**Trendy s konstantními parametry**

**Obecně lze trendové funkce lze rozdělit** v podstatě **do dvou skupin:**

**A. trendy lineární v parametrech** *( a nelineární pouze v proměnných )*

**V tomto případě lze trendovou složku psát ve tvaru *funkce lineární v parametrech***

**(1) **

**tzn . ve tvaru *lineárně-aditivního schématu* případně**

**(2) **

**Vztah** **(2) se nazývá tvar *lineární v parametrech po transformaci vysvětlované proměnné* nebo také** (podle **W.Eichhorn**a) ***zobecněná kvazilineární funkce.[[1]](#footnote-1)***

**Výpočet parametrů *trendových funkcí lineárních v parametrech* (1)** nečiní probléma **provádí se** *prostou* ***metodou nejmenších čtverců MNČ/OLS.* Protože** všechny  **vysvětlující proměnné jsou nestochastické, je situace s respektováním podmínek *standardního lineárního regresního modelu* usnadněna:**

**a) Přítomnost jedničkového vektoru zajišťuje nulovou střední hodnotu náhodných složek . (Konstantu  lze interpretovat jako výchozí úroveň ukazatele v čase 0)**

**b) Je** automaticky **zajištěna *nestochastičnost*** všech **vysvětlujících proměnných** (**jde** zpravidla **o jednoduché transformace trendu**)**. Není proto třeba ověřovat** pro *konzistenci odhadové funkce***nutnou podmínku** , **protože** ta **je zde splněna vždy.**

**c) V „matici plánu„  se nemohou vyskytnout přesné lineární závislosti mezi „vysvětlujícími„ proměnnými** (takže nemůže vzniknout *problém multikolinearity*)**[[2]](#footnote-2). Pokud nevolíme** dále **funkce ** příliš **„blízké“ (např.  a  ), nehrozí ani *multikolinearita přibližná*.**

**V obou předchozích případech přijímáme aditivní připojení náhodné složky , takže stochastický/regresní tvar trendové (1) funkce je tedy**

**(1St)**  **** a obdobně

**Stochastický/regresní tvar trendové (2) závislosti je**

**(2St)**  ** .**

**Standardní OLS-kritérium pro výpočet trendových parametrů má tvar**

**pro** případ **(1St) ** přes **, ale**

**pro** případ **(2St) **

**V jednom i ve druhém případě lze užít** *prostou* ***metodou nejmenších čtverců MNČ/OLS* bez korekcí, avšak za uvědomění stojí, že v případě (4) OLS-kritérium** ne**minimalizuje rozdíl** prostých, nýbrž **transformovaných (funkcí ) pozorovaných  a vyrovnaných  hodnot** časové řady.[[3]](#footnote-3)

**B. trendy nelineární v parametrech** *( případně nelineární i v proměnných )* .

**V tomto obecném případě lze trendovou funkci psát ve tvaru**

**(3) **

**případně ještě obecněji**

**(4)**  ** .**

**Odpovídající stochastická specifikace tvar trendové funkce (3) je následně**

**(3St)**  **** a obdobně

**Stochastický/regresní tvar trendové závislosti (4) je pak**

**(4St)**  ** .**

**V tomto případě** již **nelze k výpočtu parametrů** (tzn. k jejich konzistentnímu odhadu) **použít standardní *OLS-odhadovou funkci*. K minimalizaci výrazu (4) je zapotřebí** (s výjimkou ojedinělých příznivých podob nelinearity) **uplatnit některou z metod nelineární optimalizace, jako je *NLLS* (*nelineární metoda nejmenších čtverců*) nebo NLLAD (*nelineární metoda nejmenších absolutních odchylek*) s kritérii**

**pro specifikaci (3St) a *NLLS***

**** přes 

**resp. pro specifikaci (3St) a NLLAD**

**** přes

**Poznámka: Nejobecnější myslitelný tvar trendové nelineární specifikace by byl**

**(4St)**  ** .**

**Ten je však natolik neurčitý a výpočetně problematický, že se neužívá.**

**Je patrné, že *konzistentní odhad trendových parametrů dostaneme*** v prvém případě **nasazením *prosté metody nejmenších čtverců* *OLS*, zatímco** ve druhém **je nutné uplatnit *nelineární*** *prostou* ***metodu nejmenších čtverců NLLS.***

**Alternativním postupem pro výpočet trendových parametrů může dále být např. *metoda nejmenších absolutních odchylek LAD*, jejíž minimalizační kritérium je**

**pro případ (3St) **

**pro případ (4St)  .**

**Pravidla pro výpočty diferencí**

**1.diference:  ,  ,  ,  , atd**

**obecně: **

**2.diference: , **

**obecně: **

**3.diference: , **

**obecně: **

**4.diference: **

**obecně: **

Jak patrno, **sestava koeficientů odpovídá analogickému schématu pro binomické součinitele u mnohočlenu typu **

**Nejpoužívanější matematické funkce při trendovém vyrovnání/extrapolaci**

***1. Lineární trend* (11) **

**indikace přítomnosti: první diference**  **jsou přibližně konstantní.**

(Trend je monotónní, zda rostoucí či klesající určuje znaménko koeficientu  ).

