Opakování - rozklad polynomu v reálném oboru:

Nechť $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom.

Opakování - rozklad polynomu v reálném oboru:

Nechť $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom.

Pak $f(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = a_n(x-\alpha)^k(x-\beta)^l \ldots (x-\gamma)^m \cdot [(x-a)^2+b^2]^p \ldots [(x-c)^2+d^2]^q,$$

Opakování - rozklad polynomu v reálném oboru:

Nechť $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom.

Pak $f(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = a_n (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \ldots (x-\gamma)^m \cdot [(x-a)^2 + b^2]^p \ldots [(x-c)^2 + d^2]^q,$$

kde
$\alpha \in \mathbb{R}$ je k - násobný kořen $f(x)$,
$\beta \in \mathbb{R}$ je l - násobný kořen $f(x)$,
$\vdots$
$\gamma \in \mathbb{R}$ je m - násobný kořen $f(x)$,

Opakování - rozklad polynomu v reálném oboru:

Nechť $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom.

Pak $f(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = a_n (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \ldots (x-\gamma)^m \cdot [(x-a)^2 + b^2]^p \ldots [(x-c)^2 + d^2]^q,$$

kde
$\alpha \in \mathbb{R}$ je k - násobný kořen $f(x)$,
$\beta \in \mathbb{R}$ je l - násobný kořen $f(x)$,
$\vdots$
$\gamma \in \mathbb{R}$ je m - násobný kořen $f(x)$,
$a \pm ib$ jsou komplexně sdružené nereálné kořeny násobnosti p,
$\vdots$
$c \pm id$ jsou komplexně sdružené nereálné kořeny násobnosti q.

Příklad: Rozložte v reálném oboru polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

Příklad: Rozložte v reálném oboru polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

Řešení:

Polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ má kořen $x = 1$, protože $f(1) = 0$.

Příklad: Rozložte v reálném oboru polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

Řešení:

Polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ má kořen $x = 1$, protože $f(1) = 0$.

Můžeme zapsat

$$f(x) = x^4(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^4 - 1).$$

Příklad: Rozložte v reálném oboru polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

Řešení:

Polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ má kořen $x = 1$, protože $f(1) = 0$.

Můžeme zapsat

$$f(x) = x^4(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^4-1).$$

Podle vzorce $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ lze dále rozložit

$$f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Příklad: Rozložte v reálném oboru polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

Řešení:

Polynom $f(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ má kořen $x = 1$, protože $f(1) = 0$.

Můžeme zapsat

$$f(x) = x^4(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^4-1).$$

Podle vzorce $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ lze dále rozložit

$$f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Tedy reálný rozklad $f(x)$ je

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)(x^2+1).$$

Racionální lomená funkce

Definice : Racionální lomenou funkcí nazýváme funkci tvaru $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x),\ q(x)$ jsou polynomy.

Racionální lomená funkce

Definice : Racionální lomenou funkcí nazýváme funkci tvaru $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x),\ q(x)$ jsou polynomy.

Je-li stupeň polynomu $p(x)$ menší než stupeň polynomu $q(x)$, nazveme $f(x)$ ryze lomenou funkcí.

Racionální lomená funkce

Definice : Racionální lomenou funkcí nazýváme funkci tvaru $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x),\ q(x)$ jsou polynomy.

Je-li stupeň polynomu $p(x)$ menší než stupeň polynomu $q(x)$, nazveme $f(x)$ ryze lomenou funkcí.

Poznámka : Pokud není stupeň $p(x)$ menší než stupeň $q(x)$, nazýváme funkci $f(x)$ neryze lomenou a lze ji zapsat jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) =$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \ (x^2 + 1) = \ x$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$\begin{array}{l} (x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x \\ \underline{-(x^3 + x)} \end{array}$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x \\
\underline{-(x^3 + x)} \\
2x^2 + 2x - 1
\end{array}
$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x + 2 \\
\underline{-(x^3 + x)} \\
2x^2 + 2x - 1
\end{array}
$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x + 2 \\
\underline{-(x^3 + x)} \\
2x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-(2x^2 + 2)}
\end{array}
$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x + 2 \\
\underline{-(x^3 + x)} \\
2x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-(2x^2 + 2)} \\
2x - 3 \ldots \textit{zbytek}
\end{array}
$$

Příklad: $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2+1}$ je neryze lomená racionální funkce. Vydělte polynomy se zbytkem.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x - 1) : \quad (x^2 + 1) = \quad x + 2 \\
\underline{-(x^3 + x)} \\
2x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-(2x^2 + 2)} \\
2x - 3 \ldots \textit{zbytek}
\end{array}
$$

Tedy $f(x) = x + 2 + \frac{2x-3}{x^2+1}$.

