FINANČNÍ ČASOVÉ ŘADY

Až dosud popisované modely časových řad byly svou podstatou **převážně lineární, popř. je bylo možno linearizovat jednoduchou** (obvykle logaritmickou) **transformací. Mnoho vztahů ve financích je však vnitřně nelineárních** (příkladem buď závislost opční prémie na příslušných vstupech, vybalancování velikosti výnosu a rizika apod.)**. Podstatu finančních časových řad proto v řadě situací lépe vystihnou *nelineární modely.***

Lineární modely časových řad totiž **nejsou zpravidla schopny zohlednit některé typické vlastnosti finančních časových řad, jimiž jsou zejména:**

- ***Leptokurtické rozdělení*: míry zisku finančních aktiv mívají rozdělení, která jsou více špičatá kolem střední hodnoty/modu, přičemž na koncích je jejich hustota větší a v ramenech menší než u normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou a rozptylem (lze u nich rozpoznat „užší pas a těžší konce) s větší špičatostí než u normálního rozdělení. Význačnou charakteristikou bývá zde kladný koeficient špičatosti. Jako příklad typické podoby leptokurtického rozdělení by mohlo sloužit t-rozdělení o malém počtu stupňů volnosti.**
- ***Shlukování volatility* [*volatility clustering, v. bunching, v. pooling, v. busting*]; Jedná se o tendenci *volatility* finančních trhů objevovat se ve shlucích vysokých a nízkých volatilit, tj. velké resp. malé výkyvy v míře zisku lze očekávat spíše po větších resp. menších předchozích výkyvech** (někdy se zde mluví o “ výbuších” [bursts])
- ***Pákový efekt* [leverage effect]: tento jev rovněž souvisí jako v předchozím případě s kolísáním *volatility* v čase, s kterým se lineární modely nejsou schopny uspokojivě vypořádat. Konkrétně se jedná o tendenci *volatility* zvětšit se více po cenovém poklesu, než po cenovém nárůstu souměřitelné velikosti.**

KLASIFIKACE NELINEÁRNÍCH MODELU časových řad

Pokud se omezíme na ryze stochastické [purely stochastic] modely časových řad (tj. bez deterministických trendů a periodicit), pak za obecný zápis nelineárního modelu časové řady lze považovat

(6.1) $$y_t = f\left(e_t, e_{t-1}, e_{t-2}. e_{t-3}, \ldots\right) \quad ,$$

kde *f* je nelineární funkce nekorelovaných, stejně rozdělených náhodných veličin e_t s nulovou střední hodnou označovaných podle kontextu jako *předpovědní chyby* nebo *odchylky od podmíněné střední hodnoty* nebo *šoky* či *inovace* apod.

Speciálním případem může být již zmíněný lineární proces

(6.2) $$y_t = e_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i e_{t-i} \quad ,$$

k jehož existenci a stacionaritě např. stačí předpokládat $\psi_1{}^2 + \psi_2{}^2 + \ldots . < +\infty$.

(jinou možností je dosažení téhož předpokladem $|\psi_1| + |\psi_2| + \ldots . + |\psi_3| < +\infty$)).

V obecném případě zápisu (6.1) však není nelineární proces přímo aplikovatelný, protože může obsahovat nekonečný počet parametrů. Proto se v literatuře dává přednost specifičtějšímu tvaru zapsanému pomocí podmíněných momentů prvních dvou řádů. Např. už stacionární AR(1)-proces s nepodmíněnou nulovou střední hodnotou $y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ lze zapsat pomocí *podmíněné střední hodnoty* jako

(6.3) $$E\left(y_t \middle| y_{t-1}\right) = \varphi_1 y_{t-1}$$

Obecně lze v čase *t* podmiňovat veškerou informací Ω_{t-1} známou do času *t-1* včetně. Pro názornost si můžeme představit, že tuto minulou informaci generují všechny minulé hodnoty $\{y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, ...\}$a $\{e_{t-1}, e_{t-2}, e_{t-3}, ...\}$ a vhodné funkce těchto hodnot (obecně se takový prostor označuje v topologické symbolice jako $\sigma - a\lg ebra$ generovaná uvedenou množinou hodnot.) Vzhledem k obvyklému omezení se na první dva momenty se pracuje s podmíněnou střední hodnotou μ_t a podmíněných rozptylem $\sigma^2{}_t$ ve tvaru (nelineárních) funkcí informace Ω_{t-1} ,

(6.4A) $$\mu_t = E\left(y_t \middle| \Omega_{t-1}\right) = g\left(\Omega_{t-1}\right)$$

(6.4B) $$\sigma^2{}_t = h_t = var\left(y_t \middle| \Omega_{t-1}\right) = h\left(\Omega_{t-1}\right)$$

kde g_t a h_t jsou vhodné funkce, přičemž $h_t(*) > 0$. I když má časový index odlišovat např. podmíněnou střední hodnotu μ_t od nepodmíněné, korektnější než použité zjednodušené značení by bylo např. $\mu_{t|t-1}$ a $\sigma^2{}_{t|t-1}$) (Jedná se vlastně o jednokrokové předpovědi střední hodnoty a rozptylu daného procesu). Protože platí

(6.5) $$y_t = \mu_t + e_t$$

(což mj. odůvodňuje pojmenování e_t předpovědní chybou), platí navíc pro rozptyl

(6.6) $$\sigma^2{}_t = var\left(y_t \middle| \Omega_{t-1}\right) = var\left(e_t \middle| \Omega_{t-1}\right)$$

a mluví se obecně o ***volatilitě*** uvažované řady v čase *t*. Náhodné veličiny e_t se pak vedle názvů uvedených výše označují jako ***odchylky míry zisku*** od (podmíněné) střední hodnoty [mean-corrected returns]. Odpovídající obecný zápis nelineárního procesu, který je ve financích využíván nejčastěji, je pak

(6.7) $$y_t = \mu_t + \sigma_t.\varepsilon_t = \mu_t + \sqrt{h_t}.\varepsilon_t = g\left(\Omega_{t-1}\right) + \sqrt{h\left(\Omega_{t-1}\right)}.\varepsilon_t ,$$

kde ε_t jsou *i.i.d.* náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Zřejmě přitom je

(6.8) $$e_t = \sigma_t.\varepsilon_t ,$$

přičemž náhodné veličiny e_t jsou sice nekorelované, ale (na rozdíl od ε_t) již nejsou obecně vzájemně nezávislé.

Uvažovaný nelineární model je tedy určen dvěma rovnicemi (6.4A,B). První je tzv. r*ovnice střední hodnoty* [mean equation] a druhá je rovnice volatility [volatility equation]. Podle typu těchto rovnic se nelineární procesy klasifikují takto:

- *Procesy nelineární ve střední hodnotě* [nonlinear in mean] (mají nelineární funkci g_t)
- *Procesy nelineární v rozptylu* [nonlinear in variance]: mají časově invariantní (proměnlivou a většinou nelineární) funkci h_t (tj. h_t není v čase konstantní) a velmi často se označují jako *procesy s podmíněnou heteroskedasticitou* [conditional heteroskedasticity].

Obě kategorie se vzájemně kombinují a dále člení na velké množství specifických procesů (viz dále). Lineární modely Boxovy-Jenkinsovy metodologie zavedené dříve jsou speciálním případem (6.7) pro případ, kdy je g_t je lineární funkce a kdy h_t je konstantní funkce.