**2. Kvadratický trend (12) **

**indikace přítomnosti: druhé diference**  **jsou zhruba konstantní**

(Trend není monotónní, chování v „nekonečné budoucnosti)  určuje znaménko koeficientu  ).

**3. Kubický trend (13) **

**indikace přítomnosti: třetí diference  jsou zhruba konstantní**

(Trend není monotónní, má nejvýš dvě „úvratě“: tzn.jedno lokální maximum, jedno minimum) chování v „nekonečné budoucnosti“  určuje znaménko koeficientu  ).

**4. Polynomický trend s-tého stupně **

**indikace přítomnosti: diference s-tého stupně jsou přibližně konstantní**

**5 Logaritmický trend (15A)  (15B) **

(Trend je monotónní, růst (typické chování) či klesání určuje znaménko koeficientu ).

**indikace přítomnosti: **

****

** závisí na t.**

**Diference „expomocnin„ konvergují s rostoucím t k nule**

**6. Mocninný trend (16) ,** ,  zpravidla 

(Monotónní trend, intenzitu růstu určuje koeficient : při  konvexní,při  konkávní průběh)

**indikace přítomnosti: a) vyjádřeme  , **

**Podíly původních hodnot:  konvergují k 1**

**b) vyjádřeme  **

**Diference logaritmovaných hodnot:  konvergují s rostoucím *t* k 0,** ( ale závisí na *t* )

**7. Exponenciální trend (17)  [  ]**

**indikace přítomnosti: podíly sousedních hodnot resp. první diference logaritmů  jsou** přibližně **konstantní.**

(Monotónní trend, intenzitu růstu určuje koeficient : při konvexní,při  konkávní průběh).

**8. Modifikovaný exponenciální trend (18) **

**indikace přítomnosti: podíly** sousedních **prvních diferencí  jsou**

**přibližně konstantní**

**9. Logistický trend (19)  s parametry **

**indikace přítomnosti: a) histogram prvních diferencí** **je tvarem podobná křivce**

**(hustotě)** normovaného **normálního rozdělení .**

**b) podíly** sousedních **prvních diferencí reciprokých hodnot**

** jsou přibližně konstantní.**

***Inflexní bod logistické křivky je v bodě  .***

**10. Gompertzův trend ** nebo ekvivalentně  **(20)**  [****]

**indikace přítomnosti: podíly prvních logaritmovaných diferencí** 

**jsou přibližně konstantní**

***Inflexní bod má Gompertzova křivka v bodě ***

**11. Odmocninný trend **

**12. Hyperbolický trend **

**13. Lineárně-hyperbolický trend **

**1A) výpočet parametrů lineárního trendu **

**Pro jejich určení lze nejsnáze uplatnit výraz pro *OLS-minimalizační kritérium* z výchozí regresní specifikace (3)**

**, zde konkretizované na**

**(21)  .**

**a) Uplatněním standardního postupu – derivováním (21) podle obou neznámých parametrů dostaneme soustavu dvou nutných podmínek extrému**

**(22A,B)  , resp. **

**a po očividných úpravách**

** , resp.  neboli**

**(23A,B)  , resp. **

**Přeskupením výrazů na obou stranách dospějeme k *soustavě normálních rovnic* pro odhadnuté parametry  - zde značené  - ve tvaru**

**(24A) **

**(24B)  , jejímž řešením je dvojice**

**(25A,B)  **

**Po úpravách součtových výrazů  ,  a vydělením čitatele i jmenovatel  dostaneme pro **

**(26) **

**a následně pro  **

**b) Ke stejným výrazům dospějemeaplikací standardního vzorce pro *OLS-odhady parametrů, tedy* , pokud v něm konkretizujeme matici X jako**

** . Potom máme **

**Zřejmě máme  ,  .**

**Výpočtem** (řešením pro neznámé  ) **dostaneme dvojici odhadů (25A,B). Že jde skutečně o minimum, se snadno přesvědčíme stejně snadno jako v případě minimalizace SSE** (součtu čtverců reziduí) **v lineárním regresním modelu.**

