$ lze uplatnit konstantní trend tvaru

(11) $$Tr_{t,t-j} = \hat{y}_t = \beta_{t0}$$ pro **j = 0, 1, 2, 3, …., kde**

β_{t0} **je** (jediný) **neznámý parametr. Tato domněnka** (o konstantnosti vývoje) **není příliš realistická, avšak jednoduchost modelu (11) umožňuje přiblížit postup odhadu parametrů β_t. i u složitějších modelů.**

Výchozím předpokladem modelu (11) je tedy trend ve tvaru *po částech konstantní funkce*.

Minimalizační kritérium *má zde tvar*

(12) $$\underset{\beta_{t0}}{Min}\, G(y, \beta_{t0}, \alpha) = (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \left(y_{t-j} - \beta_{t0}\right)^2 \alpha^j$$

ve kterém se uplatňuje trendový model tvaru $Tr_{ti} = \beta_{t0}$ **(** tedy ***konstantní trend*** **).**

Odhad b_{t0} parametru β_{t0} realizovaný *váženou metodou nejmenších čtverců* (*WLS*) je pak **dán vztahem**

(13) $$b_{t0} = (1-\alpha) . \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j y_{t-j}$$

ověření: Derivací výrazu (12) podle β_{t0} dostaneme:

(12A) $$\frac{\partial(G(y, \beta_{t0}, \alpha))}{\partial b_{t0}} = (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} 2.\left(y_{t-j} - b_{t0}\right)(-1)\alpha^j$$

Upravíme-li krácením $2(\alpha - 1)$ a položíme-li derivaci rovnou nule, dostaneme

(12A) $$\sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j}\alpha^j = b_{t0} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j$$

Pak s využitím toho, že součet řady $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{1}{1-\alpha}$, obdržíme (13). .

U tohoto typu mohou být vysloveny námitky, že model s konstantním trendem (11) je pro většinu reálných situací stěží použitelný, poněvadž trend časové řady se zpravidla vyvíjí jiným způsobem než *po částech* ***konstantní funkcí.***

(14) vyrovnání pro aktuální období $(\tau = 0)$ **:** $\hat{y}_t = \beta_{t0}$

(15) predikce na τ období dopředu $(\tau > 0)$ **:** $\hat{y}_{t+\tau} = y_t$

Předpovídané hodnoty na libovolné období dopředu jsou *tedy* ***shodné s poslední pozorovanou hodnotou*** *(je zřejmé, že tato zásada není vhodná pro situace, kdy časová řada vykazuje jakýkoliv znatelný trend)****.***

Lze ještě užít tzv. *chybový vzorec:*

(14A) $$\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} + \alpha\left(\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1}\right) = \hat{y}_{t-1} + \alpha\left(\hat{y}_t - \hat{y}_t(t-1)\right) = \hat{y}_{t-1} + \alpha . d_t$$

V případě ***dvojitého*** *a* ***trojitého*** ***exponenciálního vyrovnávání je užitečné definovat dvě** tzv.* ***"vyrovnávací statistiky" : - viz*** Hindls, Hronová, Novák

(61a) $$S_t = (1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j .y_{t-j}$$ ***jednoduchá vyrovnávací statistika***

(62b) $$S_t{}^* = (1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j y_{t-j}$$ ***dvojitá vyrovnávací statistika***

Pro tyto vyrovnávací statistiky platí následující rekurentní vztahy :

(63a) $$S_t = (1-\alpha)y_t + \alpha.S_{t-1}$$

(63b) $$S_t{}^{[2]} = (1-\alpha)S_t + \alpha.S_{t-1}{}^{[2]}$$

ověření (63a) , (63b):

Levou stranu (63a) lze vyjádřit jako

$$S_t = (1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j .y_{t-j} = (1-\alpha).\alpha^0 y_t + (1-\alpha).\alpha\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{j-1}.y_{t-j-1} =$$

$$(1-\alpha).y_t + \alpha.(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k .y_{t-k} = (1-\alpha)y_t + \alpha.S_{t-1}$$

, přičemž $k = j-1$

Levou stranu (63b) lze vyjádřit jako

$$S_t{}^{[2]} = (1-\alpha)S_t + \alpha.S_{t-1}{}^{[2]} = (1-\alpha)S_t + (1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j .S_{t-j-1} =$$

$$= (1-\alpha)S_t + (1-\alpha).\alpha\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{j-1}.S_{t-j-1} = (1-\alpha)S_t + (1-\alpha).\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k .S_{t-k} = (1-\alpha)S_t + \alpha.S_{t-1}{}^{[2]}$$

□.

Výpočet těchto statistik se provádí rekurentně počínaje $S_0, S_0{}^{[2]}$ **.**

Tyto statistiky však nejsou samy o sobě bezprostředně uplatnitelné, protože operují s číselně nenaplnitelnými hodnotami $y_t, t = 0,-1,-2,-3,....,-\infty$ **, pro která nemáme pozorované hodnoty. Proto se v reálných výpočtech omezujeme na jejich „konečné verze„, tzn. na obdobné výrazy operujícími je se skutečně dostupnými pozorovanými hodnotami.**

Oproti (61a) a (62b) tady definujeme trochu odlišně[2]:

(71a) $$S_t = (1-\alpha).\sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j . y_{t-j}$$ konečná **jednoduchá vyrovnávací statistika**

(71b) $$S_t^* = (1-\alpha)^2 . \sum_{j=0}^{t-1} j.\alpha^j . y_{t-j}$$ konečná **dvojitá vyrovnávací statistika**

Povšimněme si, že **obě tato statistiky operují výlučně jen s pozorovanými hodnotami.** **Vztah mezi odhadovanými parametry a těmito** konečnými **vyrovnávajícími statistikami:** odhady parametrů b_{t0}, b_{t1} vyjádřené pomocí těchto statistik jsou

(72a) $$b_{t0} = (1+\alpha)S_t - S_t^*$$

(72b) $$b_{t1} = (1-\alpha)S_t - \frac{1-\alpha}{\alpha} S_t^*$$

ověření (72A) , (72B):

Dosadíme-li do vzorců (30A),(30B) pro parametry b_{t0}, b_{t1} dvojitého exponenciálního vyrovnávání

(30A) $$b_{t0} = \left(1-\alpha^2\right)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} - (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j}$$

(30B) $$b_{t1} = (\alpha-1)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} - \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j}$$

výrazy (71a) a (71b), dostaneme přímo $b_{t0} = (1+\alpha)S_t - S_t^*$ a $b_{t1} = (1-\alpha)S_t - \frac{1-\alpha}{\alpha} S_t^*$

ve shodě se vzorci (2.80),(2.81) citované knihy Hindlse, Hronové a Nováka. □.