MODELOVÁNÍ VOLATILITY

Modelování a předpovídání volatility je v centru zájmu mnoha finančních analýz zaměřených jak teoreticky, tak prakticky. To není nijak překvapivé, protože volatilita uvažovaná jako *směrodatná odchylka různých ukazatelů výnosnosti či ztrátovosti* je dnes základní mírou rizikovosti finančních aktiv. Důkazem je budiž. bankovní metodika kapitálové přiměřenosti založená na hodnotě v riziku VaR včetně komerčních softwarových produktů typu *Riskmetrics.*

Zde uvedeme ty metody, pomocí nichž se dnes volatilita nejčastěji odhaduje a předpovídá. Přestože volatilita není přímo pozorovatelná, má určité charakteristiky, které jsou obvyklé, když se právě sleduje výnosnost nejrůznějších finančních aktiv. (Některé z nich byly již zmíněny):

- *Shlukování volatility*: volatilita může být v některých obdobích s vysoká a v jiných nízká.
- *Pákový efekt:* volatilita reaguje odlišně na cenový vzestup a na cenový pokles..
- *Kontinuita:* Volatilita se vyvíjí spíše spojitě bez nějakých výrazných skoků.
- *Omezenost*: Volatilita nesměřuje k extrémně vysokým (neomezeným) hodnotám, ale její průběh bývá spíše stacionární v určitém rozmezí.

HISTORICKÁ VOLATILITA a MODELY EWMA

Jde o historicky nejstarší přístup k volatilitě, která se odhadovala většinou jako výběrový rozptyl nebo výběrová směrodatná odchylka přes určité historické období (proto *historická volatilita*), tj. v nejjednodušším případě jako

(6.11A,B) $$\hat{\sigma}_t^{\,2} = \frac{\sum_{\tau=t-k+1}^{t} (y_t - \hat{\mu}_t)^2}{k-1}$$, kde definujeme $$\hat{\mu}_t = \frac{\sum_{\tau=t-k+1}^{t} y_t}{k}$$ pro

vhodně zvolenou délku odhadního období *k.*

Zároveň se hodnoty definované jako (6.11A,B) běžně používaly jako předpovědní v čase *t* pro krátké předpovědní horizonty. I když se přístup pomocí historické volatility v počátcích používal např. pro předpověď volatility podkladového aktiva při výpočtu opční prémie podle *Blackovy-Scholesovy formule*, jeho dnešní význam se omezuje na stanovení srovnávacích hodnot [benchmarks] pro posouzení efektivnosti komplexnějších modelů volatility.

Pragmatickým rozšířením předchozího přístupu jsou modely EWMA. Nejpoužívanější EWMA-model volatility [exponentially weighted moving averages] představuje analogii jednoduchého exponenciálního vyrovnávání pro volatilitu. Na rozdíl od výpočtu historické volatility se zde při průměrování váží tím způsobem, že váhy klesají geometricky do minulosti. To má ve srovnání s *historickou volatilitou* řadu praktických předností:

- V praxi bývá volatilita skutečně více ovlivněna aktuálními pozorováními, které jsou v *EWMA-model*u zvýrazněny většími vahami, než pozorováními vzatými z hlubší minulosti, které mají v *EWMA-model*u nižší váhy.
- V *EWMA-modelu* se samovolně redukuje problém odlehlého pozorování s abnormálními velikostí. (Naproti tomu v takovém případě při výpočtu historické volatility s krátkým odhadním obdobím může dojít ve skoku ve vypočtené volatilitě, jakmile odlehlé pozorování vypadne z odhadního období, zatímco při dlouhém odhadním období může vliv odlehlého pozorování přetrvávat v nezměněné intenzitě delší dobu, i když se finanční trh již dávno uklidnil).

V přímé analogii s modelem jednoduchého exponenciálního vyrovnání, kde jsme definovali

$$\hat{y}_t = (1-\beta)\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j y_{t-j} \quad \text{a} \quad \hat{y}_t = \alpha . y_t + (1-\alpha).\hat{y}_{t-1}$$

se *volatilita* při přístupu EWMA odhaduje jako

(6.12) $$\hat{\sigma}_t^{\,2} = (1-\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\left(y_{t-j}-\bar{y}\right)^2 = (1-\lambda)(y_t-\bar{y})^2 + \lambda\hat{\sigma}_{t-1}^{\,2}$$, kde

odhadnutá volatilita $\hat{\sigma}_t^{\,2}$ je zároveň předpovědí (nepříliš vzdálené) budoucí volatility z času *t*. $\bar{y}$ je průměrná úroveň dané řady a $\lambda, (0<\lambda<1)$ je předem zvolená diskontní konstanta. V případě, že se počítá volatilita pro časovou řadu finančních výnosů (*logaritmických měr zisku*, log returns) r_t, pracuje se často s nulovým průměrným výnosem (zvlášť, když se jedná o vyšší frekvenci měřených hodnot, jako jsou např. denní výnosy), takže (6.12) přechází do tvaru:

(6.13) $$\hat{\sigma}_t^{\,2} = (1-\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j r_{t-j}^{\,2} = (1-\lambda)r_t^{\,2} + \lambda\hat{\sigma}_{t-1}^{\,2}$$

Ve finanční praxi (viz např. text RiskMetrics [1996]) se na základě rozsáhlé zkušenosti s odhadem volatility doporučuje rutinně konstanta lambda ve výši 0,94. Konstanta λ je tedy blíže k 1, než konstanta β jednoduchého exponenciálního vyrovnávání.

Typickými rysy, které vykazují finanční časové řady, jsou mj.:

- ***Shlukování volatility*** **(viz volatilní shluky v časové řadě denních logaritmovaných měr zisku r_t přibližně na rozhraní první a druhé třetiny a v poslední čtvrtině řady).**
- ***Leptokurtické rozdělení*** **(rozpoznáme z histogramu: v časové řadě r_t byl koeficient standardizované špičatosti 5,22 – 3 = 2,22) a hodnota Jarque-Berova testu normality 53,787 (p-hodnota zanedbatelná).**

Pomocí rekurentního vzorce EWMA-modelu (6.13) s nulovou počáteční hodnotou byla odhadnuta odpovídající volatilita a její průběh zakreslen na obr.11.2.3. str.383 **. EWMA-odhad volatility potvrzuje předchozí z náhledu vyvozený závěr:** výskyt zvýšené volatility přibližně na rozhraní první a druhé třetiny a v poslední čtvrtině řady.

IMPLIKOVANÁ VOLATILITA

Ve finanční ekonometrii se využívají některé vztahy, nichž mezi vysvětlujícími faktory figuruje právě volatilita. Nejznámější z nich je Black-Scholesova formule, která vyjadřuje analyticky cenu opce (tj. opční prémii) jako funkci celkem pěti faktorů

S_t **- spotová cena podkladového aktiva**

X **- realizační cena opce**

$T-t$ **- doba do splatnosti opce**

σ **- volatilita ceny podkladového aktiva**

i **- bezriziková úroková míra**

Např. pro cenu C_t evropské opce *call* je definován vztah

(6.14) $$C_t = S_t.\Phi(d_1) - X.e^{-i(T-t)}.\Phi(d_2),$$

kde hodnoty d_1 , d_2 jsou definovány jako

(6.15A) $$d_1 = \frac{ln(\frac{S_t}{X}) + \left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$ **(6.15B)** $$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} ,$$

přičemž $\Phi(*)$ je distribuční funkce rozdělení $N(0,1)$.

Jestliže pozorujeme cenu obchodované (kótované) opce při daných hodnotách vysvětlujících faktorů (kromě volatility), pak jsme schopni pomocí vhodné numerické procedury právě tuto volatilitu vypočítat jako tzv. *implikovanou volatilitu*; přesněji řečeno, jedná se pak o předpověď volatility ceny podkladového aktiva v čase *t* s předpovědním horizontem rovným době do splatnosti opce $T-t$.

Implikovaná volatilita je však odvozena za předpokladu, které nemusí být v praxi splněny (např. logaritmicko-normální rozdělení ceny podkladové aktiva) a proto se může značně lišit od skutečné volatility. Praxe ukazuje, že *implikovaní volatilita* měr zisku různých finančních aktiv bývá vyšší než volatilita odvozená např. pomocí modelů typu GARCH.

AUTOREGRESNÍ MODELY VOLATILITY

Autoregresní modely volatility byly původně zavedeny jako přímá aplikace Boxovy-Jenkinsovy metodologie pro vyšetřování *volatility* – fluktuace, kolísavosti - časových řad. V rámci nelineárních modelů finančních modelů je ale lze zařadit mezi tzv. stochastické modely volatility (viz dále).