**Předpověď budoucí hodnoty  má u lineárního trendu tvar**

**(27)  .**

**Příslušný -procentní předpovědní interval** (při neznalosti ) **je**

**(28)  , kde**

**** je **vyrovnaná hodnota závisle proměnné**

**** je **počet stupňů volnosti (rozdíl mezi počtem pozorování a počtem**

**trendových parametrů)**

**** je **1-p/2 (.100) % kvantil Studentova t-rozdělení o n-2 stupních volnosti**

**** je **hodnota :  , přičemž**

** je matice** nestochastických **„regresorů“.**

**S ohledem na specifický výraz pro momentovou matici v daném případě**

****

**dostaneme (29) **

**** je **směrodatná odchylka reziduí (rozdílu mezi pozorovanými a vyrovnanými**

**hodnotami časové řady) (30)**  .

**2A) výpočet parametrů kvadratického trendu **

**Aplikace standardního vzorce pro *OLS*  vede k výrazům**

**(31) **

**Odtud vyplývá soustava normálních rovnic ve tvaru**

****

**(32A,B,C) **

****

**Někdy je výhodné pracovat s vyjádřením trendu ve tvaru**

**(33)  , kde ,**

**Protože zde platí   .**

**Předpověď  budoucí hodnoty  má tvar**

**(34)  .**

**Příslušný  procentní předpovědní interval je**

**(35)  , kde**

**** je **vyrovnaná hodnota závisle proměnné**

**** je **počet stupňů volnosti (rozdíl mezi počtem pozorování a počtem**

**trendových parametrů)**

**je kvantil *Studentova* *t-rozdělení*o n-3 stupních volnosti**

**** je **hodnota: (36) , přičemž**

** je matice** nestochastických **„regresorů“.**

**** je **směrodatná odchylka reziduí (rozdílu mezi pozorovanými a vyrovnanými**

**hodnotami časové řady) (37) **

**5B) výpočet parametrů logaritmického trendu **

**Aplikace standardního vzorce pro OLS má zde podobu (42)**

** ,**

**takže pro parametrické odhady** (budou konzistentní a nestranné) **máme**

**,,**

**6B) výpočet parametrů mocninného trendu**

**Zlogaritmováním definičního výrazu  dostaneme **

**Konkretizace standardního vzorce pro OLS má zde podobu (43)**



**+takže konvenční OLS-regresí dostaneme konzistentní odhady pro  a . Vyexponováním prvního z obou odhadů pak získáme  jako ,druhý obdržíme přímo. Poznamenejme ale** současně**, že v tomto případě nejde exaktně o OLS-odhady, neboť předmětem optimalizace**

**není výraz , nýbrž výraz  .**

**Pro získání přesného odhadu bychom museli na první z obou minimandů uplatnit nelineární metodu nejmenších čtverců *NLLS*** (zde ovšem nelze výsledný výraz zapsat explicitní formou). **Viz obecnější poznámka níže.**

**11B) výpočet parametrů odmocninného trendu **

**Aplikuje-li standardní *OLS – odhadové schéma* pro** tento **model, který je lineární v parametrech, dostaneme**

**(91) **

** ,**

**takže pro parametrické odhady** (budou konzistentní a nestranné) **máme**

** , ,**

**13B) výpočet parametrů lineárně hyperbolického trendu **

**Aplikace standardního vzorce pro OLS**  **vede k výrazům**

**(41) **

**Poznámka V případech, kdy je levostranná regresní proměnná transformací původní veličiny časové řady** **, lze aplikovat metodu nejmenších čtverců OLS jen s výhradou.**

**Minimalizace reziduí prováděná pomocí OLS nebude** totiž **založena na kritériu**  **, nýbrž na kritériu** **, kde**  **je použitá transformující funkce, nejčastěji logaritmická funkce nebo exponenciála. Pro takovéto případy by měla být užita nelineární** (prostá) **metoda nejmenších čtverců NLLS (*Non-Linear Least Squares Method*), jejímž minimalizačním kritériem je právě**

** .**

**Výpočet je ale nutné provést některou z *numerických iteračních metod*, protože výsledný vzorec pro odhadnuté parametry nelze vyjádřit explicitně.**

**5) výpočet parametrů exponenciálního trendu**

**(51) **  **a obvykle** 

**Trend je charakteristický tím, že *koeficient růstu* tj. *podíl dvou sousedních hodnot***  **a současně podíl dvou sousedních diferencí** 

**má konstantní hodnotu . Parametr  se uvažuje** (vždy) **kladný.**

**Růstová tendence nastává v případě** **, tendence poklesu v případě** **,**

**K výpočtu parametrů exponenciálního trendu je vhodné uplatnit *váženou metodu nejmenších čtverců WLS* s vhodně transformovaný vahami.** (Nelze totiž předpokládat multiplikativní tvar a logaritmicko-normální rozdělení náhodné složky v původním modelu před transformací)**.**

**V konkrétním případě exponenciálního trendu se aplikuje *WLS* pro minimalizaci výrazu**

**(52)  , v němž**  **jsou** předem zvolené **váhy.**

Minimalizace se však v této metodě vztahuje k výrazu

**(53)**  **, u kterého**

**váhy**  **závisí na vahách**  **tak, abychom minimalizací obou výrazů (52),(53) dostali** aspoň přibližně shodné **odhady parametrů** **. Ukazuje se, že pro přijatou logaritmickou transformaci je vhodné položit**

**(54)**  

**K nejčastější volbě vah**  **přistupujeme tehdy, jestliže nemáme důvod preferovat v minimalizačním kritériu některá jednotlivá pozorování, takže pak pro transformované váhy bude platit** **. Minimalizací výrazu (53)** s těmito vahami **obdržíme *soustavu normálních rovnic***

