Metoda exponenciálního vyrovnávání[1]

[R.G.Brown - R.F.Meyer]

Je dalším z přístupů, který je řazen (vedle metody klouzavých průměrů) **k adaptivním technikám určení trendové složky časové řady .**

Výchozí úvahou této techniky je, že se k predikci nové hodnoty časové řady :

a) berou v úvahu všechna dostupná pozorování časové řady

b) starší pozorování jsou z hlediska síly ovlivnění aktuálních předpovědí bránа s nižší významností než pozorování nová (aktuální).

Váhová struktura, která je při *Brownově exponenciálním vyrovnávání* uplatněna, je představována geometrickým rozdělením. Váhy jsou tedy stanoveny podle vzorce

(1)
$$w_i = (1-\alpha).\alpha^i$$

Je patrné, že váhy splňují podmínku $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$**, neboť**

$$\sum_{i=1}^{\infty} w_i = \sum_{i=1}^{\infty} (1-\alpha).\alpha^i = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1.$$

Nechť nepřekvapí, že váhová struktura se řídí rozdělením, které je definováno na neomezeném oboru, přestože počet pozorování časové řady, kterým jsou váhy přiřazovány je vždy konečný - z matematického hlediska nepředstavuje tato okolnost žádný problém.

Název exponenciální by odpovídal zespojitění situace, neboť obdobou diskrétního geometrického rozdělení je ve spojitém případě rozdělení exponenciální. *Název tedy nemá nic společného s exponenciálním průběhem trendu.*

Podobně jako *metoda klouzavých průměrů* je i *exponenciální vyrovnávání* založeno na lokáním vyrovnání časové řady jednoduchou matematickou křivkou (na rozdíl od metody klouzavých průměrů se však vzatá pozorování neváží „symetricky„).

Podle typu vyrovnávající křivky rozlišujeme tři základní verze tohoto postupu :

1. **Jednoduché (konstantní) exponenciální vyrovnávání (lokálně vyrovnávající křivkou je** po částech ***konstantní funkce*).**
2. **Dvojité** (také **lineární) exponenciální vyrovnávání (zde je lokálně vyrovnávající křivkou *lineární funkce*).**
3. **Trojité** (také **kvadratické) exponenciální vyrovnání (uplatňuje se parabola 2. stupně lokálně vyrovnávající křivkou *kvadratická funkce*)**

---

[1] **Postup všech typů exponenciálního vyrovnávání je zevrubně popsán v monografii:**
Brown,R.,G.: Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series. *London, Prentice-Hall 1963.* popř. v článku
Brown,R.,G.,Meyer, R.,F.“: The fundamental theory of exponential smoothing. *Operations Research 9/1961 str. 673-684.*

Všechny verze exponenciálního vyrovnávání se opírají o následující úvahu :
V kterémkoliv bodě (pevně zvoleném okamžiku *t*) máme k dispozici jednak :

- **poslední pozorování analyzované časové řady,** tedy y_t
- **předpověď téhož pozorování** y_t^* **(určenou** dříve **na základě předtím**, tj. do čas u t-1 **dostupných pozorování, tedy do hodnoty** y_{t-1} **včetně).**

Předpověď pro "opravenou hodnotu" $\hat{y}_t$ **tedy** nyní **vytvořme pomocí váženého průměru**

(2) $$\hat{y}_t = \alpha . y_t + (1-\alpha) . \hat{y}_{t-1}$$

tzn. že ***nová předpověď je konstruována jako vážený aritmetický průměr skutečné hodnoty "nového" pozorování*** y_t ***a „staré„ předpovědi tohoto pozorování*** y_t^* (při informaci dostupné do okamžiku *t-1* včetně)**. Hodnota "váhové" konstanty** α **rozhoduje o tom, které z obou uplatňujících se informací přisoudíme větší význam (resp. v jaké proporci budeme tyto informace brát).**

Opakovanou substitucí dostáváme ze vztahu (2) výraz

$$\hat{y}_t = \alpha . y_t + (1-\alpha)[\alpha . y_{t-1} + (1-\alpha)\hat{y}_{t-2}] = \alpha . y_t + \alpha .(1-\alpha). y_{t-1} + \left(1-\alpha^2\right)\hat{y}_{t-2}$$

$$\hat{y}_t = \alpha . y_t + \alpha .(1-\alpha). y_{t-1} + \left(1-\alpha^2\right)[\alpha . y_{t-2} + (1-\alpha).\hat{y}_{t-3}]$$

$$\hat{y}_t = \alpha . y_t + \alpha .(1-\alpha). y_{t-1} + (1-\alpha)^2 \alpha . y_{t-2} + (1-\alpha)^3 \hat{y}_{t-3}$$ atd., až po

(3) $$\hat{y}_t = \alpha . y_t + (1-\alpha).\alpha . y_{t-1} + \ldots + (1-\alpha)^{n-1} \alpha . y_{t-n+1} + (1-\alpha)^n \hat{y}_{t-n}$$

Při dostatečně velkém n (teoreticky pro n $\rightarrow \infty$) **dospějeme k nekonečnému součtu**

(4) $$\hat{y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha .(1-\alpha)^j \hat{y}_{t-j}$$ **, což je**

vlastně *aritmetický průměr* (o nekonečném počtu členů) ***„vyrovnaných hodnot"*** **s vahami ve tvaru (1) .**

Výraz (2) $\hat{y}_t = \alpha . y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}$ **, kde** $\alpha = 1-\beta$ **je vyrovnávací konstanta**

lze dále **jednoduchou úpravou přepsat na tvar**

$$\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} + \alpha .(y_t - \hat{y}_{t-1}) = \hat{y}_{t-1} + \alpha .(y_t - \hat{y}_t(t-1)) = \hat{y}_{t-1} + \alpha . d_t ,$$

který bývá nazýván jako chybový či korekční:
pro opravu předchozí vyrovnané hodnoty $\hat{y}_{t-1}$ **použijeme (jakmile dostaneme pozorování** y_t **) příslušně upravenou chybu předpovědi** d_t **o jeden krok dopředu (konstruovanou v čase t -1)**

(2´) $$y_t^* = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j} + \alpha d_{t-1}^*$$ **, kde** $$d_{t-1}^* = y_{t-1}^* - y_t$$

což lze interpretovat tak, že novou předpověď y_t^* **pro** y_t **dostaneme jako součet *skutečné hodnoty pozorování*** y_t **a určitého (100x**α**) procentního podílu chyby předpovědi** d_{t-1}^* **téže veličiny** y_t **určené na základě informací známých jen do minulého období *t-1*** (predikce je sestrojená toliko z hodnot $y_1,\ldots,y_{t-1}$) **.**

Důležitou otázkou je v tomto kontextu volby „vyrovnávající konstanty„ α: zpravidla se omezujeme na rozsah mezi (0,1 – 0,3). Někdy je však vyrovnávací konstanta pojímána jako doplněk α do 1, stanoví se tedy $\gamma \in (0{,}9\,;0{,}7)$. *Čím je hodnota γ blíže k 1 tím váhy přiřazované jednotlivým pozorováním směrem do minulosti klesají pomaleji.*