Naopak ale můžeme vyjádřit zápis obou těchto statistik také v symbolice obou parametrů“

(73a) $$S_t = b_{t0} - b_{t1}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

(73a) $$S_t^* = \alpha.b_{t0} - \frac{(1+\alpha)\alpha}{1-\alpha} b_{t1}$$

ověření (73A) , (73B):

Vyjdeme z porovnání $$(1+\alpha)S_t - b_{t0} = S_t^* = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[(1-\alpha)S_t - b_{t1}\right]$$

$(1+\alpha)S_t - b_{t0} = \alpha S_t - b_{t1}\frac{\alpha}{1-\alpha}$, odkud tedy máme pro $S_t = b_{t0} - b_{t1}\frac{\alpha}{1-\alpha}$

a následně

$$S_t^* = (1+\alpha)\left[b_{t0} - b_{t1}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right] - b_{t0} = \alpha.b_{t0} - \frac{(1+\alpha)\alpha}{1-\alpha} b_{t1}$$ nebo stejně tak

$$S_t^* = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[(1-\alpha)\left(b_{t0} - b_{t1}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) - b_{t1}\right] = \alpha.\left(b_{t0} - b_{t1}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) - \frac{\alpha}{1-\alpha} b_{t1} = \alpha.b_{t0} - \left[\frac{\alpha^2+\alpha}{1-\alpha}\right] b_{t1}$$

[2] Tyto výpočetní vzorce přijímáme z učebnice Hindls, Hronová, Novák Metody statistické analýzy pro ekonomy – str. 133, vzorce (2.80), (2.81)

Počáteční odhady obou vyrovnávacích statistik získáme na základě vzorců

(75a) $$S_0 = b_{00} - b_{01}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

(75a) $$S_t{}^* = \alpha.b_{00} - \frac{(1+\alpha)\alpha}{1-\alpha} b_{01}$$,

kde počáteční hodnoty obou parametrů b_{00}, b_{01} určíme např. pomocnou regresí z několika počátečních pozorování časové řady.

Od takto vyjádřených hodnot $S_0, S_0{}^*$ se pak odvíjí postupný rekurentní výpočet obou statistik $S_t, S_t{}^*$ následně pro $t = 1,2,\ldots,n$.

Volba vyrovnávací konstanty α pro jednoduché exponenciální vyrovnávání:
Omezujeme se zde zpravidla na interval $0 < \alpha \le 0,3$ a podobně jako pro dvojité se užívá

a) fixní volba $\alpha = 0,1$ nebo $\alpha = 0,2$. (Volba $\alpha = 0,3$ se téměř neužívá.)

b) volba $\alpha = \frac{1}{m+1}$, kde $d = 2m+1$ je délka klouzavých průměrů adekvátní této řadě (odvozena z požadavku, aby tzv. ***střední věk vah*** jednoduchých klouzavých průměrů této délk, tj. $\sum_{k=0}^{2m} \frac{k}{2m+1}$ a střední věk vah jednoduchého exponenciálního vyrovnávání, tj. $\sum_{k=0}^{m} k.\alpha(1-\alpha)^k$ byly shodné. Přístup ale není ideální, protože stejně musíme vyjít z vhodné délky klouzavého průměru.

c) Jako možné hodnoty α se vezmou hodnoty z intervalu $\alpha = 0,01\ ,0,02,\ldots\ldots,0,30$ a vybere se ta hodnota, která nejlépe predikuje ve smyslu minimální hodnoty *SSE*.

$100.(1-p)$ předpovědní interval pro jednoduché exponenciální vyrovnávání

V případě, že rozdělení náhodné složky uvažované řady je alespoň přibližně normální, lze v rámci exponenciálního vyrovnávání vedle bodových předpovědí konstruovat také předpovědní intervaly. Jako $100.(1-p)$ předpovědní interval pro jednoduché vyrovnávání se doporučuje konstruovat interval ve tvaru

$$\left(\hat{y}_{n+\tau}(n) - u_{1-p/2}.d_\tau.MAE \quad ; \quad \hat{y}_{n+\tau}(n) + u_{1-p/2}.d_\tau.MAE\right)$$, kde

libovolné $\tau > 0$ je

$u_{1-p/2}$ .... $(1-p/2)-$ kvantil normovaného normálního rozdělení

d_τ definováno jako $d_\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,25$ sloužící k převodu MSE na MAE.

MAE je ***střední absolutní chyba***, tedy $MAE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \left| y_t - \hat{y}_t(t-1) \right|$

2. Dvojité (lineární) exponenciální vyrovnávání

Formulace modelu je založena na představě, že pro dané pevné t a hodnoty zpoždění $j = 0,1,2,3,\ldots$ lze uplatnit lokálně lineární trend tvaru

(21) $$Tr_{t,t-j} = \hat{y}_t = \beta_{t0} + \beta_{t1}.t$$ pro ***j* = 0, 1, 2, 3, ….**

Minimalizační kritérium ***má*** *v tomto případě* ***tvar***

(22) $$\underset{\beta_{t0},\beta_{t1}}{Min}\; G(y,\beta_{t0},\beta_{t1},\alpha) = (1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{tj} - (\beta_{t0} + \beta_{t1}.(-j))\right]^2 \alpha^j ,$$

ve kterém se uplatňuje lineární trendový model tvaru $Tr_{t-j} = \beta_{t0} - j.\beta_{t1}$.