Ve finančnictví se často používají pro:

- časové řady denních logaritmických měr zisku t_r. Vzhledem k průměrně nulové úrovni takových řad se za vstup do autoregresního modelu volatility (6.23) obvykle bere přímo řada čtvercových logaritmických měr zisku (*squared log returns*) r_t^2 .

(6.21) $$\sigma_t^2 = r_t^2$$

- časové řady denních cen finančních aktiv P_t. Zde se často jako vstup do autoregresního modelu volatility (6.23) používá řada zlogaritmovaných poměrů nejvyšší a nejnižší ceny uvažovaného aktiva během každého obchodního dne (tj. volatilita je měřena pomocí denního cenového rozpětí)

(6.22) $$\sigma_t^2 = ln\left(\frac{max\, P_t}{min\, P_t}\right) \approx \frac{max\, P_t - min\, P_t}{min\, P_t}$$

Pro volatility v obou případech (6.21) a (6.22) se nakonec odhadne autoregresní model AR(s) tvaru

(6.23) $$\sigma_t^2 = \beta_0 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \varepsilon_t,$$

pomocí něhož se pak případně volatilita též předpovídá. ε_t je klasický bílý šum s obvyklými vlastnostmi.

Základní reprezentace modelů volatility

Základními charakteristikami náhodných veličin stochastického procesu jsou *nepodmíněná a podmíněná střední hodnota* a *nepodmíněný a podmíněný rozptyl*.
Vezměme AR(1) proces ve tvaru

(6.81) $$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$, kde

$|\varphi_1| < 1$ a $\{\varepsilon_t\}$ je *proces bílého šumu s nulovou střední hodnotou a rozptylem* σ_ε^2,
Proces (6.81) lze vyjádřit jako nekonečnou posloupnost

(6.82) $$y_t = \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \varphi_1^3 \varepsilon_{t-3} + ...$$.

Je patrné, že nepodmíněná střední hodnota veličiny y_t je nulová, tj. $E(y_t) = 0$.
Podmíněnou střední hodnotou je střední hodnota veličiny y_t za předpokladu, že náhodné veličiny v časech *t-1,t-2,…,t-j* nabyly konkrétních hodnot. Podmíněná střední hodnota závisí na volbě podmínky, a je tedy její funkcí. Tato funkce se označuje jako *funkce regresní*. V případě procesu AR(1) je podmínkou určitá hodnota náhodné veličiny v čase *t-1*. $E(y_t | y_{t-1}) = \varphi_1 . y_{t-1}$, tj. podmíněná střední hodnota veličiny y_t je proměnlivá v čase.
Ze vztahu (6.81) vyplývá, že nepodmíněný rozptyl veličiny y_t je

(6.83) $$var(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi_1^2}$$, což je veličina v čase neměnná.

Podmíněný rozptyl se někdy označuje jako *funkce skedastická*. Její průběh charakterizuje proměnlivost rozptylu veličiny y_t v závislosti na hodnotách veličin $y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, ...$ Z definičního vztahu AR(1)-procesu (6.81) lze vyvodit, že

(6.84) $$var(y_t | y_{t-1}) = E(y_t - E(y_t | y_{t-1}))^2 = E(y_t - \varphi_1 . y_{t-1})^2 = E(\varepsilon_t)^2 = \sigma_\varepsilon^2$$, tzn.,

že podmíněný rozptyl procesu je také v čase neměnný.
V tomto případě se podmíněný rozptyl označuje jako *funkce homoskedastická*, při měnlivém podmíněném rozptylu by šlo o *funkci heteroskedastickou*.
Uvedené vlastnosti jsou charakteristické pro všechny stacionární a invertibilní modely, tj. pro modely typu AR, MA a ARMA.

Proces náhodné procházky

(6.86) $$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$, kde

$\{\varepsilon_t\}$ je proces bílého šumu s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ_ε^2, lze také vyjádřit ve tvaru $y_t = y_0 + \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j$, takže
Nepodmíněná střední hodnota $E(y_t) = y_0$, kde y_0 je počáteční deterministická podmínka, tzn. , že je konstantní v čase. Podmíněná střední hodnota $E(y_t | y_{t-1}) = y_{t-1}$ je zřejmě naopak závislá na čase.

Nepodmíněný rozptyl $var(y_t)=t.\sigma_\varepsilon^2$ je lineární funkcí časové proměnné.

Podmíněný rozptyl $var(y_t|y_{t-1})=\sigma_\varepsilon^2$ je stejně jako v případě stacionárních procesů funkcí homoskedastickou.

Z uvedeného je názorně patrný problém lineárních modelů při modelování finančních a některých ekonomických časových řad, podmíněné rozptyly obou uvedených modelů jsou v čase neměnné. V realitě je však situace často jiná, podmíněné rozptyly jsou v čase proměnlivé.

Modely volatility vycházejí z představy, že např. model

(6.87) $$y_t=\varphi_1 y_{t-1}+e_t$$, kde $|\varphi_1|<1$ a $\{e_t\}$ je *podmíněně heteroskedastický proces* s podmíněnou střední hodnotou $E(\varepsilon_t|\Omega_{t-1})=0$ a *podmíněným rozptylem* $var(e_t|\Omega_{t-1})=h_t$, kde Ω_{t-1} je relevantní minulá informace až do času *t-1*. Tyto požadavky splňuje např. model procesu $\{\varepsilon_t\}$ ve tvaru

(6.88) $$e_t=\sqrt{h_t}.\varepsilon_t$$, kde

$\{\varepsilon_t\}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a s jednotkovým rozptylem. Je-li rozdělení náhodné veličiny ε_t za podmínky informace, která je k dispozici v čase t-1 normované normální, tj. $\varepsilon_t\approx N_{t-1}(0,1)$, potom je rozdělení náhodné veličiny y_t za podmínky informace, která je k dispozici v čase t-1rovněž normální, avšak s podmíněným rozptylem, který se mění v závislosti na plynutí času, tj . $y_t\approx N_{t-1}(0,h_t)$.

Pokud jde o špičatost rozdělení veličiny e_t, vyplývá z vyjádření (6.88) na základě *Jensenovy nerovnosti* [1] vztah :

(6.89) $$E(e_t^4)=E(h_t^2.\varepsilon_t^4)=E(h_t^2).E(\varepsilon_t^4)\geq E(\varepsilon_t^4).E(h_t)^2=E(\varepsilon_t^4).E(e_t^2)^2$$,

takže platí (6.90) $$\frac{E(e_t^4)}{E(e_t^2)^2}\geq E(\varepsilon_t^4),$$

tj. špičatost nepodmíněného rozdělení veličiny e_t je větší nebo rovna špičatosti normovaného normálního rozdělení. Rovnost platí právě tehdy, jsou-li podmíněné rozptyly konstantní.

Jednotlivé modely volatility se mj. liší vzájemně v tom, tak je u nich formulován vývoj podmíněného rozptylu h_t v čase.

---

[1] Podle ní platí pro konvexní funkci $\varphi(.)$ a náhodnou veličinu *Z* nerovnost $\varphi(E(Z))\leq E(\varphi(Z))$. Tuto nerovnost poprvé formuloval a dokázal dánský statistik Johan Jensen [1906]. V našem případě tedy platí: $[E(h_t)]^2\leq E[h_t^2]$, protože kvadratická funkce $\varphi(.)$ proměnné h_t je zde konvexní.