O rychlosti klesání dává představu toto srovnání s konstantou γ:

k =	1	2	3	4	5	6		10
Srovnejme:	0,9	0,81	0,729	0,6561	0,59049	0,531441	………………...	0,34868
	0,8	0,64,	0,512	0,4096	0,32768	0,262144	………………...	0,1342177
	0,7	0,49,	0,343	0,2401	0,16807	0,117649	………………...	0,02709

Zatímco podíl vah u nejčerstvějších (nezpožděných) **pozorování je 9/7 = 1,2857 : 1, je u desátých pozorování** (tj. se zpožděním 9) **tento poměr již 0,3487/ 0282 tj. 12,34/1**

0,7	0,49	0,343	0,2401	0,16807	0,117649	0,082354	0,057648	0,040354	0,028248
0,9	0,81	0,729	0,6561	0,59049	0,531441	0,478297	0,430467	0,38742	0,348678

Přirozenou otázkou je, zda existují užitečná **vodítka pro určení konstanty α :**

a) Pravidla vyvozená ze statistických požadavků na odhady obecně **:**

a1) Jedna možnost vychází z volby vyrovnávací konstanty ze vztahu

(5) $\frac{1}{n} = \frac{\alpha_0}{2(1-\alpha_0)}$ pro n v rozsahu 6-20, **odkud pro** α **dostaneme (5A)** $\alpha_0 = 1 - \frac{n}{n+2}$

vyvození: přechod od (5) k (5A):

$2(1-\alpha_0) = n.\alpha_0$ **odtud** $2 = \alpha_0(n+2)$ **dále** $\frac{2}{\alpha_0} - 2 = n$ **a následně** $n = \frac{2(1-\alpha_0)}{\alpha_0}$ □ .

n=4: $\alpha_0 = 1 - \frac{4}{6} = 0{,}3333$ **n=6:** $\alpha_0 = 1 - \frac{6}{8} = 0{,}25$ **n=8:** $\alpha_0 = 1 - \frac{8}{10} = 0{,}2$

n=10: $\alpha_0 = 1 - \frac{10}{12} = 0{,}16667$ **n=14:** $\alpha_0 = 1 - \frac{14}{16} = 0{,}125$ **n=18** $\alpha_0 = 1 - \frac{18}{18+2} = 0{,}1$

a2) Další z možností vychází z variantního modelu **(vyrovnání parabolou *k-tého* řádu), na základě kterého se volí α_0 tak, aby vyhovovalo vztahu**

(6) $1-\alpha_0 = (1-\alpha_k)^{k+1}$ α_k je tzv. **ekvivalentní vyrovnávací konstanta.**

a3) Ještě jiná možnost vychází z **nejlépe vyrovnávajícího** (pozorované hodnoty časové řady) **klouzavého průměru délky d. Pak se stanoví α jako pro konstantní/jednoduché exponenciální vyrovnávání** a stejně tak

(7A) pro <u>dvojité exponenciální vyrovnávání</u> (klouzavý průměr) $\alpha = \frac{d-1}{d+1}$

(7B) pro trojité exponenciální vyrovnávání [2] $\alpha = \sqrt{\frac{d-1}{d+1}}$**, kde**

d **je délka (počet členů) nejlépe vyrovnávajícího klouzavého průměru .**

b) Simulační způsob: interval 0,7 - 1 se rozdělí např. na 30 úseků po 0,01, provedou se predikce na několik kroků dopředu, *spočte se průměrná* *nebo střední* *kvadratická chyba predikce a vyhledá se taková hodnota* α*, při které je tato chyba predikce nejmenší.*

Poznámka: Výpočtové vzorce (zejména ***u trojitého exponenciálního vyrovnávání***) **jsou** již **natolik** (technicky) **složité, že je uživatel zpravidla odkázán na některý ze softwarových produktů určených k analýze časových řad,** které zpravidla všechny tři verze exponenciálního vyrovnávání obsahují. **Proto je daleko vhodnější pořídit si příslušné software *(STATGRAPHICS, SPSS, RATS* *apod.*), než pracně počítat hodnoty vyrovnání a předpovědí** (rekurentně) **tabulkovými procesory, kalkulačkou nebo dokonce ručně.**

Komparační zhodnocení: čím je vyrovnávací konstanta α **vzdálenější od 1** (tedy blíže k nule)**, tím je vyrovnání flexibilnější a provedená následná predikce vykazuje vyšší rozkolísanost.**

Podobný rys vykazuje také *trojité exponenciální vyrovnávání* ve srovnání s *dvojitým* a zejména vůči *jednoduchému*, které dává velmi rigidní předpovědi (tj. po částech konstantním trendem) .

1. Jednoduché (konstantní) exponenciální vyrovnávání

Formulace modelu je založena na představě, že pro dané pevné t **a hodnoty zpoždění** $j = 0,1,2,3,\ldots$ **lze uplatnit konstantní trend tvaru**

(11) $$Tr_{t,t-j} = \hat{y}_t = \beta_{t0}$$ pro **j = 0, 1, 2, 3, …., kde**

β_{t0} **je** (jediný) **neznámý parametr. Tato domněnka** (o konstantnosti vývoje) **není příliš realistická, avšak jednoduchost modelu (11) umožňuje přiblížit postup odhadu parametrů** $\beta_{t.}$ **i u složitějších modelů.**

Výchozím předpokladem modelu (11) je tedy trend ve tvaru *po částech konstantní funkce*.

Minimalizační kritérium *má zde tvar*

(12) $$\underset{\beta_{t0}}{Min}\; G(y,\beta_{t0},\alpha) = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\left(y_{t-j}-\beta_{t0}\right)^2 \alpha^j$$

ve kterém se uplatňuje trendový model tvaru $Tr_{ti} = \beta_{t0}$ **(** tedy ***konstantní trend*** **).**

Odhad b_{t0} **parametru** β_{t0} **realizovaný *váženou metodou nejmenších čtverců* (*WLS*) je** pak **dán vztahem**

(13) $$b_{t0} = (1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j y_{t-j}$$

ověření: Derivací výrazu (12) podle β_{t0} **dostaneme:**

(12A) $$\frac{\partial(G(y,\beta_{t0},\alpha))}{\partial b_{t0}} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} 2.\left(y_{t-j}-b_{t0}\right)(-1)\alpha^j$$

Upravíme-li krácením $2(\alpha-1)$ **a položíme-li derivaci rovnou nule, dostaneme**

(12A) $$\sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j}\alpha^j = b_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j$$

Pak s využitím toho, že součet řady $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j = \frac{1}{1-\alpha}$**, obdržíme (13).** .