**(55A) **

**(55B)  ,**

**neboť po dosazení (54) do (53) máme**

**(53\*)**  **, a tedy**

**(56A)** 

**(56B)** 

**Anulováním pravých stran (56A), (56B) a po jednoduchých úpravách máme**



 **,**

**což po přemístění členů a vynásobení (-1) vede k (55A), (55B) . □ .**

**Soustavu (55A), (55B) lze maticově zapsat jako**



**Odtud je snadno vidět, že má *explicitní řešení* pro logaritmované hodnoty obou parametrů ve tvaru**

**(56A)**  

**(56B)**  

**Odhady  obou původních parametrů  získáme** exponenciálním **povýšením výrazů na pravých stranách.**

Vlastnost, že **exponenciální trend má *koeficient růstu* a** zároveň ***podíl dvou sousedních diferencí***  ***konstantní*, plyne z následujícího:**

**Vyjdeme-li z (51) , pak  a tedy ** (konstantní)

**a rovněž tak**  .  **□ .**

**8A) výpočet parametrů modifikovaného exponenciálního trendu**

**(61) **  **a zpravidla také**  **.**

**Tento trend je** *tříparametrickým* ***zobecněním* předchozího případu** (parametry). **Hodí se pro modelování *trendu s konstantním podílem sousedních diferencí*, pokud je navíc tento trend asymptoticky omezen** (přibližuje-li se k saturační úrovni)**.**

**Jedna z** orientačních **metod odhadu parametrů *modifikovaného exponenciálního trendu* (pokud nemůžeme použít** exaktní ***iterační postupy nelineární optimalizace*), spočívá v tomto postupu:**

**Rozdělíme soubor pozorovaných hodnot na tři stejně velké třetiny o délce .** Pokud není  přesně dělitelné třemi, pak vynecháme jedno nebo dvě počáteční pozorování**. Pak sečteme pozorování v jednotlivých třetinách, přičemž dostaneme**

**(62A)  **

**(62B)  **

**(62C)  ** **,** kde

**indexování „1“ v** **resp. v**  **značí součet pozorovaných hodnot, případně trendových hodnot z první třetiny časové řady. Řešením této *soustavy tří rovnic* dostaneme postupně jednotlivé odhady parametrů**  **ve tvaru**

**(63A) **

**(63B) **

**(63C) **

**Poznámka-odvození: při odhadu trojice parametrů postupujeme v tomto pořadí:**

**Pro určení parametru  v (63A) nejprve odečteme rovnici (62A) od (62B):**



**a následně odečteme rovnici (62B) od (62C):**



**Podílem obou vztahů dostaneme:**

** ,**

**Nyní podobně vypočteme  z rozdílu rovnic (62B) - (62A) při tentokrát již známém **

**,**

**takže určení  bude snadno proveditelné pomocí výrazu (63B)**

**Parametr  pak nakonec snadno získáme z (62A) při známých :**

**. .**

**alternativní postup: Vzhledem k tomu, že při pevně zvoleném parametru**  **se model stane *lineárním modelem*, lze také použít takový postup, že se odhadnou parametry**  **pro různé hodnoty**  **a následně se zvolí taková varianta, která minimalizuje *SSE*. .**

**ověření indikace přítomnosti modifikovaného exponenciálního trendu:**

**podíly** sousedních **1. diferencí  jsou** zhruba **konstantní:**

**Protože** zřejmě **platí   ,**

**vyplývá odtud pro diference   a následně . Konstantnost představuje parametr  .**

**Limitní chování modifikovaného exponenciálního trendu**

**Při přijatých omezeních na parametry funkce (61)**

****  **a**  , **platí**

** **

**Při přijatých omezeních na parametry funkce (61)**

****  **a**  , **platí**

** **

**Chování *modifikovaného exponenciálního trendu* asymptoticky (pro  ) směřuje k saturační úrovni dané hodnotou parametru , přičemž v blízkosti 0 by hodnoty mohly být i záporné (záleží na součtu parametrů  ).**

**9A) výpočet parametrů logistického trendu**

# Tento opět tříparametrický trend je popsán schématem

**(71)**  ,  při 

**Logistický trend má *inflexi* (tj. bod, ve kterém přechází konvexní průběh trendu v konkávní,** příp. naopak**) v bodě** **a je asymptoticky omezen** (se saturační úrovní)**. Jeho zderivováním podle časové proměnné t** (tu považujeme za spojitou) **, dostaneme [[4]](#footnote-4)**

**(72)  , což je**

**další důležitý ukazatel růstu trendové křivky (tato první derivace trendové křivky se** v tomto kontextu **nazývá *růstová funkce*). Je zřejmé, že rychlost růstu logistického trendu závisí přímo úměrně na dosažené úrovni**  **a na vzdálenosti hodnoty trendu od saturační úrovně** **, tj.** **. Derivace je přitom symetrická kolem bodu inflexe**  **.** Z toho, co bylo řečeno, plyne, že **logistickou křivku lze přiřadit k tzv. *s-křivkám symetrickým kolem inflexního bodu*.**

Pokud jde o **odhad parametrů logistického trendu, lze použití několik** odlišných **metod:**

**a) protože *logistický trend* lze považovat za *reciprokou podobu modifikovaného exponenciálního trendu*, lze aplikovat výše popsanou odhadovou proceduru pro odhad modifikovaného exp. trendu** na časovou řadu s reciprokými hodnotami .