Rozklad na parciální zlomky

Nechť $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ je ryze lomená reálná racionální funkce, jejíž čitatel a jmenovatel nemají stejný kořen.
Potom existují reálná čísla $A_1, \dots, A_k,\ B_1, \dots,\ B_l, \dots,\ C_1, \dots,\ C_m$ a $M_1,\ N_1, \dots,\ M_p,\ N_p, \dots,\ P_1,\ Q_1, \dots,\ P_q,\ Q_q$ tak, že platí

$$
\begin{aligned}
R(x) = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)^1} &+ \\
+ \frac{B_l}{(x-\beta)^l} + \dots + \frac{B_1}{(x-\beta)^1} + \dots &+ \\
+ \frac{C_m}{(x-\gamma)^m} + \dots + \frac{C_1}{(x-\gamma)^1} &+ \\
+ \frac{M_p x + N_p}{[(x-a)^2+b^2]^p} + \dots + \frac{M_1 x + N_1}{[(x-a)^2+b^2]^1} + \dots &+ \\
+ \frac{P_q x + Q_q}{[(x-c)^2+d^2]^q} + \dots + \frac{P_1 x + Q_1}{[(x-c)^2+d^2]^1}&,
\end{aligned}
$$

kde $\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma,\ a,\ b,\ldots,\ c,\ d$ jsou reálná čísla a
$k,\ l,\ldots,\ m,\ p,\ldots,\ q$ jsou přirozená čísla daná rozkladem jmenovatele
$q(x) = a_n(x-\alpha)^k(x-\beta)^l \ldots (x-\gamma)^m \cdot [(x-a)^2+b^2]^p \ldots [(x-c)^2+d^2]^q.$

Konstanty v čitatelích určíme porovnáním výrazů na pravé a levé straně. (jde o tzv. metodu neurčitých koeficientů).

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

Řešení: podle vzorce

$$f(x) = \frac{8x^2 + x + 6}{x^2.(x-2).(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

Řešení: podle vzorce

$$f(x) = \frac{8x^2 + x + 6}{x^2.(x-2).(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Upravíme zlomky na pravé straně na společný jmenovatel:

$$\frac{A(x-2)(x^2+1) + Bx(x-2)(x^2+1) + Cx^2(x^2+1) + (Dx+E)x^2(x-2)}{x^2.(x-2).(x^2+1)}.$$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

Řešení: podle vzorce

$$f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Upravíme zlomky na pravé straně na společný jmenovatel:

$$\frac{A(x-2)(x^2+1) + Bx(x-2)(x^2+1) + Cx^2(x^2+1) + (Dx+E)x^2(x-2)}{x^2.(x-2).(x^2+1)}.$$

Čitatel se musí rovnat čitateli původního zlomku:

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$
- $x^2 : 8 = -2A + B + C - 2E$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$
- $x^2 : 8 = -2A + B + C - 2E$
- $x^1 : 1 = A - 2B$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$
- $x^2 : 8 = -2A + B + C - 2E$
- $x^1 : 1 = A - 2B$
- $x^0 : 6 = -2A$

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned}8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2).\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$
- $x^2 : 8 = -2A + B + C - 2E$
- $x^1 : 1 = A - 2B$
- $x^0 : 6 = -2A$

Spočteme postupně $A = -3$, $B = -2$, $D = 0$, $E = -1$, $C = 2$.

Rozložte funkci $f(x) = \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}$ na součet parciálních zlomků

$$\begin{aligned} 8x^2 + x + 6 = \quad & A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x) + \\ & + C(x^4 + x^2) + D(x^4 - 2x^3) + E(x^3 - 2x^2). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x dostaneme soustavu rovnic

- $x^4 : 0 = B + C + D$
- $x^3 : 0 = A - 2B - 2D + E$
- $x^2 : 8 = -2A + B + C - 2E$
- $x^1 : 1 = A - 2B$
- $x^0 : 6 = -2A$

Spočteme postupně $A = -3$, $B = -2$, $D = 0$, $E = -1$, $C = 2$.
Racionální lomenou funkci $f(x)$ lze tedy zapsat ve tvaru

$$f(x) = \frac{-3}{x^2} + \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{-1}{x^2+1}.$$

Příklad: Integrujte funkci z předchozího příkladu

Řešení: Při integraci racionální lomené funkce využijeme rozkladu na parciální zlomky, dostaneme tak součet několika jednodušších integrálů.

Příklad: Integrujte funkci z předchozího příkladu

Řešení: Při integraci racionální lomené funkce využijeme rozkladu na parciální zlomky, dostaneme tak součet několika jednodušších integrálů.

$$\int \frac{8x^2 + x + 6}{x^2.(x-2).(x^2+1)} dx =$$

Příklad: Integrujte funkci z předchozího příkladu

Řešení: Při integraci racionální lomené funkce využijeme rozkladu na parciální zlomky, dostaneme tak součet několika jednodušších integrálů.

$$\int \frac{8x^2 + x + 6}{x^2.(x-2).(x^2+1)} dx =$$

$$= \int \frac{-3}{x^2} dx + \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{-1}{x^2+1} dx =$$

Příklad: Integrujte funkci z předchozího příkladu

Řešení: Při integraci racionální lomené funkce využijeme rozkladu na parciální zlomky, dostaneme tak součet několika jednodušších integrálů.

$$\int \frac{8x^2+x+6}{x^2.(x-2).(x^2+1)}dx =$$

$$= \int \frac{-3}{x^2}dx + \int \frac{-2}{x}dx + \int \frac{2}{x-2}dx + \int \frac{-1}{x^2+1}dx =$$

$$= -3(-x^{-1}) - 2ln|x| + 2ln|x-2| - arctg(x) + c.$$