ARCH – modely

Průlomem směřujícím k systematickému modelování volatility byl model ARCH (*autoregressive conditional heteroskedasticity* – autoregresní podmíněná heteroskedasticita), aplikovaný poprvé Robertem Englem [1982] na modelování inflace ve Velké Británii. Modely tohoto typu a především jejich zobecnění na modely typu GARCH (bude o nich pojednáno dále) **v současnosti představují patrně nejvýkonnější nástroj pro modelování finančních časových řad, které nebyly dosud ničím významnějším překonány. Vychází se zde ze dvou predikátů/tezí:**

- **Modely časových řad jsou *heteroskedastické*, tj. obsahující volatilitu proměnné v čase.**
- **Volatilita je jednoduchou kvadratickou funkcí minulých předpovědních chyb (tzn. odchylek od podmíněné střední hodnoty) e_t),.**

První predikát je plně v souladu s pozorovanou empirickou skutečností v oblasti finančních časových řad, takže se omezíme na vysvětlení pouze druhé teze:

Vzhledem k fenoménu volatility vytvářet jisté shluky, kdy větší (či resp. menší) výkyvy v dané finanční řadě lze očekávat spíše po větších (resp. menších) finančních výkyvech, lze považovat volatility za pozitivně autokorelované a jako jejich nejjednodušší pro jejich modelování zvolit autoregresní model. Navíc je $E(e_t)=0$, takže podle (6.6) platí

(6.24) $$\sigma_t^{\,2} = var\left(e_t \middle| \Omega_{t-1}\right) = E\left(e_t^{\,2} \middle| \Omega_{t-1}\right) = e_t^{\,2}$$

V důsledku toho se pro finanční časové řady stává realistickým pro vhodně zvolené (nevelké) ***m* vztah**

(6.25) $$\sigma_t^{\,2} = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^{\,2} + ... + \alpha_m e_{t-m}^{\,2},$$

který zřejmě prezentuje volatilitu jako jednoduchou kvadratickou funkci zpožděných hodnot e_t. Za povšimnutí stojí, že závislost (6.25) je nestochastická, tj. je vyjádřena bez náhodné reziduální složky.

Na základě formulace obecného zápisu nelineárního modelu (6.7) lze přistoupit k formulaci modelu ARCH (m) m-tého řádu ve tvaru

(6.26) $y_t = \mu_t + e_t$, $e_t = \sigma_t . \varepsilon_t$,

$$\sigma_t^{\,2} = \alpha_0 + \alpha_1 . e_{t-1}^{\,2} + \alpha_2 . e_{t-2}^{\,2} + ... + \alpha_m . e_{t-m}^{\,2}$$ **, kde**

ε_t jsou *i.i.d.* náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Často se navíc **předpokládá, že mají normální rozdělení**, tj. $\varepsilon_t \approx N(0,1)$, případně stejným způsobem (tj. jedničkovým rozptylem) standardizované ***t-rozdělení***. **Podmíněná střední hodnota μ_t je modelována pomocí vhodné rovnice střední hodnoty – viz (6.4A) - která je většinou lineární. Dost často se jedná o podmíněnou střední hodnotu odpovídající lineárnímu regresnímu modelu (někdy zredukovanému jen na jeho úrovňovou konstantu *intercept*) nebo ARMA procesu.**

Jako tři vybrané konkretizace tohoto vyjádření můžeme zde uvést:

(6.27) (M1) $y_t = e_t$ $\quad e_t = \sigma_t.\varepsilon_t \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1.e_{t-1}^2 + \alpha_2.e_{t-2}^2 + ... + \alpha_m.e_{t-m}^2$,

tedy s nulovou podmíněnou střední hodnotou

(6.28) (M2) $y_t = \gamma_0 + \gamma_1 x_{t1} + \gamma_2 x_{t2} + ... + \gamma_m x_{tm}$, $\quad e_t = \sigma_t.\varepsilon_t$

$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1.e_{t-1}^2 + \alpha_2.e_{t-2}^2 + ... + \alpha_m.e_{t-m}^2$,

tedy s vazbou na exogenní regresory a

(6.29) (M3) $y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + ... + \gamma_p y_{t-p} + e_t \quad e_t = \sigma_t.\varepsilon_t$

$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1.e_{t-1}^2 + \alpha_2.e_{t-2}^2 + ... + \alpha_m.e_{t-m}^2$,

tj. s podmíněnou střední hodnotou odpovídající autoregresnímu procesu AR(p).

Charakteristikou uvedených tří modelů je domněnka, že velké minulé hodnoty předpovědních chyb, které v minulosti vyvolaly zvýšenou volatilitu, **implikují také zvýšenou volatilitu v přítomnosti.**

První z těchto modelů se také nezřídka zapisuje v podobě

(6.27*) $y_t = e_t$, $e_t = \sqrt{h_t}.\varepsilon_t$, $h_t = \alpha_0 + \alpha_1.e_{t-1}^2 + \alpha_2.e_{t-2}^2 + ... + \alpha_m.e_{t-m}^2$,

Poznámka 1: **Je užitečné** ještě jednou **zdůraznit, že zatímco náhodné veličiny** e_t **obecně** (pouze) **nekorelované, musí být veličiny** ε_t **stochasticky nezávislé. Logické jsou také průběhy korelogramů a parciálních korelogramů ARCH-modelů. Např. v modelu (6.27) by měl odhadnutý korelogram řady** y_t **vykazovat všechny hodnoty nevýznamné, zatímco odhadnutý parciální korelogram čtvercové řady** y_t^2 **by měl mít zřetelný bod useknutí v místě *m*.**

Koeficienty α_j **v definicích rozptylu musí splňovat určité podmínky regularity, aby náhodné veličiny** e_t **měly konečné aspoň druhé (nepodmíněné) momenty (tj. nepodmíněný rozptyl). V každém případě se však jako postačující (ale nikoliv nutné) podmínky kladných hodnot** σ_t^2 **požadují kladnosti/nezápornosti**

(6.30) $$\alpha_0 > 0 \, , \alpha_1 \geq 0 \, , \alpha_2 \geq 0 \quad ,....., \alpha_m \geq 0 \, .$$

Poznámka 2. Maticovým rozšířením základního modelu by bylo schéma

(6.31) $y_t = \mu_t + e_t$, $e_t = \sigma_t.\varepsilon_t$, $\sigma_t^2 = \alpha_0 + (e_{t-1},...,e_{t-m}).A(e_{t-1},...,e_{t-m})'$,,

ve kterém se vedle podmínky $\alpha_0 > 0$ **požaduje, aby byla matice A pozitivně semidefinitní, tj. měla nezáporná všechna vlastní čísla. Rozptyl je zde definován kvadratickou formou odchylek. Výchozí model (6.26) je** rovněž **touto definicí „úsporně pokryt„. Matice A je zde diagonální a obsahuje nezáporné diagonální prvky: některá** α_j **ale mohou být nulová.**

Některé vlastnosti ARCH-modelu lze ukázat na nejjednodušším procesu ARCH(1):

(6.32) $y_t = \mu_t + e_t$, $e_t = \sigma_t . \varepsilon_t$, $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 . e_{t-1}^2$, $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$:

1) Nepodmíněná střední hodnota odchylek je skutečně nulová:

(6.33) $$E(e_t) = E(Ee_t | \Omega_{t-1}) = E(\sigma_t . E(\varepsilon_t)) = 0 .$$

2) Pro (nepodmíněný) rozptyl odchylek e_t platí: (6.34)

$$var(e_t) = E(e_t^2) = E(E(e_t^2 | \Omega_{t-1})) = E(\sigma_t^2) = E(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \, var(e_{t-1})$$

Protože ale **odchylky e_t mají stejné rozdělení** (a tedy shodné rozptyly)**,dostaneme odtud**

(6.35) $$var(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} ,$$

přirozeně pokud platí $0 \leq \alpha_1 < 1$, tj. postačující podmínka nejen pro existenci rozptylu *var* e_t, ale také pro slabou **stacionaritu řady e_t**

3) Často je potřebné analyzovat také špičatost odchylek e_t.Pokud platí, že $e_t \approx N(0,1)$, pak následně též platí

(6.36) $$E(e_t^4) = E(Ee_t^4 | \Omega_{t-1}) = 3.E((\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2)^2) = \\ = 3((\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 . var(e_{t-1})) + \alpha_1^2 . E(e_{t-1}^4)).$$