U tohoto typu mohou být vysloveny námitky, že model s konstantním trendem (11) je pro většinu reálných situací stěží použitelný, poněvadž trend časové řady se zpravidla vyvíjí jiným způsobem než *po částech* ***konstantní funkcí*.**

(14) **vyrovnání pro aktuální období** $(\tau = 0)$: $\hat{y}_t = \beta_{t0}$

(15) **predikce na τ období dopředu** $(\tau > 0)$: $\hat{y}_{t+\tau} = \hat{y}_t$

Předpovídané hodnoty na libovolné období dopředu jsou *tedy* ***shodné s poslední pozorovanou hodnotou*** *(je zřejmé, že tato zásada není vhodná pro situace, kdy časová řada vykazuje jakýkoliv znatelný trend).*

Lze ještě užít tzv. *chybový vzorec:*

(14A) $$\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} + \alpha\left(\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1}\right) = \hat{y}_{t-1} + \alpha\left(\hat{y}_t * - \hat{y}_t(t-1)\right) = \hat{y}_{t-1} + \alpha.d_t$$

Volba vyrovnávací konstanty α pro <u>jednoduché exponenciální vyrovnávání</u>:
Omezujeme se zde zpravidla na interval $0 < \alpha \le 0{,}3$ a podobně jako pro dvojité se užívá

a) fixní volba $\alpha = 0{,}1$ nebo $\alpha = 0{,}2$. (Volba $\alpha = 0{,}3$ se téměř neužívá.)

b) volba $\alpha = \dfrac{1}{m+1}$, kde $d = 2m+1$ je délka klouzavých průměrů adekvátní této řadě (odvozena z požadavku, aby tzv. *<u>střední věk vah</u>* jednoduchých klouzavých průměrů této délky, tj. $\sum_{k=0}^{2m} \dfrac{k}{2m+1}$ a střední věk vah jednoduchého exponenciálního vyrovnávání, tj. $\sum_{k=0}^{m} k.\alpha(1-\alpha)^k$ byly shodné. Přístup ale není ideální, protože stejně musíme vyjít z vhodné délky klouzavého průměru.

c) Jako možné hodnoty α se vezmou hodnoty z intervalu $\alpha = 0{,}01\,,0{,}02,\ldots\ldots,0{,}30$ a vybere se ta hodnota, která nejlépe predikuje ve smyslu minimální hodnoty *SSE*.

<u>$100.(1-p)$ předpovědní interval pro jednoduché exponenciální vyrovnávání</u>

V případě, že rozdělení náhodné složky uvažované řady je alespoň přibližně normální, lze v rámci exponenciálního vyrovnávání vedle bodových předpovědí konstruovat také předpovědní intervaly. Jako <u>$100.(1-p)$ předpovědní interval</u> pro jednoduché vyrovnávání se doporučuje konstruovat interval ve tvaru

(16) $$\left(\hat{y}_{n+\tau}(n) - u_{1-p/2}.d_\tau.MAE \quad ; \quad \hat{y}_{n+\tau}(n) + u_{1-p/2}.d_\tau.MAE\right)$$ **, kde**

libovolné $\tau > 0$ je

$u_{1-p/2}$ **.... $(1-p/2)-$ kvantil normovaného normálního rozdělení**

d_τ **definováno jako $d_\tau = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \approx 1{,}25$ sloužící k převodu MSE na MAE .**

MAE **je *střední absolutní chyba* *vyrovnání*, tedy $MAE = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|y_t - \hat{y}_t(t-1)\right|$**

2. Dvojité (lineární) exponenciální vyrovnávání

Formulace modelu je založena na představě, že pro dané pevné t a hodnoty zpoždění $j = 0,1,2,3,\ldots$ lze uplatnit lokálně lineární trend tvaru

(21) $$Tr_{t,t-j} = \hat{y}_t = \beta_{t0} + \beta_{t1}.t$$ pro ***j* = 0, 1, 2, 3, ….**

Minimalizační kritérium ***má*** *v tomto případě* ***tvar***

(22) $$\underset{\beta_{t0},\beta_{t1}}{Min}\ G(y,\beta_{t0},\beta_{t1},\alpha) = (1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_t - (\beta_{t0} + \beta_{t1}.(-j))\right]^2 \alpha^j$$

ve kterém se uplatňuje lineární trendový model tvaru $Tr_{t-j} = \beta_{t0} - j.\beta_{t1}$.

Výchozím předpokladem modelu (22) je tedy trend ve tvaru *po částech lineární funkce.*

V tomto případě jsou předmětem odhadu dva parametry b_{t0} ***- jako odhad parametru*** β_{t0} - a b_{t1} ***- jako odhad parametru*** β_{t1} .

Odhad obou parametrů *v* (22) ***získáme řešením soustavy normálních rovnic***

(25A) $$b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}$$

(25B) $$\alpha.b_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$

ověření platnosti (25A), (25B): **Derivací výrazu (22) podle β_{t0} dostaneme**

(23A) $$\frac{\partial G(y,\beta_{t0},\beta_{t1},\alpha)}{\partial b_{t0}} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} 2.\left[y_{t-j} - (b_{t0} + b_{t1}.(-j))\right]\alpha^j(-1)$$

Podobně, derivací výrazu (22) podle β_{t1} dostaneme obdobně:

(23B) $$\frac{\partial G(y,\beta_{t0},\beta_{t1},\alpha)}{\partial b_{t1}} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} 2.\left[y_{t-j} - (b_{t0} + b_{t1}.(-j))\right]\alpha^j.j$$

Upravíme-li (23 A) a položíme-li příslušnou derivaci rovnou nule:

(24A) $$0 = \sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{t-j} - b_{t0} + j.b_{t1}\right]\alpha^j$$ **, neboli**

(24A*) $$b_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j - b_{t1}\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j}\alpha^j$$

a s využitím toho, že součet řady $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j = \frac{1}{1-\alpha}$ **a součet řady** $\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^{j-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$

obdržíme $$b_{t0}\frac{1}{1-\alpha} - b_{t1}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j y_{t-j}$$

a následně vynásobením $(1-\alpha)$ získáme (25A) .

Krátíme-li (23B) výrazem $2(1-\alpha)$ a položíme-li levostrannou derivaci rovnou nule:

(24B) $$0=\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{t-j}-\beta_{t0}+\beta_{t1}.j\right]\alpha^{j}.j\ .$$

Výrazy s neznámými β_{t0},β_{t1} přemístíme v rovnici nalevo

(24B*) $$\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}-\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j^{2}\alpha^{j}=\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}y_{t-j}$$

a s využitím toho, že součty řad $\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j-1}=\frac{1}{(1-\alpha)^{2}}$, $\sum_{j=1}^{\infty}j^{2}.\alpha^{j}=\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^{3}}$

máme $$\beta_{t0}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^{2}}-\beta_{t1}\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^{3}}=\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^{j}y_{t-j}$$, což

po vynásobení $(1-\alpha)^{2}$ dává (25B). .