Výchozím předpokladem modelu **(22) je** tedy **trend** ve tvaru ***po částech lineární funkce.***

V tomto případě jsou předmětem odhadu dva parametry b_{t0} *- jako odhad* β_{t0} *- a* b_{t1} *- jako odhad parametru* β_{t1} **.**

Odhad obou **parametrů *v* (22)** ***získáme řešením soustavy normálních rovnic***

(25A) $$b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}$$

(25B) $$\alpha.b_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$

ověření (25A), (25B): **Derivací výrazu (22) podle** β_{t0} **dostaneme**

(23A) $$\frac{\partial G(y,\beta_{t0},\beta_{t1},\alpha)}{\partial b_{t0}} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} 2.\left[y_{t-j} - (b_{t0} + b_{t1}.(-j))\right]\alpha^j(-1)$$

Podobně, derivací výrazu (22) podle β_{t1} **dostaneme:**

(23B) $$\frac{\partial G(y,\beta_{t0},\beta_{t1},\alpha)}{\partial b_{t1}} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} 2.\left[y_{t-j} - (b_{t0} + b_{t1}.(-j))\right]\alpha^j.j$$

Upravíme-li (23 A) a položíme-li příslušnou derivaci rovnou nule:

(24A) $$0 = \sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{t-j} - b_{t0} + j.b_{t1}\right]\alpha^j$$ **, neboli**

(24A*) $$b_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j - b_{t1}\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j}\alpha^j$$

a s využitím toho, že součet řady $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j = \frac{1}{1-\alpha}$ **a součet řady** $\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^{j-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$

obdržíme $$b_{t0}\frac{1}{1-\alpha} - b_{t1}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j y_{t-j}$$

a následně vynásobením $(1-\alpha)$ **získáme (25A) .**

Krátíme-li (23B) výrazem $2(1-\alpha)$ a položíme-li levostrannou derivaci rovnou nule:

(24B) $$0 = \sum_{j=0}^{\infty} \left[y_{t-j} - \beta_{t0} + \beta_{t1}.j\right]\alpha^j.j \; .$$

Výrazy s neznámými β_{t0}, β_{t1} přemístíme v rovnici nalevo

(24B*) $$\beta_{t0} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j - \beta_{t1} \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j y_{t-j}$$

a s využitím toho, že součty řad $\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^{j-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$, $\sum_{j=1}^{\infty} j^2.\alpha^j = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$

máme $$\beta_{t0} \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} - \beta_{t1} \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j}$$ **, což**

po vynásobení $(1-\alpha)^2$ dává (25B). .

Máme tedy soustavu dvou *normálních* rovnic pro výpočet parametrů b_{t0}, b_{t1}

(25A) $$b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j}$$

(25B) $$\alpha.b_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j} ,$$

kterou můžeme vyjádřit v maticovém tvaru

(26) $$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{1-\alpha} \\ \alpha & -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{t0} \\ b_{t1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} \\ (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j} \end{pmatrix}$$ **, takže**

(27) $$\begin{pmatrix} b_{t0} \\ b_{t1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{1-\alpha} \\ \alpha & -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} \\ (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j} \end{pmatrix}$$ **, kde**

determinant matice soustavy (27) je roven $\frac{-\alpha(1+\alpha)+\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{-\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$**. Takže**

(28) $$\begin{pmatrix} b_{t0} \\ b_{t1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} & \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} \\ (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j} \end{pmatrix} .$$

(28) $$\begin{pmatrix} b_{t0} \\ b_{t1} \end{pmatrix} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} & -1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} \\ (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j} \end{pmatrix} .$$

(29) $$\begin{pmatrix} b_{t0} \\ b_{t1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -1 \\ 1-\alpha & \dfrac{\alpha-1}{\alpha} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (1-\alpha)\sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} \\ (1-\alpha)^2 \sum\limits_{j=0}^{\infty} j\alpha^j . y_{t-j} \end{pmatrix} .$$

Odtud máme pro oba parametry výsledné výrazy

$$b_{t0} = (1+\alpha).(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} - (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j}$$ **neboli**

(30A) $$b_{t0} = \left(1-\alpha^2\right)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} - (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j}$$ **a**

(30B) $$b_{t1} = (\alpha-1)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} - \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j}$$

Výrazy (30A) a (30B) představují (přesné) výpočetní vzorce pro „aktuální hodnoty" parametrů b_{t0}, b_{t1} (oba jsou závislé na t)**. Tyto vzorce ale nelze pro výpočet této dvojice parametrů** (ve skutečnosti jde o dvě posloupnosti parametrů) **bezprostředně použít, protože** přirozeně **nemáme k dispozici hodnoty z „nekonečně vzdálené minulosti".**

Proto se při konkrétní aplikaci *Brownova exponenciálního vyrovnání* postupuje poněkud **jinak, nejčastěji tak, že se „počáteční odhady" těchto parametrů spočtou „pomocným způsobem", např. regresí a poté se pokračuje rekurentním způsobem výpočtu „od hodnot získaných na základě pozorování v čase *t-1* k hodnotám získaným na základě pozorování v čase *t*.**

Pokud pracujeme s konečným počtem pozorování, má odpovídající soustava normálních rovnice tento tvar:

(41A) $$b_{t0} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j - b_{t1} \sum_{j=0}^{n-1} j.\alpha^j = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j . y_{t-j}$$

(41B) $$-b_{t0} \sum_{j=0}^{n-1} j\alpha^j + b_{t1} \sum_{j=0}^{n-1} j^2.\alpha^j = -\sum_{j=0}^{n-1} j\alpha^j . y_{t-j} ,$$

což můžeme dokumentovat srovnáním s „nekonečným případem"

(24A*) $$b_{t0} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j - b_{t1} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j}\alpha^j$$

(24B*) $$\beta_{t0} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j - \beta_{t1} \sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j y_{t-j}$$

Řešením (41A) (41B) dostaneme odhady parametrů ve tvaru

(42A)
$$b_{t0}=\frac{\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j.y_{t-j}.\sum_{j=0}^{n-1}j^2.\alpha^j-\sum_{j=0}^{n-1}j.\alpha^j\sum_{j=0}^{n-1}j\alpha^j.y_{t-j}}{\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j.\sum_{j=0}^{n-1}j^2.\alpha^j-\left[\sum_{j=0}^{n-1}j.\alpha^j\right]^2}$$

(42B)
$$b_{t1}=\frac{-\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j\sum_{j=0}^{n-1}j.\alpha^j.y_{t-j}+\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j.y_{t-j}\sum_{j=0}^{n-1}j.\alpha^j}{\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j.\sum_{j=0}^{n-1}j^2.\alpha^j-\left[\sum_{j=0}^{n-1}j.\alpha^j\right]^2}.$$

Tyto vzorce jsou sice formálně „exaktní“, ale pro praktické uplatnění rovněž málo použitelné, protože představují nutnost přepočtů výsledných výrazů při jakékoliv změně koncové hodnoty *n* (a nelze v nich také přirozeně použít adekvátní zjednodušující vzorce pro součtování nekonečných řad).