**b) Použijeme *diferenčního parametrického odhadu, kdy se místo s původní časovou řadou pracuje s řadou prvních diferencí  . Přitom se postupuje takto:***

**V derivační formulaci trendu (72) se aproximuje trendová složka**  **skutečnými pozorováními** **, takže se dostane:**

**(73)**  

**Jestliže dále přijmeme aproximaci** (derivace pomocí diference)

**(74)**   **, v níž**

** označuje řadu prvních diferencí, pak ze (73) snadnou úpravou dostaneme**

**(75)**  

# Pomocí *metody nejmenších čtverců* pak získáme v *lineárním regresním modelu* (modelu s jediným regresorem), tzn.ve stochastické formulaci (75)

**(75\*)**  

**(75\*\*)  , kde  **

**odhady , pro , a odtud následně odhady parametrů jako**

**(76)  a pro **

**Abychom získali odhad pro** poslední **parametr , aproximujeme ve vztahu (71) trendovou složku  skutečnými pozorováními  a upravíme tento vztah do tvaru**

**(77)**   (protože  )

**Po zlogaritmování**  **a po sečtení těchto vztahů přes  [[5]](#footnote-5) dostaneme** nakonec **vztah**

**(78)**  

který se nazývá  ***Rhodesův vzorec.***

**Z něho se už snadno vypočte odhad parametru  „vyexponováním„.**

**Ověření toho, že *logistický trend* je reciproké vyjádření *modifikovaného exponenciálního trendu***

**je velmi jednoduché:**

**stačí (71)**  **zapsat** v reciproké podobě **a hned vidíme, že výraz odpovídá zápisu modifikovaného exponenciálního trendu (61)  , pokud vyjádříme parametry tohoto trendu jako** 

**Ověření lokalizace inflexního bodu** u logistické křivky

**Vzhledem k tomu, že inflexe je místem, kde konvexnost přechází v konkávnost** (nebo vice versa) **musíme spočíst druhou derivaci ( podle času *t* ). trendové křivky. Postupně dostaneme:**

**(79A)**  **a následně**

 **neboli**

**(79B)** 

**Nulovou hodnotu může druhá derivace nabýt jen tam, kde je obsah čitatele zlomku nulový, protože při daných omezeních na parametry  nemůže pro žádné reálné  platit . Pro nulový čitatel vyplývá tedy** navazující **podmínka**

**, resp. **

**a vzhledem k nenulovosti  pro  může mít tento součin hodnotu 0 jen tam, kde platí**

** neboli  a tedy . Hodnotu  lokalizující inflexi pak už snadno získáme zlogaritmováním:  , odkud odvodíme polohu inflexního bodu  □ .**

**ověření indikace přítomnosti logistického trendu:**

**podíly** sousedních **1. diferencí reciprokých hodnot  jsou zhruba konstantní.**

**Protože platí**    **vyplývá odtud pro**

**Diference   a**

**tedy opravdu platí  □ .**

**Konstantnost tedy představuje** stejně jako u modifikovaného exponenciálního trendu **parametr  .**

**10A) Gompertzův trend a výpočet jeho parametrů**

**Trend ve tvaru této křivky vzniká** (ostatně stejně jako logistický trend) **transformací *modifikovaného exponenciálního trendu*.**

**(81)**  **resp. ekvivalentně** 

**při** [****] ****

**Obvykle** – pro dosažení charakteristického tvaru křivky **– přijímáme: **

**Pro hodnoty parametrů z tohoto intervalu má *Gompertzův trend* inflexi v bodě**

**(82) **

**První derivace této křivky (tzv. *růstová funkce*) ale** tentokrát **není symetrická kolem inflexního bodu, ale *je sešikmená* (protáhlejší) doprava. Z tohoto důvodu se Gompertzův trend řadí mezi tzv. *s-křivky nesymetrické kolem inflexního bodu*.**

**Odhad parametrů  se provede způsobem obdobným jako v případě modifikovaného exponenciálního trendu, místo původní řady se ale použije logaritmovaná původní řada (s hodnotami  [[6]](#footnote-6))**

**Ověření lokalizace inflexního bodu** u Gompertzovy křivky

**Vzhledem k tomu, že inflexe je místem, kde konvexnost přechází v konkávnost** (nebo vice versa) **musíme spočíst druhou derivaci ( podle času *t* ). trendové křivky. Postupně dostaneme:**