Máme tedy soustavu dvou *normálních* rovnic pro výpočet parametrů b_{t0}, b_{t1}

(25A) $$b_{t0}-\frac{\alpha}{1-\alpha}.b_{t1}=(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$$

(25B) $$\alpha.b_{t0}-\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}.b_{t1}=(1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^{j}.y_{t-j}$$

kterou můžeme vyjádřit v maticovém tvaru

(26) $$\begin{pmatrix}1 & -\frac{\alpha}{1-\alpha}\\ \alpha & -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}b_{t0}\\ b_{t1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}\\ (1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^{j}.y_{t-j}\end{pmatrix}$$, takže

(27) $$.\begin{pmatrix}b_{t0}\\ b_{t1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{\alpha}{1-\alpha}\\ \alpha & -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}\\ (1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^{j}.y_{t-j}\end{pmatrix}$$, kde

determinant matice soustavy (27) je roven $\frac{-\alpha(1+\alpha)+\alpha^{2}}{1-\alpha}=\frac{-\alpha}{1-\alpha}$. Takže

(28) $$.\begin{pmatrix}b_{t0}\\ b_{t1}\end{pmatrix}=\frac{\alpha}{\alpha-1}\begin{pmatrix}-\frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} & -\alpha\\ \frac{\alpha}{1-\alpha} & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}\\ (1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^{j}.y_{t-j}\end{pmatrix}$$,

načež po roznásobení determinantem matice

(29)
$$\begin{pmatrix} b_{t0} \\ b_{t1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2(1+\alpha)}{(1-\alpha)^2} & \frac{-\alpha^2}{\alpha-1} \\ \frac{-\alpha^2}{(1-\alpha)^2} & \frac{\alpha}{\alpha-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} \\ (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j . y_{t-j} \end{pmatrix}.$$

Odtud máme výsledné výrazy pro odhadované parametry

(30A)
$$b_{t0} = \frac{\alpha^2(1+\alpha)}{(1-\alpha)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j}$$

(30B)
$$b_{t1} = \frac{\alpha^2}{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} - \alpha(1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j}$$

Přímý (alternativní nematicový) výpočet parametrů ze soustavy (25A), (25B):

(25A)
$$b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha} . b_{t1} = (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j}$$

(25B)
$$\alpha . b_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha} . b_{t1} = (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j . y_{t-j}$$

Vyjděme z (25A), (25B) a vyjádřeme z obou těchto vztahů např. b_{t1}**:**

(31A)
$$\frac{1-\alpha}{\alpha} . \left(b_{t0} - (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} \right) = b_{t1}$$

(31B)
$$\frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)} . \left(\alpha . b_{t0} - (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j} \right) = b_{t1}$$

Porovnáme obě strany a máme

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} . \left(b_{t0} - (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} \right) = \frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)} . \left(\alpha . b_{t0} - (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j} \right)$$

$$(1+\alpha) . \left(b_{t0} - (1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} \right) = \left(\alpha . b_{t0} - (1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j} \right)$$ **, odečteme**

$$b_{t0} + (1+\alpha) . \left(-(1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} \right) = \left(-(1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j} \right),$$

$$b_{t0} = \left(-(1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j} \right) - (1+\alpha) . \left(-(1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j} \right)$$

a dostaneme výsledný výraz pro b_{t0}

$$b_{t0} = -(1-\alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j . y_{t-j} + \left(1-\alpha^2\right) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j . y_{t-j}$$

Pro výpočet druhého parametru b_{t1} nyní užijeme vztah (31A):

$$b_{t1}=\frac{1-\alpha}{\alpha}.\left(b_{t0}-(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}\right)$$

a postupnými substitucemi dostaneme

tedy $b_{t1}=\frac{1-\alpha}{\alpha}.\left(-(1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+\left(1-\alpha^{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}-(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}\right)$

tedy $b_{t1}=.-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-\alpha^{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}-\frac{(1-\alpha)^{2}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$

tedy $b_{t1}=.-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-\alpha^{2}\right)-\frac{(1-\alpha)^{2}}{\alpha}\right]\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$

tedy $b_{t1}=.-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-\alpha^{2}-(1-\alpha)\right)\right]\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$

tedy $b_{t1}=.-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(-\alpha^{2}+\alpha\right)\right]\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$

tedy $b_{t1}=.-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+[(1-\alpha)(-\alpha+1)]\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$

tedy $b_{t1}=.-\frac{(1-\alpha)^{3}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^{j}.y_{t-j}+(1-\alpha)^{2}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}.y_{t-j}$.

Pokud pracujeme s konečným počtem pozorování, dostaneme soustavu normálních rovnice ve tvaru:

(35A) $$b_{t0}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j - b_{t1}\sum_{j=0}^{n-1} j.\alpha^j = \sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j.y_{t-j}$$

(35B) $$-b_{t0}\sum_{j=0}^{n-1} j\alpha^j + b_{t1}\sum_{j=0}^{n-1} j^2.\alpha^j = -\sum_{j=0}^{n-1} j\alpha^j.y_{t-j}$$

Jejím řešením dostaneme odhady parametrů ve tvaru

(35A) $$b_{t0} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j.y_{t-j}.\sum_{j=0}^{n-1} j^2.\alpha^j - \sum_{j=0}^{n-1} j.\alpha^j \sum_{j=0}^{n-1} j\alpha^j.y_{t-j}}{\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j.\sum_{j=0}^{n-1} j^2.\alpha^j - \left[\sum_{j=0}^{n-1} j.\alpha^j\right]}$$

(35B) $$b_{t1} = \frac{-\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j \sum_{j=0}^{n-1} j.\alpha^j.y_{t-j} + \sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j.y_{t-j}\sum_{j=0}^{n-1} j.\alpha^j}{\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j.\sum_{j=0}^{n-1} j^2.\alpha^j - \left[\sum_{j=0}^{n-1} j.\alpha^j\right]}.$$

Srovnání výsledných odhadů s ( ), ( ) dostaneme takto:

Vyčíslíme výrazy bez ypsilonových členů s využitím toho, že platí

(61) $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j = \frac{1}{1-\alpha}$, (62) $\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$, (63) $\sum_{j=1}^{\infty} j^2.\alpha^j = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$

Výraz ve jmenovatelích (35A) (35B) je rovný

$$\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.\sum_{j=0}^{\infty} j^2.\alpha^j - \left[\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j\right]^2 = \frac{1}{1-\alpha}.\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} - \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^4} = \frac{\alpha+\alpha^2-\alpha^2}{(1-\alpha)^4} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^4}$$

Potom dle (35A)

$$b_{t0} = \frac{\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}}{\frac{\alpha}{(1-\alpha)^4}}$$

$$b_{t0} = \frac{\alpha(1+\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j} - (1-\alpha)\alpha\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}}{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}$$

$$b_{t0} = (1+\alpha)(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j} - (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$

$$b_{t0} = \left(1-\alpha^2\right)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j} - (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$

a podle (35B)

$$b_{t1} = \frac{-\frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}}{\frac{\alpha}{(1-\alpha)^4}}$$

$$b_{t1} = -\frac{(1-\alpha)^3 1}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j.y_{t-j} + (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}$$