Pro srovnání výrazů spočtených na základě konečného a „nekonečného“ počtu pozorování můžeme postupovat např. takto:

Vyčíslíme výrazy bez „ypsilonových„ členů s využitím toho, že platí dle

(61) $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j=\frac{1}{1-\alpha}$, **(62)** $\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^j=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$, **(63)** $\sum_{j=1}^{\infty}j^2.\alpha^j=\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$

Výraz ve jmenovatelích (42A), (42B) je rovný

$$\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.\sum_{j=0}^{\infty}j^2\alpha^j-\left[\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^j\right]^2=\frac{1}{1-\alpha}.\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}-\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^4}=\frac{\alpha+\alpha^2-\alpha^2}{(1-\alpha)^4}=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^4}$$

Potom dle (42A)
$$b_{t0}=\frac{\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^j.y_{t-j}}{\frac{\alpha}{(1-\alpha)^4}}$$

po úpravě
$$b_{t0}=\frac{\alpha(1+\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}-(1-\alpha)\alpha\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^j.y_{t-j}}{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}$$

a zkrácení
$$b_{t0}=(1+\alpha)(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}-(1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^j.y_{t-j}$$

a konečně
$$b_{t0}=\left(1-\alpha^2\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}-(1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^j.y_{t-j}$$
O.K.

a podle (42B)

$$b_{t1} = \frac{-\frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}}{\frac{\alpha}{(1-\alpha)^4}}$$

a zkrácení $$b_{t1} = \frac{1}{\alpha}.\left[-(1-\alpha)^3\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j} + (1-\alpha)^2\alpha\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}\right]$$

dospějeme k $$b_{t1} = -\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j} + (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}$$ O.K.

Ta je srovnatelná s (25A), (25B) , protože pokud n je dostatečně velké, lze nahradit

(36A) $$b_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j - b_{t1}\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}$$

(36B) $$-b_{t0}\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j + b_{t1}\sum_{j=0}^{\infty} j^2.\alpha^j = -\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$. tj.

(37A) $$b_{t0}\frac{1}{1-\alpha} - b_{t1}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}$$

(37B) $$-b_{t0}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} + b_{t1}\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} = -\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$, což po vynásobení

první rovnice $(1-\alpha)$ a druhé rovnice $-(1-\alpha)^2$ dává přesně

(25A) $$b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}$$

(25B) $$\alpha.b_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$ . .

<u>přímé (alternativní) ověření výpočtu parametrů ze soustavy (25A), (25B):</u>

(25A) $$b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}$$

(25B) $$\alpha.b_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$

Vyjděme z (25A), (25B) a vyjádřeme z obou těchto vztahů b_{t1}:

(31A) $$\frac{1-\alpha}{\alpha}.\left(b_{t0} - (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}\right) = b_{t1}$$

(31B) $$\frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)}.\left(\alpha.b_{t0} - (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j}\right) = b_{t1}$$

Porovnáme obě strany a máme

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}.\left(b_{t0}-(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}\right)=\frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)}.\left(\alpha.b_{t0}-(1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}\right)$$

$$(1+\alpha).\left(b_{t0}-(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}\right)=\left(\alpha.b_{t0}-(1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}\right)$$ **, odečteme**

$$b_{t0}+(1+\alpha).\left(-(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}\right)=\left(-(1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}\right)$$ **,**

$$b_{t0}=\left(-(1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}\right)-(1+\alpha).\left(-(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}\right)$$

$$b_{t0}=-(1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+\left(1-\alpha^{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$$ **O.K.**

a dále podle (31A) substitucí $$b_{t1}=\frac{1-\alpha}{\alpha}.\left(b_{t0}-(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}\right)$$

tedy $$b_{t1}=\frac{1-\alpha}{\alpha}.\left(-(1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+\left(1-\alpha^{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}-(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}\right)$$

pak $$b_{t1}=-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-\alpha^{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}-\frac{(1-\alpha)^{2}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$$

po úpravě $$b_{t1}=-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-\alpha^{2}\right)-\frac{(1-\alpha)^{2}}{\alpha}\right]\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$$

$$b_{t1}=-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-\alpha^{2}-(1-\alpha)\right)\right]\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$$

$$b_{t1}=-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(-\alpha^{2}+\alpha\right)\right]\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$$

$$b_{t1}=-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+[(1-\alpha)(-\alpha+1)]\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$$ **, až dospějeme**

k výslednému tvaru $$b_{t1}=-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+(1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$$ **O.K.**

V učebnici T.Cipry *Finanční ekonometrie* jsou v kontextu dvojitého exponenciálního vyrovnávání definovány vyrovnávací statistiky poněkud odlišně:

(61a) $$S_t = \beta . \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j . y_{t-j}$$ *jednoduchá vyrovnávací statistika*

(61b) $$S_t^{[2]} = (1-\beta) . \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j S_{t-j}$$ *dvojitá vyrovnávací statistika,* kde $\beta = (1-\alpha)$.

Jak patrno, druhá z těchto statistik je konstruována obdobně jako první s tím rozdílem, že místo pozorovaných hodnot vystupují na pravé straně hodnoty jednoduché vyrovnávací statistiky S_t.

Pro tyto statistiky platí následující rekurentní vztahy:

(62a) $$S_t = \alpha y_t + (1-\alpha).S_{t-1}$$

(62b) $$S_t^{[2]} = \alpha S_t + (1-\alpha).S_{t-1}^{[2]}$$

Pomocí této dvojice vyrovnávacích statistik lze sestavit soustavu normálních rovnic tvaru

(63a) $$\beta_{t0} - \frac{\beta}{1-\beta}\beta_{t1} = S_t$$

(63b) $$\beta.\beta_{t0} - \frac{\beta(1+\beta)}{1-\beta}\beta_{t1} = S_t^{[2]} - (1-\beta)S_t$$

Z této soustavy dostaneme výrazy pro hledané odhady $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ vyjádřené pomocí obou vyrovnávacích statistik (a přirozeně též vyrovnávací konstanty $\beta = (1-\alpha)$)

(64a) $$b_{t0} = 2.S_t - S_t^{[2]}$$

(64b) $$b_{t1} = \frac{1-\beta}{\beta}\left(S_t - S_t^{[2]}\right).$$

poznámka: Výhodou tohoto zápisu je možnost rychlého „přepočtu“ či „aktualizace“ odhadovaných parametrů (a nepotřeba jejich opakovaného výpočtu ze soustavy normálních rovnic), protože je možno využít bezprostředního výpočtu parametrů pomocí obou vyrovnávacích statistik podle (64a) a (64b), přičemž aktualizace statistik $S_t, S_t^{[2]}$ – přechod od období *t-1* k období *t* - probíhá velmi snadno pomocí vztah(62a), (62b).