Ze stejného důvodu jako pro rozptyl a s využitím vztahu (6.35) odtud dostaneme:

(6.37) $$E(e_t^4) = \frac{3\alpha_0^2 (1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}$$**, pokud přitom platí**

postačující podmínka existence 4.obecného momentu e_t: $0 \leq \alpha_1 < \sqrt{1/3}$.

ověření (6.37):

$$E(e_t^4) = 3((\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 . var(e_{t-1})) + \alpha_1^2 . E(e_{t-1}^4)) = \\ 3\left((\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 . \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^2 . E(e_{t-1}^4) \right)$$ **, tedy následně**

$$E(e_t^4) - 3\alpha_1^2 E(e_{t-1}^4) = (1 - 3.\alpha_1^2) E(e_t^4) = 3\left(\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 . \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \right)$$**, a protože rozptyl i**

4.obecný moment jsou nezávislé na *t*, takže platí $var(e_t) = var(e_{t-1})$, $E(e_t^4) = E(e_{t-1}^4)$

$$(1 - 3\alpha_1^2) E(e_t^4) = 3\left(\frac{(1 - \alpha_1)\alpha_0^2}{1 - \alpha_1} + \frac{2\alpha_0^2 \alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) = 3\left(\frac{\alpha_0^2 - \alpha_1 \alpha_0^2 + 2\alpha_0^2 \alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) = 3\left(\frac{\alpha_0^2 (1 + \alpha_1)}{1 - \alpha_1} \right)$$

(Nepodmíněný) **koeficient špičatosti odchylek e_t je následně**

(6.38) $$\gamma_2 = \frac{E(e_t^4)}{(var(e_t))^2} - 3 = 3.\frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} - 3 = \frac{6\alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} \geq 0. \quad ,$$

To je ve shodě s požadavkem modelovat *leptokurtické rozdělení* (odchylky e_t podmíněného normálního modelu ARCH(1) generují odlehlá pozorování s větší pravděpodobností než jak je tomu u *normálního bílého šumu*.).

Poznámka 3. Přechozí výsledky lze rozšířit taktéž na model ARCH(m). Postačující podmínka pro slabou stacionaritu jeho odchylek e_t požaduje, aby všechny kořeny autoregresního polynomu $P_A(z) = 1 - \alpha_1.z - \alpha_2.z^2 - .... - \alpha_m.z^m$ ležely vně jednotkového kruhu v komplexní rovině; speciálně: **z nezápornosti parametrů odtud plyne podmínka $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m < 1$, přičemž pro rozptyl odchylek e_t pak platí**

(6.39) $$var(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - .... - \alpha_m}.$$

Z poměrně obsáhlého počtu výpočetních procedur pro modely ARCH vybereme jen některé (pro obecnější modely typu GARCH mají tyto procedury analogický tvar). **Pro přiblížení budeme pracovat s modelem ARCH(*m*) ve tvaru (6.26), tj. s nulovou podmíněnou střední hodnotou μ_t a s přímo pozorovatelnými odchylkami e_t. (Již bylo zmíněno, že v praxi je toto obvykle splněno pro finanční řady logaritmovaných měr zisku r_t). V opačném případě je nutné vzít v úvahu podmíněnou středí hodnotu: např. v modelu (6.26) bychom pracovali s vyjádřením odchylek ve tvaru**

(6.40) $$e_t = y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \varphi_2 y_{t-2-....-}\varphi_p y_{t-p}$$

Postupy identifikace ARCH-modelu

Řád modelu lze identifikovat jako bod useknutí odhadnutého parciálního korelogramu v modelu tvaru

(6.41) $$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1.e_{t-1}^2 + \alpha_2.e_{t-2}^2 + ... + \alpha_m.e_{t-m}^2 + u_t$$ **, kde**

u_t je klasický bílý šum, (tzn. stejným způsobem, jako pro klasický AR model v rámci Boxovy-Jenkinsovy metodologie). Při příliš velkém řádu *m* modelu hrozí nebezpečí, že odhadnuté parametry nebudou splňovat podmínky nezápornosti (6.30). Aby nebylo nutné odhadovat velký počet parametrů při velkých řádech m, navrhl Engle [1982] používat místo třetího vztahu v (6.26) úsporný model s *m*=4, ale obsahující jen dva parametry:

(6.42) $$\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1.\left(0{,}4.e_{t-1}^2 + 0{,}3.e_{t-2}^2 + 0{,}2e_{t-3}^2 + 0{,}1e_{t-4}^2\right)$$

(model rozloženého zpoždění s lineárně klesajícími vahami.)

Odhad parametrů ARCH-modelu

Protože kvantifikační techniky založené na *principu nejmenšího součtu čtverců* nejsou pro odhady *modelů s podmíněnou heteroskedasticitou* z více důvodů **vhodné, odhadují se tyto modely obvykle *metodou maximální věrohodnosti*. V tomto případě platí pro příslušnou hustotu pravděpodobnosti vztah**

(6.43) $f(e_1,e_2,....,e_n)=f(e_n|\Omega_{n-1}).....f(e_{m+1}|\Omega_m).f(e_1,e_2,...,e_n)$. **Proto, pokud** $\varepsilon_t \approx N(0,1)$, **bude mít** (podmíněná) **logaritmovaná věrohodnostní funkce tvar**

(6.44) $$L^*(\alpha_0,\alpha_1,....,\alpha_m)=\sum_{t=m+1}^{n}\left(-\frac{1}{2}ln(2\pi)-\frac{1}{2}ln(\sigma_t^2)-\frac{1}{2}(\frac{e_t^2}{\sigma_t^2})\right).$$

Poslední činitel byl vynechán, protože podmiňujeme počátečními hodnotami $e_1e_2,...e_m$.

Volatility pro log-věrohodnostní funkci (6.44) vyjadřujeme pomocí parametrů α_j **rekurentně ze vztahů**

(6.45) $$\sigma_t^2=\alpha_0+\alpha_1.e_{t-1}^2+\alpha_2.e_{t-2}^2+.......+\alpha_m.e_{t-m}^2 \quad t=m+1, m+2,...\ n.$$

Pokud normální rozdělení $e_t \approx N(0,1)$ **není adekvátní příliš těžkým koncům modelovaných finančních dat, lze užít eventuálně i jiná rozdělení. Např. má-li** $e_t \approx t_\nu(0,1)$, **pak se analogicky vůči (6.44) použije logaritmovaná věrohodnostní funkce ve tvaru**

(6.46) $$L^*(\alpha_0,\alpha_1,....,\alpha_m)=-\sum_{t=m+1}^{n}\left(\frac{\nu+1}{2}ln\left(1+\frac{e_t^2}{(\nu-2).\sigma_t^2}\right)+\frac{1}{2}ln(\sigma_t^2)\right).$$

Pomocí stupňů volnosti ν_t **můžeme řídit pravděpodobnostní chování chvostů rozdělení tím, že pro** $\nu_t \to \infty$ **přechází** (centrální) ***t-rozdělení* na normální. Pokud ani *t-rozdělení* není pro daná data dostatečně *leptokurtické*, lze aplikovat např. *QED*-rozdělená (*generalized error distribution*) .**

Maximalizace logaritmických věrohodnostních funkcí pro získání konečných ML-odhadů je výlučně softwarovou záležitostí (nejčastěji se k tomuto účelu užívá *BHHH-algoritmus*[2]). Přitom se většinou dohaduje simultánně celý model včetně rovnice střední hodnoty (tj. např. parametrů $\varphi_1,\varphi_2,..,\varphi_p$ **ve vyjádření (6.40)), zpravidla včetně rozptylové matice odhadnutých parametrů.**

Poznámka3. Použijeme-li pro model ARCH nekorektně **podmíněné normální rozdělení** $e_t \approx N(0,1)$, **budou odpovídající ML-odhady dotčeného parametrů modelu stále konzistentní** (pokud byl model jinak korektně identifikován), **ale** většinou **to již nebude platit o odhadu jejich kovarianční matice. Konzistentní odhad** této matice **je ale možné pořídit jako *QML-odhad* (*quasi-maximum likelihood*). Tento postup (označovaný** někdy **jako robustní vůči nenormalitě** či **heteroskedasticity consistent covariances), obsahuje např. software EViews 5.1, ale také třeba *gretl*.**

---

[2] viz Berndt,E.R., Hall. B.H., Hall. R.E., Hausman, J.A. [1974] Estimation and Inference in Nonlinear Statistical Models. *Annals of Economic and Social Measurement 3*, p.653-665.