Ta je srovnatelná s (25A), (25B) , protože pokud n je dostatečně velké, lze nahradit

(36A) $$b_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j - b_{t1}\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}$$

(36B) $$-b_{t0}\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j + b_{t1}\sum_{j=0}^{\infty} j^2.\alpha^j = -\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$ **. tj.**

(37A) $$b_{t0}\frac{1}{1-\alpha} - b_{t1}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}$$

(37B) $$-b_{t0}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} + b_{t1}\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} = -\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$ **, což po vynásobení**

první rovnice $(1-\alpha)$ a druhé rovnice $-(1-\alpha)^2$ dává přesně

(25A) $$b_{t0} - \frac{\alpha}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.y_{t-j}$$

(25B) $$\alpha.b_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}.b_{t1} = (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j.y_{t-j}$$ **. .**

Zavedeme-li pomocné veličiny

(51a) $$S_n = (1-\alpha).\sum_{j=0}^{n-1}\alpha^j.y_{n-j}$$

(51b) $S_n^{*} = (1-\alpha)^2.\sum_{j=0}^{n-1} j.\alpha^j.y_{n-j}$**, nebo též** $S_n^{[2]} = (1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.S_{t-j}$

lze zapsat výsledné odhady parametrů b_{t0}, b_{t1} ***také jako***

(26A) $$b_{t0} = 2.S_t - S_t^{[2]}$$

(26B) $$b_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[S_t - S_t^{[2]}\right]$$

V případě dvojitého a trojitého exponenciálního vyrovnávání je užitečné definovat dvě** tzv. **"vyrovnávací statistiky" : viz CIPRA se záměnou gama za beta:

(16a) $$S_t = (1-\gamma).\sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j .y_{t-j} = \alpha.\sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j .y_{t-j}$$ jednoduchá vyrovn. statistika

(16b) $$S_t^{[2]} = (1-\gamma).\sum_{j=0}^{\infty} j.\gamma^j S_{t-j} = \alpha.\sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j S_{t-j}$$ dvojitá vyrovnávací statistika

Pro tyto vyrovnávací statistiky platí následující vztahy :

(17a) $$S_t = \alpha.y_t + (1-\alpha).S_{t-1}$$

(17b) $$S_t^{[2]} = \alpha S_t + (1-\alpha).S_{t-1}^{[2]}$$

ověření (17a),(17b):

Rozvedením prvních dvou členů definičního výrazu (16a) dostaneme:

$$S_t = \alpha.\sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j .y_{t-j} = \alpha.(1-\alpha)^0 y_t + \alpha.(1-\alpha)\sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} .y_{t-j} =$$
$$\alpha.y_t + (1-\alpha).\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k .y_{t-(k+1)} = \alpha.y_t + (1-\alpha).\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k .y_{t-1-k} = \alpha.y_t + (1-\alpha)S_{t-1}$$,

přičemž jsme užili dosazení $k = j-1$ **, z čehož** $j = k+1$

Definiční výraz (16b) lze podobně dekomponovat jako

$$S_t^{[2]} = \alpha\sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j .S_{t-j} = \alpha.(1-\alpha)^0 .S_t + \alpha\sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^j .S_{t-j} =$$
$$\alpha.S_t + \alpha(1-\alpha)\sum_{j=1}^{\infty} (1-\alpha)^{j-1} .S_{t-j} = \alpha.S_t + (1-\alpha)\alpha\sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^k .S_{t-(k+1)} =$$
$$\alpha.S_t + (1-\alpha)\alpha\sum_{k=0}^{\infty}(1-\alpha)^k .S_{t-1-k} = \alpha.S_t + (1-\alpha).S_{t-1}^{[2]}$$ □.

se stejnou substitucí indexů j a k.

Výpočet obou těchto statistik se provádí rekurentně počínaje $S_0, S_0^{[2]}$ **.**

Má přitom platit

(26A) $$b_{t0} = 2.S_t - S_t^{[2]}$$ **tj.** $$b_{t0} = 2.\alpha.\sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j .y_{t-j} - \alpha\sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j S_{t-j}$$

(26B) $$b_{t1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[S_t - S_t^{[2]}\right]$$ **tj.** $$b_{t1} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\alpha.\sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j .y_{t-j} - \alpha\sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j S_{t-j}$$

tj. $$b_{t0} = 2.\alpha.\sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j .y_{t-j} - \alpha\sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j S_{t-j}$$ □ .

ověření (18a):

Z (26A), (26B) můžeme naopak vyjádřit obě vyrovnávací statistiky:

$b_{t0} = 2.S_t - S_t^{[2]}$ **a tedy** $S_t^{[2]} = 2.S_t - b_{t0}$

$b_{t1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[S_t - S_t^{[2]}\right]$ **a tedy** $(1-\alpha)b_{t1} = \alpha S_t - \alpha S_t^{[2]}$ **neboli** $S_t - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_{t1} = S_t^{[2]}$

a následně porovnáním $2.S_t - b_{t0} = S_t - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_{t1}$ **tj** $S_t = b_{t0} - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_{t1}$

a následně $S_t^{[2]} = 2.S_t - b_{t0} = 2\left(b_{t0} - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_{t1}\right) - b_{t0} = b_{t0} - 2\frac{1-\alpha}{\alpha} b_{t1}$

srovnejme s (26A) $S_0 = b_{00} - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_{01}$

a s (26B) $S_0^{[2]} = b_{00} - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} b_{01}$ **, takže si to plně odpovídá.**

vyrovnání pro aktuální období $(\tau = 0)$ ***:***

(24) $y_t^* = 2.S_t - S_t^{[2]}$

predikce na τ období dopředu $(\tau > 0)$ ***je dána vztahy***

(25) $y_{t+\tau}^* = b_{t0} + b_{t1}.\tau$ **neboli**

(25a) $y_{t+\tau}^* = \left[2 + \frac{.\tau(1-\alpha)}{\alpha}\right] S_t - \left[1 + \frac{.\tau(1-\alpha)}{\alpha}\right] .S_t^{[2]}$

Model dvojitého exponenciálního vyrovnávání* (21) *je *pro řadu situací* ***dobrým predikčním nástrojem, pokud se při volbě vyrovnávací konstanty řídíme některým z výše uvedených pravidel.***

Při výpočtu statistik $S_t, S_t^{[2]}$ ***postupujeme rekurentně, přičemž jejich počáteční hodnoty pro*** $\tau = 0$ ***získáme ze vztahů :***

(26A) $S_0 = b_{00} - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_{01}$

(26B) $S_0^{[2]} = b_{00} - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} b_{01}$

Počáteční hodnoty odhadů b_{00}, b_{01} ***získáme prostou lineární regresí tak, že několik*** *(cca 6-10)* ***počátečních pozorování řady proložíme regresní přímkou.*** b_{00} ***je*** *příslušná* ***úrovňová konstanta,*** b_{01} ***je parametr sklonu regresní přímky.***

(22) $$\underset{\beta_{t0},\beta_{t1}}{Min}\,(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{tj} - (\beta_{t0} + \beta_{t1}.(-j))\right]^2 \alpha^j$$

Derivací výrazu (22) podle β_{t1} **a jeho anulováním dostaneme:**

$2\,(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty} j.\left[y_{t-j} - (\beta_{t0} + \beta_{t1}.(-j))\right]\alpha^j = 0$ **krátíme výrazem** $2(1-\alpha)$

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\left[y_{t-j} - (\beta_{t0} + \beta_{t1}.(-j))\right]\alpha^j = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j \beta_{t0} + \sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^j \beta_{t1} = 0$$.