<u>predikce na τ období dopředu</u> $(\tau > 0)$ *je dána vztahy*

(65) $$y_{t+\tau}^* = b_{t0} + b_{t0}.\tau$$ neboli

(65a) $$y_{t+\tau}^* = \left[2 + \frac{.\tau\alpha}{(1-\alpha)}\right] S_t - \left[1 + \frac{.\tau\alpha}{(1-\alpha)}\right] .S_t^{[2]}$$

Z tohoto zápisu bezprostředně dostaneme (dosazením za $\tau = 0$ *):*

<u>vyrovnání pro aktuální období</u> $(\tau = 0)$ *:*

(66) $$y_t^* = 2.S_t - S_t^{[2]}$$

Model dvojitého exponenciálního vyrovnávání* (21) *je *pro řadu situací* ***dobrým predikčním nástrojem, pokud se při volbě vyrovnávací konstanty řídíme některým z výše uvedených pravidel.***

Při výpočtu statistik $S_t, S_t^{[2]}$ ***postupujeme rekurentně, přičemž jejich počáteční hodnoty pro*** $\tau = 0$ ***získáme ze vztahů :***

(67A)
$$S_0 = b_{00} - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_{01}$$

(67B)
$$S_0^{[2]} = b_{00} - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} b_{01}$$

Počáteční hodnoty odhadů b_{00}, b_{01} ***získáme prostou lineární regresí tak, že několik*** *(cca 6-10)* ***počátečních pozorování řady proložíme regresní přímkou.*** b_{00} ***je*** *příslušná* ***úrovňová konstanta,*** b_{01} ***je parametr sklonu regresní přímky.***

(22)
$$\underset{\beta_{t0},\beta_{t1}}{Min}\,(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{tj} - (\beta_{t0} + \beta_{t1}.(-j))\right]^2 \alpha^j$$

Derivací výrazu (22) podle β_{t1} a jeho anulováním dostaneme:

$$2\,(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty} j.\left[y_{t-j} - (\beta_{t0} + \beta_{t1}.(-j))\right]\alpha^j = 0$$ **krátíme výrazem $2(1-\alpha)$**

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\left[y_{t-j} - (\beta_{t0} + \beta_{t1}.(-j))\right]\alpha^j = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j \beta_{t0} + \sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^j \beta_{t1} = 0$$.

Výrazy s neznámými β_{t0}, β_{t1} přemístíme nalevo

$$-\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j + \beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j}$$ **což zapíšeme jako**

$$\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^j - \beta_{t0}\alpha\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^{j-1} = \alpha\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^{j-1} y_{t-j}$$

Protože dle (52) $\sum_{j=0}^{\infty} j.z^{j-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$**, u neznámé β_{t0} máme člen** $\alpha\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^{j-1} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$

Dále dle (53) $\sum_{j=0}^{\infty} j.(j-1).z^{j-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$ **u neznámé β_{t1} máme**

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^j = \alpha^2\sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^{j-2} = \alpha^2\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\alpha^{j-2} + \alpha^2\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^{j-2} = \alpha^2\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\alpha^{j-2} + \alpha^1\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^{j-1}$$

Tedy $\sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^j = \alpha^2.\frac{2}{(1-\alpha)^3} + \alpha.\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \frac{2\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^3} = \frac{\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^3}$

$$\beta_{t1}\cdot\frac{\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^3} - \beta_{t0}\cdot\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j}$$ **(2B)** $$\alpha.\beta_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}.\beta_{t1} = (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j j.y_{t-j}$$

Volba vyrovnávací konstanty α u dvojitého exponenciálního vyrovnávání:

omezujeme se zde zpravidla na interval $0 < \alpha \le 0{,}3$ **a** podobně jako pro jednoduché se užívá

a) fixní volba $\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{m+1}}$**, kde** $d = 2m+1$ **je délka klouzavých průměrů adekvátní**

b) pro danou řadu (vyplývá opět z porovnání středních věku vah jednoduchých klouzavých průměrů a vah dvojitého exp. vyrovnávání).

c)Jako vhodné hodnoty α **se vyšetří hodnoty z intervalu** $\alpha = 0{,}01\,, 0{,}02, \ldots\ldots, 0{,}30$ **a vybere se ta hodnota, která nejlépe predikuje ve smyslu míry *SSE*.**

c)Jako vhodné hodnoty α **se vyšetří hodnoty z intervalu** $\alpha = 0{,}01\,, 0{,}02, \ldots\ldots, 0{,}30$ **a vybere se ta hodnota, která nejlépe predikuje ve smyslu míry *SSE*.**

Jako $100.(1-p)$ **předpovědní interval se doporučuje konstruovat ve tvaru**

$$\left(\hat{y}_{n+\tau}(n) - u_{1-p/2}.d_\tau.MAE \quad ; \quad \hat{y}_{n+\tau}(n) + u_{1-p/2}.d_\tau.MAE\right)$$ **, kde pro**

libovolné $\tau > 0$ **je** d_τ **definováno jako**

$$d_\tau = 1{,}25.\sqrt{\frac{1 + \dfrac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3}\left(\left(1+4\alpha+5\alpha^2\right) + 2(1-\alpha)(1+3\alpha)\tau + 2(1-\alpha)^2\tau^2\right)}{1 + \dfrac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3}\left(\left(1+4\alpha+5\alpha^2\right) + 2(1-\alpha)(1+3\alpha) + 2(1-\alpha)^2\right)}}$$

alternativní odvození odhadu parametrů z (25A) ,(25B) :

(25A) $$b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j}$$

(25B) $$\alpha.b_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}\,,$$

z (25A) máme $$b_{t0} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} + \frac{\alpha}{1-\alpha}.b_{t1}$$

z (25B) máme $$b_{t0} = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j} + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.b_{t1}\,,$$

komparací $$\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j} + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} + \frac{\alpha}{1-\alpha}.b_{t1}$$

po úpravě $\dfrac{(1-\alpha)^3}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j} + (1+\alpha).b_{t1} = (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} + \alpha.b_{t1}$. **Odečtením výrazu** $\alpha.b_{t1}$ **od obou stran dostaneme**

$$b_{t1} = (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} - \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$

$$b_{t0} = \left(-(1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j} \right) + \left(\left(1-\alpha^2\right) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} \right)$$

$$b_{t0} = (1-\alpha)^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j} \right)$$