**(83)** 

**a následně** 

**Vytkneme-li z obou členů (nenulový) výraz s exponenciálou, obdržíme**

**(84)** 

**Nulovou hodnotu může druhá derivace nabýt jen tam, kde je obsah hranaté závorky nulový, tedy**

**v bodě splňujícím podmínku  , po vytknutí**

**tedy  přičemž vzhledem k nenulovosti součinu před závorkou**

**může tento výraz nabýt nulovou hodnotu je tam, kde je obsah hranaté závorky nulový, tj. tam, co**

**platí  neboli  a tedy . Hodnotu  lokalizující inflexi pak už snadno získáme zlogaritmováním:**

**,odkud máme polohu inflexe  □ .**

**ověření indikace přítomnosti Gompertzova trendu:**

**indikace přítomnosti: podíly prvních logaritmovaných diferencí** 

**jsou přibližně konstantní**

**Z *logaritmického vyjádření Gompertzova trendu* (81) dostaneme pro **

 **, a následně tedy pro první**

**dvě logaritmované diference:**



. **Odtud máme pro jejich podíl**

**, takže** ona **přibližná konstanta je parametr  .**

**1J) výpočet parametrů odmocninného trendu **

**Aplikuje-li standardní *OLS – odhadové schéma* pro** tento **model, který je lineární v parametrech, dostaneme**

**(91) **

** ,**

**takže pro parametrické odhady** (budou konzistentní a nestranné) **máme**

** , ,**

**V případech, kdy je levostranná regresní proměnná transformací původní veličiny časové řady** **, lze aplikovat metodu nejmenších čtverců OLS jen s výhradou.**

**Minimalizace reziduí prováděná pomocí OLS nebude** totiž **založena na kritériu**  **, nýbrž na kritériu** **, kde**  **je použitá transformující funkce, nejčastěji logaritmická funkce nebo exponenciála. Pro takovéto případy by měla být užita nelineární** (prostá) **metoda nejmenších čtverců NLLS (*Non-Linear Least Squares Method*), jejímž minimalizačním kritériem je právě**

** .**

**Výpočet je ale nutné provést některou z *numerických iteračních metod*, protože výsledný vzorec pro odhadnuté parametry nelze vyjádřit explicitně.**

**Hlavní zásady výběru výstižného trendu**

**1)** Zpravidla **preferujeme trendovou křivku s co nejmenším počtem parametrů** (obvykle do 3)**. Zásadou je úspornost (*parsimony*), která je zde ještě více opodstatněná než v klasické regresní analýze, neboť vodítka pro tvar nelinearity zde** až na ojedinělé výjimky **nemůžeme vyvodit z ekonomické teorie. Jednou z možností, jak otestovat potřebu/nepotřebu nutnosti zařazení další trendové transformace může být výpočet korigovaného koeficientu determinace** **. Jinou racionální úvahu lze založit na určení statistické významnosti příslušného trendového parametru** (k tomu lze užít klasické testování pomocí t-testu)**. V trendové analýze není** zdaleka takosudové **riziko specifikační chyby spočívající ve vynechání některé z relevantních proměnných** jako je tomu v analýze regresní**.**

**2) Před první volbou trendové křivky je vhodné se podívat na graf pozorovaných hodnot časové řady, který bývá prvotním vodítkem výchozí trendové specifikace. Z něho lze** dost často **vyvodit *řád nestacionarity* např. tím, že vytvoříme řadu prvních nebo druhých diferencí. Pokud ani diference vyšších řádů nevedou ke stacionární řadě a řada vykazuje monotónní akcelerující růst, je to indikací pro volbu *exponenciálního trendu*** (s případným posunem výchozí úrovně. **Určitým indikátorem je pak graf průběhu reziduálních hodnot, z něhož lze často vyvodit alší transformující funkci času, která byla v základní specifikaci opomenuta** (např. mnohočlen 2. nebo 3 stupně)**.**

**3)** Nesmíme zapomenout na to, že **trendová analýza slouží** především **ke krátkodobým predikcím. Vzhledem k tomu, že polynomy 4. a vyšších řádů se vyznačují značnou citlivostí při predikcích, je to důvodem pro jejich vynechání z oboru možných trendových funkcí. (Ekonomické ukazatele se chovají** principiálně **ustáleněji než např. fyzikální/technické, kde může být účelné nasazení např. *splinových funkcí*).**

**4) Pokud ekonomický ukazatel vykazuje** evidentně **rozdílný průběh ve sledovaném minulém období, obvykle to velmi komplikuje rozhodnutí o výběru trendu. V takovémto případě –** pokud se nevzdáme pokusu o predikci vůbec **– přistupujeme zpravidla k prolongování chování z údajů posledního období nebo z údajů toho minulého období, o němž lze důvodně předpokládat, že vývoj zde pozorovaný se vyskytne i v nejbližší budoucnosti.**

**5) Přítomnost *heteroskedasticity* (standardně testované v regresní analýze) není v případě trendové analýzy časové řady zpravidla vážnějším problémem.[[7]](#footnote-7) U testování konvenčními testy nevzniká specifický problém, jen u *Whiteova testu* může být větší než obvykle pravděpodobnost výskytu součinové kombinace dvou elementárních trendových funkcí s některou z dalších zařazených** (vznikla by dokonalá multikolinearita)**. U *Goldfeld-Quandtova testu* se** zřejmě **nemůžeme opřít o obsahovou vazbu variability reziduí s proměnlivostí některé z vysvětlujících proměnných, takže jeho nasazení ztrácí původní význam.** V testování převažují prvky technické nad věcnými.