Výrazy s neznámými β_{t0}, β_{t1} přemístíme nalevo

$$-\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j + \beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j}$$ což zapíšeme jako

$$\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^j - \beta_{t0}\alpha\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^{j-1} = \alpha\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^{j-1} y_{t-j}$$

Protože dle (52) $\sum_{j=0}^{\infty} j.z^{j-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$, u neznámé β_{t0} máme člen $\alpha\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^{j-1} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$

Dále dle (53) $\sum_{j=0}^{\infty} j.(j-1).z^{j-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$ u neznámé β_{t1} máme

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^j = \alpha^2\sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^{j-2} = \alpha^2\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\alpha^{j-2} + \alpha^2\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^{j-2} = \alpha^2\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\alpha^{j-2} + \alpha^1\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^{j-1}$$

Tedy $\sum_{j=0}^{\infty} j^2\alpha^j = \alpha^2.\frac{2}{(1-\alpha)^3} + \alpha.\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \frac{2\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^3} = \frac{\alpha^2 + \alpha}{(1-\alpha)^3}$

$$\beta_{t1}\cdot\frac{\alpha^2 + \alpha}{(1-\alpha)^3} - \beta_{t0}\cdot\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha^j y_{t-j} \quad \text{(12B)} \quad \alpha.\beta_{t0} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}.\beta_{t1} = (1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j j.y_{t-j}$$

Volba vyrovnávací konstanty α: omezujeme se zde zpravidla na interval $0 < \alpha \le 0{,}3$ a podobně jako pro jednoduché se užívá

a) fixní volba $\alpha = \sqrt{\frac{1}{m+1}}$, kde $d = 2m+1$ je délka klouzavých průměrů adekvátní

b) pro danou řadu (vyplývá opět z porovnání středních věku vah jednoduchých klouzavých průměrů a vah dvojitého exp. vyrovnávání).

c)Jako vhodné hodnoty α se vyšetří hodnoty z intervalu $\alpha = 0{,}01\,,0{,}02,\ldots\ldots,0{,}30$ a vybere se ta hodnota, která nejlépe predikuje ve smyslu míry *SSE*.

Jako $100.(1-p)$ předpovědní interval se doporučuje konstruovat ve tvaru

$$\left(\hat{y}_{n+\tau}(n) - u_{1-p/2}.d_\tau.MAE \quad ; \quad \hat{y}_{n+\tau}(n) + u_{1-p/2}.d_\tau.MAE\right)$$, kde pro

libovolné $\tau > 0$ je d_τ definováno jako

$$d_\tau = 1{,}25.\sqrt{\frac{1 + \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3}\left(\left(1 + 4\alpha + 5\alpha^2\right) + 2(1-\alpha)(1+3\alpha)\tau + 2(1-\alpha)^2\tau^2\right)}{1 + \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3}\left(\left(1 + 4\alpha + 5\alpha^2\right) + 2(1-\alpha)(1+3\alpha) + 2(1-\alpha)^2\right)}}$$

Výpočetní postup (zde pro dvojité exponenciální vyrovnávání) **je tedy následující:**

Nejprve se určí dvojice počátečních parametrů b_{00}, b_{01}, **a to** nejčastěji **prostou lineární regresí tak, že několik** (cca 5-9) **počátečních pozorování řady proložíme regresní přímkou:** b_{00} **je** regresí spočtená **úrovňová konstanta,** b_{01} **je parametr sklonu regresní přímky.**

Poté následuje dle výrazu (26A) **výpočet počáteční jednoduché vyrovnávací statistiky** S_0 **a** dle výrazu (26B) **výpočet počáteční dvojité vyrovnávací statistiky** $S_0^{[2]}$ **.**

(26A) $$S_0 = b_{00} - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_{01}$$

(26B) $$S_0^{[2]} = b_{00} - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} b_{01}$$

Následně postupně konstruujeme posloupnosti jednoduchých a dvojitých vyrovnávacích statistik S_t **a** $S_t^{[2]}$ dle rekurentních vztahů (17a) a (17b).

(17a) $$S_t = \alpha . y_t + (1-\alpha).S_{t-1}$$

(17b) $$S_t^{[2]} = \alpha S_t + (1-\alpha).S_{t-1}^{[2]}$$

Posloupnosti obou parametrů b_{t0} **a** b_{t1} **, které slouží k výpočtům vyrovnaných, resp. předpovídaných hodnot pomocí dvojitého exponenciálního vyrovnání nakonec obdržíme ze vztahů**

(26A), (26B) $$b_{t0} = 2.S_t - S_t^{[2]}, \quad b_{t1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[S_t - S_t^{[2]}\right].$$

Predikce (pro každé pevné *t*) konstruujeme (při znalosti obou parametrů pro dané *t*) **již snadno pomocí predikčního schématu vycházejícího z (21), tj.:**

$$\hat{y}_{t+\tau} = \beta_{t0} + \beta_{t1}.(t+\tau) \text{ pro } \tau = 1,2,3\ldots \quad .$$

3. Trojité (kvadratické) exponenciální vyrovnávání

je třetím užívaným typem exponenciálního vyrovnávání, které se uplatňuje především u časových řad vyznačujících se ve svém dosavadním vývoji úseky se zřetelnou akcelerací nebo naopak decelerací průběhu v čase.