Dále využijeme (25A)

$$b_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}.\left(b_{t0} - (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} \right)$$

$$b_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}.\left((1-\alpha)^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j} \right) - (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} \right)$$

$$b_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}.\left((1-\alpha)^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j} \right) - (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} \right)$$

$$b_{t1} = .\left(\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} - \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j} - \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} \right)$$

$$b_{t1} = \frac{(1-\alpha)^3 - (1-\alpha)^2}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} - \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j}$$

$$b_{t1} = \frac{1-3\alpha+3\alpha^2-\alpha^3-\left(1-2\alpha+\alpha^2\right)}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} - \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j}$$

$$b_{t1} = \frac{-\alpha+2\alpha^2-\alpha^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} - \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j}$$

$$b_{t1} = \left(-1+2\alpha-\alpha^2\right) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} - \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j}$$

$$b_{t1} = -(1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} - \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j}$$

$$b_{t1} = -(1-\alpha)^2 \left[\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j.y_{t-j} - \frac{1-\alpha}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j} \right]$$

3. Trojité (kvadratické) exponenciální vyrovnávání

je třetím užívaným typem exponenciálního vyrovnávání, které se uplatňuje především u časových řad vyznačujících se ve svém dosavadním vývoji úseky se zřetelnou akcelerací nebo naopak decelerací průběhu v čase.

***Minimalizační kritérium* má u toho typu vyrovnání tvar**

(51) $$Min\,(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{t-j}-(\beta_{t0}+\beta_{t1}.(-j))+\beta_{t2}.(-j)^2\right]^2\alpha^j$$

ve kterém se uplatňuje trendový model tvaru

(52) $$y_{t-j}{}^{*}=\beta_{t0}-j.\beta_{t1}+j^2\beta_{t2}$$

Zde máme co do činění** již **se třemi konstantami b_{t0},b_{t1},b_{t2} coby ***s odhady trojice neznámých parametrů kvadratické funkce*** $\beta_{t0},\beta_{t1},\beta_{t2}$.

Odhady těchto parametrů se opět obdrží vyvozením ze soustavy (tří) **normálních rovnic. Ve výrazech se** tentokrát **uplatňují** již **tři vyrovnávací statistiky :**

jednoduchá vyrovnávací statistika $S_t=(1-\alpha).y_t+\alpha.S_{t-1}$

dvojitá vyrovnávací statistika

(53) $$S_t^{[2]}=(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.S_{t-j}$$

s vlastností $S_t^{[2]}=(1-\alpha).S_t+\alpha.S_{t-1}^{[2]}$

trojitá vyrovnávací statistika $S_t^{[3]}=(1-\alpha).S_t^{[2]}+\alpha.S_{t-1}^{[3]}$

Pomocí nich se dají vyjádřit jak vyrovnané, tak předpovídané hodnoty :

vyrovnání pro aktuální období $(\tau=0)$ **:**

(54) $$y_t^{*}=3.S_t-3.S_t^{[2]}+S_t^{[3]}$$

predikce na τ období dopředu $(\tau>0)$ **:**

(55) $$y_{t+\tau}{}^{*}=\frac{1}{2\alpha^2}\left\{\begin{array}{l}\left[6\alpha^2+(1+5\alpha)(1-\alpha).\tau+(1-\alpha)^2.\tau^2\right]S_t\\-\left[6\alpha^2+2(1+4\alpha)(1-\alpha).\tau+2(1-\alpha)^2.\tau^2\right]S_t^{[2]}\\+\left[2\alpha^2+(1+3\alpha)(1-\alpha).\tau+(1-\alpha)^2.\tau^2\right]S_t^{[3]}\end{array}\right\}$$

Predikce pomocí trojitého exponenciálního vyrovnání jsou (zejména při nízké volbě konstanty α - tj. blízké 0,7) **značně citlivé na chování posledních 2-3 pozorovaných hodnot řady. Vykazují-li tato pozorování zřetelný odklon oproti předchozímu průběhu časové řady, poskytne kvadratické vyrovnání zpravidla nepoužitelné předpovědi (tyto se vychylují buď příliš nahoru nebo příliš dolů podle směru vychýlení právě posledních** nejčerstvějších **pozorování).**

Při určování počátečních odhadů b_{00},b_{01},b_{02} **se v tomto případě doporučuje volit delší úsek (až 1/2 počtu všech pozorování). Vyrovnání se zde provádí (*pomocí prosté metody nejmenších čtverců*) kvadratickým trendem.**

Odvození normálních rovnic pro trojité exponenciální vyrovnávání:

Derivací výrazu (51) podle β_{t0} a jeho anulováním dostaneme:

$$-(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{t-j}-(\beta_{t0}+\beta_{t1}.(-j))+\beta_{t2}.(-j)^2\right]\alpha^j=0$$ **neboli**

(56A) $$\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}\alpha^j-\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^2\alpha^j=0$$

Derivací výrazu (31) podle β_{t1} a jeho anulováním dostaneme:

$$(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{t-j}-(\beta_{t0}+\beta_{t1}.(-j))+\beta_{t2}.(-j)^2\right]j\alpha^j=0$$ **neboli**

(56B) $$\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j\alpha^j-\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^j+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j^2.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^3\alpha^j=0$$

Derivací výrazu (31) podle β_{t2} a jeho anulováním dostaneme:

$$(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{t-j}-(\beta_{t0}+\beta_{t1}.(-j))+\beta_{t2}.(-j)^2\right]j^2\alpha^j=0$$ **neboli**

(56C) $$\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j^2\alpha^j-\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}j^2\alpha^j+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j^3.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^4\alpha^j=0$$

(56A) upravíme na $$\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j-\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^j+\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^2\alpha^j=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}\alpha^j$$

Po vyčíslení sumací máme $$\beta_{t0}\frac{1}{1-\alpha}-\beta_{t1}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}+\beta_{t2}\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}\alpha^j$$

(56B) upravíme na $$\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^j+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j^2.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^3\alpha^j=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j\alpha^j$$

Po vyčíslení sumací máme $$\beta_{t0}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}+\beta_{t1}\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^3\alpha^j=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j.\alpha^j$$