**6)** Naopak, **důležitým prvkem trendové analýzy je vyšetřování síly a stupně *autokorelace náhodných složek* sledované časové řady.** Náhodné složce časové

řady je vůbec věnována značná pozornost**. Proto také obvykle první pohled na výsledky směřuje k vyšetření reziduálních hodnot, přičemž základní představu o jejich případné autokorelovanosti poskytne *Durbin-Watsonův koefiecient autokorelace 1.řádu.***

**7)** **Další z průvodních problémů standardní lineární regrese – *multikolinearita* – se v trendové analýze vyskytnout nemůže: K *dokonalé multikolinearitě* nemůže vést žádná lineární kombinace elementárních trendových komponent** (jsou-li tyto rozdílné) **a eventualita výskytu *přibližné multikolinearity* nemůže pocházet ze *stochastičností* „vysvětlujících proměnných„** (jsou-li elementární trendové komponenty svou povahou nestochastické).

**8) Případný přínos apriorní informace: Je poměrně skromný počet případů, kdy lze k výběru nejvhodnější trendové funkce uplatnit poznatky plynoucí z externí ekonomické reality. Přece však některé existují: Ve vývoji průměrné mzdy jako nejcharakterističtějším případ lze pozorovat tendenci pravidelného každoročního procentního nárůstu (který ovšem nemusí být každoročně stejný). Je to přímým důsledkem „zvyklostí“, které jsou zažité při mzdovém vyjednávání odborářů ( a od nichž se sekundárně odvíjí i mzdový nárůst pracovníků ve státních podnicích a státní správě). Obdobně, pokud by valorizace důchodů probíhala tak, že bude každoročně přidávána konstantní hodnota v Kč, bylo by to indikací lineárního trendu. Pokud by se přidávalo „o zhruba stejné procento“ (jako je to zvykem u mezd) , signalizovalo by to průběh vyjádřený exponenciální křivkou.**

**Kritéria posuzování přesnosti předpovědí**

***Střední chyba odhadu* [mean error] ME**

** **

Jde o obvykle velmi malou hodnou (řádů  a níže) indikující „míru nelinearity“ při výpočtu. Pro posouzení vlastní míry přesnosti predikční výpovědi žádný smysl nemá.

***Součet čtvercových chyb odhadu* [sum of squared errors] SSE**

** **

Je to stejné kritérium, jako kritérium nejmenších čtverců v regresním modelu (lineárním i nelineárním). Lze ho rozumně použít jen při srovnání uvažované s jinak specifikovanou trendovou funkcí (pro shodný počet pozorování). Měrovou jednotkou této míry je zde „čtverec„ původní měrné jednotky.

***Střední čtvercová chyba odhadu* [mean squared error] MSE**

** **

se uplatňuje často coby ***kvadratická ztrátová*** („loss„) *funkce*. Lze ji dekomponovat na tři složky takto:

 , kde na pravé straně je

**proporční vychýlení**  **vzdálenost průměru předpovědí od průměru** **předpovídaných hodnot**

**proporční rozptyl**  **vzdálenost rozptylu předpovědí od rozptylu předpovídaných hodnot**

**proporční kovariance**  pokrývá zbývající nesystematickou část předpovědní chyby.

U dobré předpovědní techniky jsou první dvě složky relativně malé a výrazně převládá nesystematická složka. Součet všech tří z jich je 1. Odvození se získá z rozkladu



***Odmocninová střední čtvercová chyba* [root mean squared error] RMSE**

** **

**Výhodou oproti *MSE* je vyjádření ve stejných jednotkách jako mají původní data.**

***Střední absolutní chyba odhadu* [mean absolute error] MAE**

** **

Její předností je – zejména v datových souborech s výraznými odchylkami některých pozorování od „standardních“ (tzv.***outliers***) - že nepenalizuje tak silně jako ***MSE*** či ***RMSE*** tyto „extrémní“ odchylky.

**Dále uváděné míry již na měřítku hodnot předpovídané proměnné nezávisejí:**

***Střední absolutní procentuální chyba odhadu* [mean absolute percentage error] MPE**

** **

**Zpravidla nabývá hodnot mezi 0-100%, přičemž výsledek menší/lepší než 100% říká, že daný předpovědní model je lepší než model náhodné procházky s předpověďmi trvale na nulové úrovni, tj. trvale s MAPE=100%. Kritérium je však problematicky použitelné, pokud hodnoty časové řady jsou příliš malé ( oscilují kolem 0 ).**

***Korigovaná střední absolutní procentuální chyba*** *odhadu* **[adjusted mean absolute percentage error] AMAPE**

** **

**Koriguje asymetrii předchozího kritéria *MAPE*: dává totiž stejný výsledek i při prohození skutečných a předpovídaných hodnot v tomto smyslu: Skutečná hodnota 0,6 a předpověď 0,8 přispějí do součtu v *AMAPE* stejně jako skutečná hodnota 0,8 a předpověď 0,6.**

***Střední procentní chyba odhadu* [mean percentage error] MPE**

** **

Je víceméně **doplňkovým kritériem k *ME***, kdy v součtu vystupují relativní odchylky místo absolutních.