***Minimalizační kritérium* má u toho typu vyrovnání tvar**

(31) $$Min\,(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{t-j}-(\beta_{t0}+\beta_{t1}.(-j))+\beta_{t2}.(-j)^2\right]^2\alpha^j$$

ve kterém se uplatňuje trendový model tvaru

(32) $$y_{t-j}{}^* = \beta_{t0} - j.\beta_{t1} + j^2\beta_{t2}$$

***Zde máme co do činění** již **se třemi konstantami** b_{t0}, b_{t1}, b_{t2} coby **s odhady trojice neznámých parametrů kvadratické funkce** $\beta_{t0}, \beta_{t1}, \beta_{t2}$.*

Odhady těchto parametrů se opět obdrží vyvozením ze soustavy (tří) **normálních rovnic. Ve výrazech se** tentokrát **uplatňují** již **tři vyrovnávací statistiky :**

jednoduchá vyrovnávací statistika $S_t = (1-\alpha).y_t + \alpha.S_{t-1}$

dvojitá vyrovnávací statistika

(33) $$S_t^{[2]} = (1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j.S_{t-j}$$

s vlastností $S_t^{[2]} = (1-\alpha).S_t + \alpha.S_{t-1}^{[2]}$

trojitá vyrovnávací statistika $S_t^{[3]} = (1-\alpha).S_t^{[2]} + \alpha.S_{t-1}^{[3]}$

Pomocí nich se dají vyjádřit jak vyrovnané, tak předpovídané hodnoty :

vyrovnání pro aktuální období $(\tau = 0)$ **:**

(34) $$y_t^* = 3.S_t - 3.S_t^{[2]} + S_t^{[3]}$$

predikce na τ období dopředu $(\tau > 0)$ **:**

(35) $$y_{t+\tau}{}^* = \frac{1}{2\alpha^2}\left\{\begin{array}{l}\left[6\alpha^2 + (1+5\alpha)(1-\alpha).\tau + (1-\alpha)^2.\tau^2\right]S_t \\ -\left[6\alpha^2 + 2(1+4\alpha)(1-\alpha).\tau + 2(1-\alpha)^2.\tau^2\right]S_t^{[2]} \\ +\left[2\alpha^2 + (1+3\alpha)(1-\alpha).\tau + (1-\alpha)^2.\tau^2\right]S_t^{[3]}\end{array}\right\}$$

Predikce pomocí trojitého exponenciálního vyrovnání jsou (zejména při nízké volbě konstanty α - tj. blízké 0,7) **značně citlivé na chování posledních 2-3 pozorovaných hodnot řady. Vykazují-li tato pozorování zřetelný odklon oproti předchozímu průběhu časové řady, poskytne kvadratické vyrovnání zpravidla nepoužitelné předpovědi (tyto se vychylují buď příliš nahoru nebo příliš dolů podle směru vychýlení právě posledních** nejčerstvějších **pozorování).**

Při určování počátečních odhadů b_{00}, b_{01}, b_{02} **se v tomto případě doporučuje volit delší úsek (až 1/2 počtu všech pozorování). Vyrovnání se zde provádí (*pomocí prosté metody nejmenších čtverců*) kvadratickým trendem.**

Derivací výrazu (31) podle β_{t0} a jeho anulováním dostaneme:

$$-(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{t-j}-(\beta_{t0}+\beta_{t1}.(-j))+\beta_{t2}.(-j)^2\right]\alpha^j=0$$ **neboli**

(41A) $$\sum_{j=0}^{\infty} y_{t-j}\alpha^j-\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^2\alpha^j=0$$

(41A) upravíme dále na $$\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j-\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j.\alpha^j+\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^2\alpha^j=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}\alpha^j$$

Po vyčíslení sumací máme $$\beta_{t0}\frac{1}{1-\alpha}-\beta_{t1}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}+\beta_{t2}\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}\alpha^j$$

Derivací výrazu (31) podle β_{t1} a jeho anulováním dostaneme:

$$(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{t-j}-(\beta_{t0}+\beta_{t1}.(-j))+\beta_{t2}.(-j)^2\right]j.\alpha^j=0$$ **neboli**

(41B) $$\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j\alpha^j-\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^j+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j^2.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^3\alpha^j=0$$

(41B) upravíme dále na $$\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha^j+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j^2.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^3\alpha^j=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j\alpha^j$$

Po vyčíslení sumací máme $$\beta_{t0}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}+\beta_{t1}\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^3\alpha^j=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j.\alpha^j$$

Derivací výrazu (31) podle β_{t2} a jeho anulováním dostaneme:

$$(1-\alpha).\sum_{j=0}^{\infty}\left[y_{t-j}-(\beta_{t0}+\beta_{t1}.(-j))+\beta_{t2}.(-j)^2\right]j^2\alpha^j=0$$ **neboli**

(41C) $$\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j^2\alpha^j-\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}j^2\alpha^j+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j^3.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^4\alpha^j=0$$

(41C) upravíme na $$\beta_{t0}\sum_{j=0}^{\infty}j^2\alpha^j+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j^3.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^4\alpha^j=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j^2\alpha^j$$

Po vyčíslení sumací máme $$\beta_{t0}\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}+\beta_{t1}\sum_{j=0}^{\infty}j^3.\alpha^j-\beta_{t2}\sum_{j=0}^{\infty}j^4\alpha^j=\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j^2\alpha^j$$

Nyní můžeme standardně **postupovat tak, že řešíme soustavu rovnic pro neznámé parametry** β_{t0}, β_{t1} **a** β_{t2}**. Její maticové schéma je následující:**

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\alpha} & \frac{-\alpha}{(1-\alpha)^2} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}\\ \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} & \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} & -\frac{\alpha(\alpha^2+4\alpha+1)}{(1-\alpha)^4}\\ \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} & \frac{\alpha(\alpha^2+4\alpha+1)\alpha}{(1-\alpha)^4} & -\frac{(\alpha^3+11\alpha^2+11\alpha+1)\alpha}{(1-\alpha)^5}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\beta_{t0}\\ \beta_{t1}\\ \beta_{t2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}\alpha^j\\ \sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j.\alpha^j\\ \sum_{j=0}^{\infty}y_{t-j}j^2\alpha^j\end{pmatrix}$$

No ale, jak patrno, výpočet parametrů (založený na inverzi této matice) **nebude nic příjemného: v principu přes determinant a vygenerování matice algebraických doplňků. Výsledek-vzorec pro parametry e nicméně obsažen v Brownově monografii.**

Poznámka: Při výpočtech součtů konvergentních nekonečných řad, které se vyskytují v *normálních rovnicích* u různých verzí exponenciálního vyrovnávání, lze užitečně uplatnit poznatky odvozené z teorie mocninných řad.