(56C) upravíme na $$\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}j^2\alpha^j+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j^3.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^4\alpha^j=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j^2\alpha^j$$

Po vyčíslení sumací máme $$\beta_{t0}\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j^3.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^4\alpha^j=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j^2\alpha^j$$

Dostáváme tedy soustavu tří normálních rovnic k výpočtu parametrů $\beta_{t0},\beta_{t0},\beta_{t2}$:

(57) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha} & \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} \\ \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} & \frac{\alpha^3+4\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^4} \\ \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} & \frac{\alpha^3+4\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^4} & h(\alpha) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{t0} \\ b_{t1} \\ b_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j}\alpha^j \\ \sum_{j=0}^{\infty} j.y_{t-j}\alpha^j \\ \sum_{j=0}^{\infty} j^2 y_{t-j}\alpha^j \end{pmatrix},$$

z níž by byly hledané parametry získatelné vztahem (58)

$$\begin{pmatrix} b_{t0} \\ b_{t1} \\ b_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha} & \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} \\ \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} & \frac{\alpha^3+4\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^4} \\ \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} & \frac{\alpha^3+4\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^4} & h(\alpha) = \frac{-17\alpha^4+33\alpha^3+16\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^5} \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j}\alpha^j \\ \sum_{j=0}^{\infty} j.y_{t-j}\alpha^j \\ \sum_{j=0}^{\infty} j^2 y_{t-j}\alpha^j \end{pmatrix}$$ Je

nicméně zřejmé, že **i když principiálně takto parametry $\beta_{t0}, \beta_{t0}, \beta_{t2}$ získáme, budou příslušné tři vzorce již velmi nepřehledné….**

Poznámka: Při výpočtech součtů konvergentních **nekonečných řad, které se vyskytují v *normálních rovnicích* u různých verzí exponenciálního vyrovnávání, lze užitečně uplatnit poznatky odvozené z *teorie mocninných řad*.**

Máme-li pro argument $0 < z < 1$ definovánu funkci resp. *mocninnou řadu*

(101) $$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$$, pak

výpočet derivací této funkce *(do čtvrté derivace včetně)* ***vede k těmto výsledkům:***

(102) $$F'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j.z^{j-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

(103) $$F''(z) = \sum_{j=2}^{\infty} j.(j-1).z^{j-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

(104) $$F'''(z) = \sum_{j=3}^{\infty} j.(j-1).(j-2).z^{j-3} = \frac{6}{(1-z)^4}$$

(105) $$F^{IV}(z) = \sum_{j=4}^{\infty} j.(j-1).(j-2).(j-3).z^{j-4} = \frac{24}{(1-z)^5}$$

Všimněme si, že sumace derivovaných prvků mocninné řady (výrazy v součtech v (101, 102, 103, 104) se získají velmi prostým způsobem tím, že derivujeme funkci $F(z)$. Platí to pro první, druhou i třetí (případně i vyšší) **derivaci.**

Vezmeme-li za argument z vyrovnávací konstantu α - *to je přípustné, neboť její hodnoty rovněž leží v intervalu (0,1)* ***- dostaneme :***

(111) $$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + ... = \frac{1}{1-\alpha}$$,

(112) $$\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j = 0.1 + 1\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + ... = \alpha\left(1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + ..\right) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$,

(113) $$\sum_{j=1}^{\infty} j^2.\alpha^j = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$$ **což vypočteme z rozvoje**

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2.\alpha^j = \alpha^2 \sum_{j=1}^{\infty} j^2.\alpha^{j-2} = \alpha^2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} j(j-1).\alpha^{j-2} + \sum_{j=1}^{\infty} j.\alpha^{j-2}\right] = \alpha^2 \sum_{j=1}^{\infty} j(j-1).\alpha^{j-2} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} j.\alpha^{j-1}.$$

$$.\alpha^2 \frac{2}{(1-\alpha)^3} + \alpha \frac{1}{(1-\alpha)^2} = \frac{2\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^3} = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$$

Dále máme ještě

(114) $$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \frac{6\alpha^3 + 3\alpha - 3\alpha^3 - 2\alpha + 4\alpha^2 - 2\alpha^3}{(1-\alpha)^4} = \frac{\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha}{(1-\alpha)^4}$$

odvození (114):

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \alpha^3 \sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^{j-3} = \alpha^3 \sum_{j=1}^{\infty}\left[j.(j-1).(j-2)\alpha^{j-3} + 3j^2\alpha^{j-3} - 2j\alpha^{j-3}\right] =$$

$$= \alpha^3.\sum_{j=1}^{\infty} j.(j-1).(j-2)\alpha^{j-3} + 3\alpha^3\sum_{j=1}^{\infty} j^2\alpha^{j-3} - 2\alpha^3\sum_{j=1}^{\infty} j\alpha^{j-3}$$

Tedy $$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \alpha^3\sum_{j=3}^{\infty} j.(j-1).(j-2)\alpha^{j-3} + 3\sum_{j=1}^{\infty} j^2\alpha^j - 2\sum_{j=1}^{\infty} j\alpha^j$$

S využitím (62), (62) a (63) dostaneme

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \alpha^3\frac{6}{(1-\alpha)^4} + 3\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} - 2.\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \frac{6\alpha^3}{(1-\alpha)^4} + \frac{3\alpha(1+\alpha)(1-\alpha)}{(1-\alpha)^4} - \frac{2\alpha(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^4}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \frac{6\alpha^3 + 3\alpha\left(1-\alpha^2\right) - 2\alpha\left(1-2\alpha+\alpha^2\right)}{(1-\alpha)^4} = \frac{6\alpha^3 + 3\alpha - 3\alpha^3 - 2\alpha + 4\alpha^2 - 2\alpha^3}{(1-\alpha)^4}$$

až konečně máme (114) $$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \frac{\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha}{(1-\alpha)^4}$$ □ .

Uvedené vztahy se aktivně uplatňují při výpočtu výrazů, které vedou v jednotlivých typech exponenciálního vyrovnávání k určení odhadů parametrů b_{t0}, b_{t1}, b_{t2} .