GARCH – modely

ARCH(m) model vykazuje kromě předností také některé nedostatky:

- **Vyžaduje často příliš vysoký řád *m*, aby adekvátně popsal vývoj volatility dané časové řady.**
- Ve vztahu k předchozímu **je často nutno odhadovat značný počet parametrů, přičemž navíc může u některých dojít k porušení podmínky nezápornosti.**
- **Je sice zohledněno shlukování volatility, ale nikoliv již pákový efekt či asymetrie,** kdy kladné a záporné odchylky mohou mít odlišný vliv na volatilitu.

Předchozí nedostatky odstraňuje GARCH (*generalized ARCH*) – model. V tomto modelu, jehož základní formalizaci navrhl Bollerslev[3] a v jehož z mnoha různých modifikací může volatilita či podmíněný rozptyl procesu záviset také na svých předchozích (zpožděných) **hodnotách. Zvlášť jde o model GARCH(1,1), který je nejjednodušším představitelem této třídy modelů, je dnes jedním z nejvíce používaných u finančních časových řad, protože je schopen pomocí tří parametrů zvládnout velmi obecné volatilní struktury** (modely GARCH vyšších řádů se proto v praxi využívají jen sporadicky).

Model GARCH(m,s) má tento tvar

(6.51) $y_t = \mu_t + e_t$, $e_t = \sigma_t . \varepsilon_t$, $\sigma_t^{\,2} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{t-i}^{\,2} + \sum_{j=1}^{m} \beta_s \sigma_{t-j}^{\,2}$**, což ho činí dobř srovnatelným s vyjádřením ARCH-modelu (rozdílnost je pouze ve třetí podmínce).**

I zde jsou ε_t ***i.i.d.* náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem a obvykle se** c **předpokládá, že mají normální rozdělení**, tj. $\varepsilon_t \approx N(0,1)$ nebo t-rozdělení o větším počtu stupňů volnosti. Pro přítomné parametry se předpokládá splnění těchto podmínek:

(6.52) $\alpha_0 > 0\,, \alpha_i \geq 0\,, \beta_j \geq 0\,; \quad \sum_{i-!}^{max[m,s]} (\alpha_i + \beta_i) < 1$., kde klademe

$\alpha_i = 0$ **pro** $i > m$ **a** $\beta_j = 0$ **pro** $j > s$ **. Pokud s=0, dostáváme zřejmě model ARCH(m).**

Poslední nerovnost v(6.52) je postačující pro existenci rozptylu

(6.52A)
$$var(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{max[m,s]} (\alpha_i + \beta_i)} .$$

---

[3] **Bollerslev,T.[1986]: Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity . *Journal of Econometrics*. 31 p.307-327**
Bollerslev,T.[1987]: A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Pirice snad rates of Return. *Review of Economics and Statistics* 69, p.542-547.
Bollerslev,T.[1988: On the Correlation Structure for the. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process. *Journal of Time Series Analysis* 9. p.121-131.

Speciálně model GARCH(1,1) má jednoduchý tříparametrický tvar

(6.53) $y_t = \mu_t + e_t$, $e_t = \sigma_t.\varepsilon_t$, $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1.e_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$,

(6.53A) $\alpha_0 > 0\,, \alpha_1 \geq 0\,, \beta_1 \geq 0\,; \alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Nepodmíněný rozptyl procesu GARCH(1,1) $\{e_t\}$ má podobu

$$var\, e_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$$

Pro jeho koeficient špičatosti máme – Bolerslev [1986] - vyjádření

(6.54) $\gamma_2 = \dfrac{E\left(e_t^4\right)}{var\left(e_t^2\right)^2} = \dfrac{3.\left(1-(\alpha_1+\beta_1)^2\right)}{1-2\alpha_1^2-(\alpha_1+\beta_1)^2} - 3 = \dfrac{6\alpha_1^2}{1-2\alpha_1^2-(\alpha_1+\beta_1)^2} \geq 0.$, a to za platnosti postačující existenční podmínky

(6.54A) $1-2\alpha_1^2-(\alpha_1+\beta_1)^2 > 0$ neboli také $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$,

jinak je špičatost nekonečně velká $+\infty$.

Srovnáme-li podmínku (6.54A) s analogickou pro ARCH(1) model, kde postačující podmínka existence 4.obecného momentu e_t vyžadovala, aby $0 \leq \alpha_1 < \sqrt{1/3}$ a (nepodmíněný) koeficient špičatosti odchylek e_t byl roven

(6.38) $\gamma_2 = \dfrac{E(e_t^4)}{(var(e_t))^2} - 3 = \dfrac{6\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}.$,

lze konstatovat, že při samotné dodržení podmínky pro α_1 u ARCH(1) modelu

$$3\sqrt{1/3}^2 + 2\sqrt{1/3}\beta_1 + \beta_1^2 = 1 + 2\sqrt{1/3}\beta_1 + \beta_1^2 < 1$$

tzn. $2\sqrt{1/3}\beta_1 + \beta_1^2 < 0$ tj. $\beta_1\left(2\sqrt{1/3} + \beta_1\right) < 0$ nepostačuje ke splnění (6.54A).

Konformita podmínek pro koeficient špičatosti nastává zřejmě jen pro $\beta_1 = 0$.

Hodnoty autokorelační funkce GARCH(1,1) modelu klesají s rostoucím zpožděním *k* geometricky. Rychlost tohoto klesání závisí na hodnotě součtu $\alpha_1 + \beta_1$: blíží-li se tento součet hodnotě 1, je pokles autokorelační funkce velmi pozvolný. Hodnoty parciální autokorelační funkce rovněž s rostoucím zpožděním geometricky klesají. Obecně lze konstatovat, že tvary ACF a PACF procesu e_t^2 odpovídají tvarům těchto funkcí u modelu ARMA(p,q).

Pokud jde o výpočetní procedury uplatnitelné pro GARCH-modelové specifikace, v podstatě jde o tytéž, na kterých je založena kvantitativní analýza ARCH-modelů.

Předpovědi volatility v modelu GARCH(1,1):

Podle (6.53) zřejmě platí:

(6.55) $$\sigma_t^2(t-1) = \alpha_0 + \alpha_1 . e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 .$$

Protože platí

$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_t^2 + \alpha_1 . \sigma_t^2 \left(e_t^2 - 1\right)$ a také $E\left(\varepsilon_t^2 - 1 \middle| \Omega_{t-1}\right) = 0$, je rovněž

(6.56) $$\hat{\sigma}_{t+1}^2(t-1) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) . \hat{\sigma}_t^2(t-1)$$ a obecně

(6.57) $$\hat{\sigma}_{t+\tau}^2(t) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) . \hat{\sigma}_{t+\tau-1}^2(t)$$ pro libovolné (nevelké) $\tau > 1$.

Postupnými substitucemi dostáváme konečný výraz

(6.58) $$\hat{\sigma}_{t+\tau}^2(t) = \frac{\alpha_0 \left(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{\tau-1}\right)}{1 - \alpha_1 - \beta_1} + (\alpha_1 + \beta_1)^{\tau-1} . \hat{\sigma}_{t+1}^2(t)$$, který zřejmě

konverguje za podmínky (6.53A) $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ k limitní hodnotě

(6.59) $$\hat{\sigma}_{t+\tau}^2(t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$ při $\tau \to \infty$.

Předpověď volatility tedy konverguje s rostoucím předpovědním horizontem k nepodmíněnému rozptylu předpovědních chyb e_t.