Máme-li pro argument $0 < z < 1$ definovánu funkci resp. *mocninnou řadu*

(51) $$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$$, **pak**

výpočet derivací této funkce *(do čtvrté derivace včetně)* ***vede k těmto výsledkům:***

(52) $$F'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j.z^{j-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

(53) $$F''(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j.(j-1).z^{j-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

(54) $$F'''(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j.(j-1).(j-2).z^{j-3} = \frac{6}{(1-z)^4}$$

(55) $$F^{IV}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j.(j-1).(j-2).(j-3).z^{j-4} = \frac{24}{(1-z)^5}$$

Všimněme si, že sumace derivovaných prvků mocninné řady (výrazy v součtech v (51,52,53,54) se získají velmi prostým způsobem tím, že derivujeme funkci $F(z)$. Platí to pro první, druhou i třetí (případně i vyšší) **derivaci.**

Vezmeme-li za argument z vyrovnávací konstantu α **-** *to je přípustné, neboť její hodnoty rovněž leží v intervalu (0,1)* ***- dostaneme :***

(61) $$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + ... = \frac{1}{1-\alpha}$$,

(62) $$\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^j = 0.1 + 1\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + ... = \alpha\left(1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + ..\right) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$,

(63) $$\sum_{j=0}^{\infty} j^2.\alpha^j = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$$, **což vypočteme z rozvoje**

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2.\alpha^j = \alpha^2 \sum_{j=0}^{\infty} j^2.\alpha^{j-2} = \alpha^2\left[\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1).\alpha^{j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^{j-2}\right] = \alpha^2\left[\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1).\alpha^{j-2} + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} j.\alpha^{j-1}\right] =$$

$$\alpha^2\left[\frac{2}{(1-\alpha)^3} + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right] = \alpha^2\left[\frac{2\alpha}{\alpha(1-\alpha)^3} + \frac{1}{\alpha}\frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha)^3}\right] = \alpha^2\left[\frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)^3}\right] = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}$$

Dále máme ještě

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \frac{6\alpha^3 + 3\alpha - 3\alpha^3 - 2\alpha + 4\alpha^2 - 2\alpha^3}{(1-\alpha)^4} = \frac{\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha}{(1-\alpha)^4}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \alpha^3 \sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^{j-3} = \alpha^3\left[\sum_{j=1}^{\infty} j.(j-1).(j-2)\alpha^{j-3} + 3j^2\alpha^{j-3} - 2j\alpha^{j-3}\right] =$$

$$\alpha^3 \frac{6}{(1-\alpha)^4} + 3\alpha^3 \sum_{j=1}^{\infty} j^2\alpha^{j-3} - 2\alpha^3 \sum_{j=1}^{\infty} j\alpha^{j-3}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \alpha^3 \sum_{j=1}^{\infty} j.(j-1).(j-2)\alpha^{j-3} + 3\alpha^3 \sum_{j=1}^{\infty} j^2\alpha^{j-3} - 2\alpha^3 \sum_{j=1}^{\infty} j\alpha^{j-3} =$$

$$\alpha^3 \sum_{j=1}^{\infty} j.(j-1).(j-2)\alpha^{j-3} + 3\sum_{j=1}^{\infty} j^2\alpha^j - 2\sum_{j=1}^{\infty} j\alpha^j =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \frac{6\alpha^3}{(1-\alpha)^4} + \frac{3\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3} - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} = \frac{6\alpha^3}{(1-\alpha)^4} + \frac{3\alpha(1+\alpha)(1-\alpha)}{(1-\alpha)^4} - \frac{2\alpha(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^4} =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \frac{6\alpha^3 + 3\alpha(1-\alpha^2) - 2\alpha(1-2\alpha+\alpha^2)}{(1-\alpha)^4}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \frac{6\alpha^3 + 3\alpha - 3\alpha^3 - 2\alpha + 4\alpha^2 - 2\alpha^3}{(1-\alpha)^4} = \frac{\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha}{(1-\alpha)^4} \qquad \square .$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3.\alpha^j = \frac{(\alpha^2 + 4\alpha + 1)\alpha}{(1-\alpha)^4}$$

Pro informaci ještě připojme součty tří dalších mocninných řad typu $\sum_{j=0}^{\infty} j^k.\alpha^j$ **:**

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^4.\alpha^j = \frac{(\alpha^3 + 11\alpha^2 + 11\alpha + 1)\alpha}{(1-\alpha)^5} \qquad .$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^5.\alpha^j = \frac{(\alpha^4 + 26\alpha^3 + 66\alpha^2 + 26\alpha + 1)\alpha}{(1-\alpha)^6} \qquad .$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^6.\alpha^j = \frac{(\alpha^5 + 57\alpha^4 + 302\alpha^3 + 302\alpha^2 + 57\alpha + 1)\alpha}{(1-\alpha)^7}$$

Uvedené vztahy se aktivně uplatňují při výpočtu výrazů, které vedou v jednotlivých typech exponenciálního vyrovnávání k určení odhadů parametrů b_{t0}, b_{t1}, b_{t2} **.**

Holtova vyrovnávací metoda[2]

Jistým zobecněním *dvojitého exponenciálního vyrovnávání* je tzv. *Holtova metoda*, ve které se uplatňují dvě vyrovnávací konstanty $0 < \alpha, \gamma < 1$

α **pro vyrovnání *úrovně/interceptu*** L_t

γ **pro vyrovnání *směrnice/sklonu* lineární přímky** T_t **téže řady**

(71) $$L_t = \alpha . y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

Vyhlazení úrovně je tedy definováno jako konvexní kombinace poslední pozorované hodnoty v čase t **a odhadu této hodnoty vzatého v předchozím čase** $t-1$ **z tehdy dostupných pozorování.**

(72) $$Tr_t = \gamma.(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma).T_{t-1}$$

Pro vyrovnání, resp. predikci zde platí předpisy:

(73) $$\hat{y}_t = L_t$$

(74) $$\hat{y}_{t+\tau}(t) = L_t + Tr_t . \tau \quad \text{pro} \quad \tau > 0$$

Jako volby počátečních hodnot se zde doporučují:

(75A) $$L_0 = y_1$$

(75B) $$Tr_0 = y_2 - y_1$$

Za pozornost stojí, že *Holtova metoda* byla nejprve navržena jako *ad hoc* **postup na základě prosté logické úvahy. Teprve později bylo prokázáno, že *Brownovo dvojité exponenciální vyrovnávání* se zvolenou vyrovnávací konstantou** α **je speciálním případem *Holtova metody*, jejíž vyrovnávací konstanty jsou** pak

(76) $$\alpha_H = \alpha_B(2-\alpha_B) \ , \quad \gamma_H = \frac{\alpha_B}{2-\alpha_B}$$

$\alpha_B = 0,1$ ***, potom*** $\alpha_H = 0,1.(2-0,1) = 0,19$ $\quad \gamma_H = \dfrac{0,1}{2-0,1} = \dfrac{0,1}{1,9} = 0,0527$

$\alpha_B = 0,2$ ***, pak*** $\alpha_H = 0,2.(2-0,2) = 0,36$ $\quad \gamma_H = \dfrac{0,2}{2-0,2} = \dfrac{0,1}{1,9} = 0,111111$

$\alpha_B = 0,3$ ***, odtud*** $\alpha_H = 0,3.(2-0,3) = 0,51$ $\quad \gamma_H = \dfrac{0,3}{2-0,3} = \dfrac{0,3}{1,7} = 0,17647$

---

[2] **Postup je popsán v textu:** Holt, C.,C: Forecasting seasonal and trends by exponentially weighted moving averages . Res. mem. No 52. *Carnegie Institute of Technology. Pittsburg 1957*.