Pokusme se ještě spočítat

(115)

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^4.\alpha^j = \alpha^4\sum_{j=1}^{\infty} j^4.\alpha^{j-4} = \alpha^4\sum_{j=1}^{\infty}\left[j.(j-1).(j-2)(j-3)\alpha^{j-4} + 6j^3\alpha^{j-4} - 11j^2\alpha^{j-4} + 6j\alpha^{j-4}\right] =$$

$$= \alpha^4\sum_{j=1}^{\infty} j.(j-1).(j-2)(j-3)\alpha^{j-4} + \alpha^4 6\sum_{j=1}^{\infty} j^3\alpha^{j-4} - \alpha^4 11\sum_{j=1}^{\infty} j^2\alpha^{j-4} + \alpha^4 6\sum_{j=1}^{\infty} j\alpha^{j-4}$$

$$= \alpha^4\sum_{j=1}^{\infty} j.(j-1).(j-2)(j-3)\alpha^{j-4} + 6\sum_{j=1}^{\infty} j^3\alpha^j - 11\sum_{j=1}^{\infty} j^2\alpha^j + 6\sum_{j=1}^{\infty} j\alpha^j$$

$$= \alpha^4\frac{24}{(1-\alpha)^5} + 6\frac{\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha}{(1-\alpha)^4} - 11\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} + 6\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

$$= \alpha^4\frac{24}{(1-\alpha)^5} + 6\frac{(1-\alpha).\left[\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha\right]}{(1-\alpha)^5} - 11\frac{\alpha(1+\alpha)(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^5} + 6\frac{\alpha(1-\alpha)^3}{(1-\alpha)^5}$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)^5}.\left[\alpha^4 + 6(1-\alpha).\left[\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha\right] - 11\alpha(1+\alpha)(1-\alpha)^2 + 6\alpha(1-\alpha)^3\right]$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)^5}.\left[\alpha^4 + 6\left[\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha\right] - \alpha.\left[\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha\right] - 11\left(\alpha + \alpha^2\right)(1-\alpha)^2 + 6\alpha\left(1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)^5}.\left[\alpha^4 + 6\alpha^3 + 24\alpha^2 + 6\alpha - \alpha^4 - 4\alpha^3 - \alpha^2 - \left(11\alpha + 11\alpha^2\right)\left(1 - 2\alpha + \alpha^2\right) + 6\alpha - 18\alpha^2 + 18\alpha^3 - 6\alpha^4\right]$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)^5}.\left[2\alpha^3 + 23\alpha^2 + 6\alpha - \left(11\alpha + 11\alpha^2 - 22\alpha^2 - 22\alpha^3 + 11\alpha^3 + 11\alpha^4\right) + 6\alpha - 18\alpha^2 + 18\alpha^3 - 6\alpha^4\right]$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)^5}.\left[20\alpha^3+5\alpha^2+12\alpha-11\alpha-11\alpha^2+22\alpha^2+22\alpha^3-11\alpha^3-11\alpha^4-6\alpha^4\right]$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)^5}.\left[-17\alpha^4+33\alpha^3+16\alpha^2+\alpha\right]=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^5}.\left[-17\alpha^3+33\alpha^2+16\alpha+1\right]$$

Tedy konečně dospíváme k výrazu

(116)
$$\sum_{j=1}^{\infty} j^4.\alpha^j=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^5}.\left[-17\alpha^3+33\alpha^2+16\alpha+1\right]$$

Holtova vyrovnávací metoda[3]

Jistým zobecněním dvojitého exponenciálního vyrovnávání je tzv. *Holtova metoda*, ve které se uplatňují dvě vyrovnávací konstanty $0 < \alpha, \gamma < 1$

α pro vyrovnání úrovně L_t

γ pro vyrovnání směrnice T_t téže řady

(81) $$L_t = \alpha . y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

Vyhlazení úrovně je tedy definováno jako konvexní kombinace poslední pozorované hodnoty v čase t a odhadu této hodnoty vzatého v předchozím čase $t-1$.

(82) $$T_t = \gamma . (L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma) . T_{t-1}$$

Aktualizace trendu řady je tedy definována jako konvexní kombinace rozdílu/posunu mezi poslední a předposlední úrovní řady $L_t - L_{t-1}$ v čase t a hodnoty trendu spočtené v předchozím čase $t-1$.

Pro vyrovnání, resp. predikci zde platí předpisy:

(83) $$\hat{y}_t = L_t$$

(84) $$\hat{y}_{t+\tau}(t) = L_t + T_t . \tau \quad \textit{pro} \quad \tau > 0$$

Jako volby počátečních hodnot se doporučují:

(85A) $$L_0 = y_1$$

(85B) $$T_0 = y_2 - y_1$$

Za pozornost stojí, že *Holtova metoda* byla nejprve navržena jako *ad hoc* postup na základě prosté logické úvahy. Teprve později bylo prokázáno, že *Brownovo dvojité exponenciální vyrovnávání* se zvolenou vyrovnávací konstantou α je speciálním případem *Holtova metody*, jejíž vyrovnávací konstanty jsou pak

(86) $$\alpha_H = \alpha_B(2-\alpha_B) \quad , \quad \gamma_H = \frac{\alpha_B}{2-\alpha_B}$$

Za pozornost stojí, že *Holtova metoda* byla nejprve navržena jako *ad hoc* postup na základě prosté logické úvahy. Teprve později bylo prokázáno, že *Brownovo dvojité exponenciální vyrovnávání* se zvolenou vyrovnávací konstantou α je speciálním případem *Holtova metody*, jejíž vyrovnávací konstanty jsou pak

$\alpha_B = 0{,}1$ *, potom* $\alpha_H = 0{,}1.(2-0{,}1) = 0{,}19$ $\gamma_H = \dfrac{0{,}1}{2-0{,}1} = \dfrac{0{,}1}{1{,}9} = 0{,}0527$

$\alpha_B = 0{,}2$ *, pak* $\alpha_H = 0{,}2.(2-0{,}2) = 0{,}36$ $\gamma_H = \dfrac{0{,}2}{2-0{,}2} = \dfrac{0{,}1}{1{,}9} = 0{,}111111$

$\alpha_B = 0{,}3$ *, odtud* $\alpha_H = 0{,}3.(2-0{,}3) = 0{,}51$ $\gamma_H = \dfrac{0{,}3}{2-0{,}3} = \dfrac{0{,}3}{1{,}7} = 0{,}17647$

---

[3] Postup je popsán v textu: Holt, C.,C: Forecasting seasonal and trends by exponentially weighted moving averages . Research mem. No 52. *Carnegie Institute of Technology. Pittsburg 1957*.