Modifikované GARCH – modely

Analýza nelineárních časových řad je rychle se rozvíjející oblastí, kde nové modely přibývají každým rokem (čímž se celkem už ztrácí přehled v jejich velmi rozmanitých zkratkách). Typickým příkladem jsou právě rozmanité modifikace modelů GARCH. Některé z nich budou dále stručně popsány Jinak o nich existuje obsažná monografická I časopisecká literatura.

IGARCH – modely

Integrovaný GARCH model [integrated GARCH] značený jako IGARCH(m,s), je GARCH(m,s)- model s jednotkovým kořenem autoregresního polynomu v rovnici volatility. Jedná se o analogii ARIMA-modelu, ale pro volatilitu místo pro vlastní časovou řadu. Vyznačuje se tzv. *perzistencí v rozptylu*; zatímco v modelu GARCH, který je *stacionární ve volatilitě*, konvergují předpovědi volatility pro rostoucí předpovědní horizont k nepodmíněnému rozptylu procesu – viz (6.59), v modelu IGARCH přetrvává současná informace jako významná pro předpovědi volatility ve všech (tedy I velmi dlouhých) horizontech.

Při aplikaci GARCH –modelů na vysokofrekvenční časové řady se často stává, že součet odhadů parametrů α_1 a β_1 je číslo velmi blízké 1: Engle Bolerslev [1986] uvedli proto třídu modelů, které se označují jako IGARCH.

Model IGARCH(m,s) je definován jako model GARCH(m,s) podle (6.51), kde ale navíc platí

$$\sum_{i-1}^{max[m,s]}(\alpha_i + \beta_i) = 1$$, takže mj.

jeho nepodmíněný rozptyl (6.52A) existovat nemůže.

Speciálně nejjednodušší modelu IGARCH(1,1) má tvar

(6.61) $y_t = \mu_t + e_t$, $e_t = \sigma_t.\varepsilon_t$, $\sigma_t^2 = \alpha_0 + (1-\beta_1).e_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$,

(6. 61A) $\alpha_0 > 0, 0 \le \beta_1 \le 1$.

Konkrétně model IGARCH(1,1) je tedy modelem GARCH(1,1) s restrikcí $\alpha_1 + \beta_1 = 1$,

Přitom je zajímavé, že při $\mu_t = 0$ a $\alpha_0 = 0$ zřejmě tento model přechází na schéma EWMA definované v (6.13)

Rekurentní předpovědní vztah (6.57) se v něm nyní zjednodušuje do tvaru

(6.62) $\hat{\sigma}_{t+\tau}^2(t) = \alpha_0 + \hat{\sigma}^2_{t+\tau-1}(t)$ pro libovolné (nevelké) $\tau > 1$,

takže pro opakovaných substitucích nakonec dostáváme

(6.63) $\hat{\sigma}_{t+\tau}^2(t) = (\tau - 1).\alpha_0 + \hat{\sigma}^2_{t+1}(t) = (\tau - 1).\alpha_0 + \hat{\sigma}^2_{t+1}$ pro (nevelké) $\tau > 1$.

Zjištěný výsledek znamená, že vliv současných volatilit na předpovědi budoucích volatilit tedy opravdu přetrvává (je persistentní) a volatilní předpovědi se navíc vyvíjejí podle přímky se směrnicí α_0.

Formálně odlišná specifikace modelu IGARCH(1,1) může být zapsána také tvarem

(6.64) $y_t = \mu_t + e_t$, $e_t = \sigma_t.\varepsilon_t$ $e_t^2 = \alpha_0 + \varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta_1\nu_{t-1}$, $\nu_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ tj.

v podobě analogické specifikaci ARIMA(0,1,1).

GJR GARCH – model

Zřetelným handicapem původního modelu GARCH byla neschopnost modelovat asymetrické chování, kdy kladné a záporné odchylky et mohou mít odlišný vliv na volatilitu (ve vztahu k uvedenému pákovému efektu).tj. tendenci volatility zvětšit se více po cenovém poklesu než po cenovém nárůstu stejné velikosti. Úspěšnou modifikací GARCH-modelu v tomto směru navrhli Glosten, Jagannathan a Runkle[4] [1993] (a nezávisle na nich Zakoian [1994][5]),podle nichž byl příslušný model zkratkově pojmenován jako GJR GARCH, i když někdy se používá také označení prahový GARCH model [threshold GARCH či TACHR] v případě této modifikace uplatněné na ARCH-model.

(6.65) $y_t = \mu_t + e_t$, $e_t = \sigma_t . \varepsilon_t$,

$\sigma_t^{\,2} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{t-i}^{\,2} + \sum_{j=1}^{m} \beta_s \sigma_{t-j}^{\,2} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e_{t-k}^{\,2} . I^{-}{}_{t-k}$,kde $I_t^{\,-} = 1$ pro $e_t < 0$

$I_t^{\,-} = 0$ pro $e_t \geq 0$.

Tento model má zajímavou interpretaci v tom, že dopad „dobrých zpráv ($e_{t-i} \geq 0$) modelovaný pomocí α_i je odlišný od dopadu „špatných zpráv“ $e_{t-i} < 0$ modelovaných pomocí $\alpha_i + \gamma_i$ .Je-li $\gamma_i > 0$ znamená to, že špatné zprávy vyvolávají růst volatility, takže se opravdu jedná o pákový efekt se zpožděním i .

V každém případě pro $\gamma_i \neq 0$ se model chová asymetricky.

Nejpoužívanější GJR GARCH model v praxi je zjednodušený model (6.51) na

(6.66) $y_t = \mu_t + e_t$, $e_t = \sigma_t . \varepsilon_t$, $\sigma_t^{\,2} = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^{\,2} + \beta_1 \sigma_{t-1}^{\,2} + \gamma_1 e_{t-1}^{\,2} . I^{-}{}_{t-1}$,

kde $I_t^{\,-} = 1$ pro $e_t < 0$, resp. $I_t^{\,-} = 0$ v opačném případě .

[4] Glosten, L.R.,Jagannathan,R.,Runkle,D.E.: Pn the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance* 48/1993 p.1779-1801

[5] Zakoian, J.M.: Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control.* 18/1994 p.931/934.

EGARCH – model

Jiný přístup k řešení problému asymetrického chování odchylek e_t navrhl D.B.Nelson[1991][6]. Po určitých zjednodušeních jeho návrhu (neboť Nelson původně systematicky pracoval s rozdělením GED veličin ε_t) má jím prezentovaný exponenciální GARCH-model (značený zkratkou **EGARCH) tvaru**

(6.65) $$y_t = \mu_t + e_t \quad , \quad e_t = \sigma_t . \varepsilon_t \; ,$$

$$\ln \sigma_t^{\,2} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left| \frac{e_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \ln \sigma_{t-j}^{\;\;2} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{e_{t-k}}{\sigma_{t-k}},$$

Zápis modelu pomocí logaritmických volatilit má tu výhodu, že podmínky nezápornosti parametrů (např. α_0) nyní pozbývají význam a pákový efekt je nyní exponenciální (nikoliv jako dříve kvadratický)**. Asymetrie zřejmě nastává, když $\gamma_r \neq 0$ pro nějaké konkrétní zpoždění r . Speciálně pro $\gamma_r < 0$ nastává pákový efekt.**

Nejjednodušší a nejpoužívanější tvar *EGARCH-model*u je čtyřparametrický

(6.66) $$y_t = \mu_t + e_t \quad , \quad e_t = \sigma_t . \varepsilon_t \; ,$$

$$\ln \sigma_t^{\,2} = \alpha_0 + \alpha_1 \left| \frac{e_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \beta_1 \ln \sigma^2{}_{t-1} + \gamma_1 \frac{e_{t-1}}{\sigma_{t-1}},$$ **jako speciální případ zápisu (6.65) vždy jen s jediným členem k každé ze tří sumací.**

Před vlastní konstrukcí asymetrických modelů typu *GJR GARCH* a *EGARCH* se doporučuje statisticky otestovat symetrii (viz např Engle a Ng [1993][7]). Pracuje se většinou s reziduy $\widehat{e}_t$ vypočtenými z odhadnutého symetrického *GARCH-model*u – $\widehat{e}_t = y_t - \widehat{\varphi}_1 y_{t-1} - \widehat{\varphi}_2 y_{t-2} - \ldots - \widehat{\varphi}_p y_{t-p}$ a pomocí některého z klasických *t-, F-,* nebo *LM-test*u se testuje významnost parametrů v klasických lineárních modelech typu

(6.67) $$\widehat{e}_t^{\,2} = \delta_0 + \delta_1 S_{t-1}^{\;-} + u_t \qquad S_{t-1}^{\;-} = 1 \text{ pro } \widehat{e}_{t-1} < 0$$
$$S_{t-1}^{\;-} = 0 \text{ pro } \widehat{e}_{t-1} \geq 0 \, .$$

(6.68) $$\widehat{e}_t^{\,2} = \delta_0 + \delta_1 S_{t-1}^{\;-} \widehat{e}_{t-1} + u_t$$

(6.69) $$\widehat{e}_t^{\,2} = \delta_0 + \delta_1 S_{t-1}^{\;-} + \delta_2 S_{t-1}^{\;-} \widehat{e}_{t-1} + \delta_3 S_{t-1}^{\;+} \widehat{e}_{t-1} + u_t$$ **, kde** $S_{t-1}^{\;+} = 1 - S_{t-1}^{\;-}$.

u_t je zde klasický bílý šum. Přitom zaznamenaná významnost parametrů:

δ_1 v modelu (6.67) svědčí o asymetrii volatility v dané časové řadě.

δ_0, δ_1 v modelu (6.68) svědčí o asymetrii volatility a vlivu velikosti záporných odchylek e_t na ni.

$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ v modelu(6.68) svědčí o asymetrii volatility a vlivu velikosti kladných a záporných odchylek e_t na volatilitu v analyzované časové řadě.

---

[6] Nelson, D.B.: Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica 59/1991 p.347-370*

[7] Engle,R.F.,Ng,V.K.: Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance 48/1993 p.1749-1778.*

Poznámka: Ve finančních aplikacích se asymetrické modely pro volatilitu často kombinují s klasickými AR-modely pro střední hodnotu. Např. R.S.Tsay [2002][8] zkonstruoval pro denní logaritmické míry zisku r_t akcií *IBM* od 07/1962 do 12/1999 (9 442 hodnot) model AR(2)-GJR-GARCH(1,2) ve tvaru

GARCH-M – model GARCH in mean

Ve financích závisí často výnos aktiva na jeho volatilitě (např. investor je kompenzován za vyšší riziko vyšším výnosem). Proto Engle, Lilien a Robins [1987] navrhli další modifikaci nejprve ARCH-modelu, kde volatilita či její odmocnina vstupuje do rovnice střední hodnoty (tzv. ARCH-M model).

Pro GARCH modely má např. GARCH(1,1)-M model (GARCH-in-mean)

(6.71) $y_t = \mu_t + \gamma_1 \sigma_t^2 + e_t$, $e_t = \sigma_t . \varepsilon_t$, $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 . e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ nebo

(6.72) $y_t = \mu_t + \gamma_1 \sigma_t + e_t$, $e_t = \sigma_t . \varepsilon_t$, $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 . e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$,

Jestliže je parametr γ_1 signifikantně kladný, pak zvýšené riziko projevující se zvýšenou volatilitou vede ke zvýšené úrovni řady (tj. ke zvýšené podmíněné střední hodnotě).

Modely SV – stochastické volatility

Rovnice volatility základního GARCH-modelu je zřejmě deterministická ve smyslu podmiňování minulou informací. O stochastické volatilitě [stochastic volatility] se v kontextu GARCH modelů mluví v případ, kdy do rovnice volatility je dodán další chybový člen, který i při podmiňování minulou informací zůstává náhodný. Jakkoliv jsou jednoduchým příkladem klasické AR modely volatility, obecně se model SV – viz např. Taylor [1994][9] - prezentuje následovně

(6.73) $y_t = \mu_t + e_t$, $e_t = \sigma_t . \varepsilon_t$, $\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \ln \sigma^2{}_{t-j} + u_t$, kde

$\{u_t\}$ je další bílý šum (zpravidla *i.i.d.* s normálním rozdělením), nezávislá na $\{\varepsilon_t\}$; užití logaritmické volatility umožňuje ignorovat podmínku nezápornosti jako v EGARCH-modelu. Modely SV-typu se osvědčily v kontextu oceňování opčních prémií, kdy volatilita podkladového aktiva, která je jedním ze vstupů do Black-Scholesovy rovnice, nemusí být fixována po celou dobu do splatnosti opce. Nevýhodou těchto modelů je ale jejich poměrně složitý odhad nejčastěji Kalmanovým filtrem.

[8] Tsay,R.S.: Analysis of Financial time Seriers. Wiley, New York 2002.
[9] Taylor , S.,J.: Modelling Stochastic Volatility. *Mathematical Finance 4/1994*, p.183-204

FIGARCH (fractionally IGARCH) – modely

Pokles hodnot autokorelační funkce je při součtu hodnot parametrů $\alpha_1 + \beta_1$ **blízkém 1 geometrický. Realita však může být odlišná a autokorelační funkce se může vyvíjet hyperbolicky** (koeficienty klesají v reciprokých hodnotách)**. Takováto autokorelační struktura může být zachycena** ***frakcionálně integrovanými modely*****, resp. tzv. modely s dlouhou pamětí. Baillie, Bollerslev a Mikkelsen [1992] navrhli třídu modelů, které označili FIGARCH. Proces** e_t^2 **modelu FIGARCH(1,d,0) lze zapsat ve tvaru**

(4.74) $$(1-B)^d e_t^2 = \alpha_0 + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$ **, kde** $0 < d < 1$ **.**

Po dosazení vztahu $\varepsilon_t = e_t^2 - h_t$ **do (4.74) je možné model podmíněného rozptylu vyjádřit ve tvaru ARCH(∞):**

(4.75) $$h_t = \frac{\alpha_0}{1-\beta_1} + \lambda(B).e_t^2$$ **, v němž**

$\lambda(B) = \dfrac{1-(1-B)^d}{1-\beta_1.B}$ **, přičemž lze ukázat, že pro vysoké hodnoty** λ *aproximativně*:

(4.76) $$\lambda_k \approx \left[\frac{1-\beta_1}{\Gamma(d)}\right] k^{d-1}$$ **, kde**

$\Gamma(.)$ **je** ***gama funkce*** (zobecnění faktoriálu pro neceločíselný argument) **tvaru**

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$ **s rekurentní vlastností** $$\Gamma(z) = z.\Gamma(z-1)$$

Ze zápisu (4.76) vyplývá, že – na rozdíl od kovariančně-stacionárního modelu GARCH(1,1) nebo modelu IGARCH(1,1), kde se šoky po podmíněného rozptylu zmenšují geometricky - se v modelu FIGARCH(1,d,0) šoky do podmíněného rozptylu zmenšují pomaleji, a to hyperbolicky (v reciprokých hodnotách)**.**

Obecný model FIGARCH (p,d,q) má vyjádření:

(4.77) $$\varphi(B)\left(e_t^2 - de_t^2\right) = \alpha_0 + [1-\beta(B)]\varepsilon_t$$ **, kde** $0 < d < 1$ **, přičemž kořeny polynomiálních rovnic** $\varphi(B) = 0$ **a** $[1-\beta(B)] = 0$ **leží vně jednotkového kruhu.**

Užité značení: **Polynom** $\beta(B)$**: má tvar** $\beta(B) = \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \ldots + \beta_q B^q$ **.**

Polynom $\varphi(B)$**: má tvar** $\varphi(B) = \varphi_1 B + \varphi_2 B^2 + \ldots + \varphi_p B^p$ **.**