***Theilův koeficient nesouladu* [Theil’s U-coefficient] ThU[[8]](#footnote-8)**

** , kde**

***n*……..... délka původní časové řady** (užité pro odhad modelu)

***h*……..... délka předpovídaného období [ h>0 ]**

***n + h* .... délka původní časové řady prodloužená o předpovídané období.**

**Někdy je ovšem toto kritérium formulováno obecněji, přičemž odchylky jsou brány vůči nějakému jednoduchému či naivnímu modelu- tzv. *benchmark*. Hodnota U leží** vždy **mezi 0 a 1, přičemž hodnota 0 značí perfektní shodu** předpovědí se skutečností.

**Publikace Hindls R., Hronová S, Novák, I.: Metody statistické analýzy pro ekonomy uvádí jinou verzi *Theilova koeficientu (zde označenou ThC)***

***Theilův koeficient nesouladu* [Theil’s C-coefficient] ThC**

** , kde**

***n*…….. délka původní časové řady** (užité pro odhad modelu)

***h*…….. délka časové řady po zkrácení [ h>0 ] o** q pozorovaných hodnot

***n + h* .... délka původní časové řady prodloužená o předpovídané období.**

** extrapolovaná hodnota na i období dopředu, a to modelem odhadnutým na základě prvních r pozorování časové řady .**

## **Pokud se** hodnota **nachází v rozmezí 3-5%, lze mluvit o velmi uspokojivém výsledku. Model lze** s velkou pravděpodobností **považovat za použitelný k předpovědím.**

## **Pokud se** hodnota **nachází v rozmezí 5-10%, lze mluvit o jakžtakž uspokojivém výsledku. Model lze s mírnou nadějí považovat za použitelný k předpovědím**

## **Pokud se** hodnota **nachází nad úrovní 10%, nelze mluvit o uspokojivém výsledku. Model lze téměř s jistotou zavrhnout z hlediska použitelnosti k předpovědím.**

**K předchozím kritériím lze přidat ještě dvě další míry, u nichž se omezujeme na posouzení toho, jak model předpovídá znaménka budoucích hodnot (tj. zda tyto hodnoty budou kladné nebo záporné) nebo změny ve směru vývoje budoucích hodnot** (zda růst přejde v pokles apod.) **Někdy –** při strategických úvahách **– jde o důležitější aspekty než číselné co nejpřesnější vyjádření předpovídaných hodnot.**

***Procento správných předpovědí znaménka* PCPS**

** , kde **

****

**Charakteristika (zřejmě v rozmezí 0% -100%) není nijak moc vypovídající, neboť pouze informuje o tom, zda mají skutečné a predikované hodnoty stejná znaménka. V případě, že se hodnoty analyzované časové řady pohybují ve vysokých kladných číslech** (běžná situace u velké části ekonomických ukazatelů) **je prakticky bezcenná (hodnota *PCPS* bude** s velkou pravděpodobností **identicky 100).**

***Procento správných (jednokrokových) předpovědí změn směru vývoje*  PCPD**

** , kde **

****

**Na rozdíl od předchozího *PCPS* respektuje tento indikátor podstatně více charakter posuzování předpovědí u ekonomických časových řad. Posuzuje poměr stejnosměrnosti vůči protisměrnosti skutečného vývoje a předpovědi (oproti ) v situaci, kdy známe skutečnou hodnotu řady v minulém období . Vystižení správného směru vývoje z hodnoty  predikcí (růst /pokles) je někdy důležitější než samotné** (přesné) **určení konkrétní hodnoty.**

**Trendy s konstantními parametry**

**Trendem** bývá obvykle nazýván **relativně *ustálený a déledobý vývoj časové řady ekonomického ukazatele/procesu oproštěný od dalších působících vlivů*** (sezónnosti, náhodnosti, eventuálně cykličnosti)**, v němž se projevují *systematické tendence chování jevu/jevů*, který daný ukazatel zobrazuje.**

**Je obvykle v podstatných rysech vystižitelný matematickým schématem. Na rozdíl od regresního schématu se však** zde **nezabýváme souvislostí chování** sledovaného **ukazatele s jinými proměnnými (ekonomickými i jinými), nýbrž posuzujeme vývoj ukazatele** víceméně **izolovaně. „Vysvětlující/mi proměnnou/nými je/jsou zde pouze časové plynutí,** případně **upravené elementárními matematickými transformacemi časové proměnné** **.**

**Mluvíme-li o *konstantních parametrech trendu*, rozumíme tím, že ve sledovaném časovém nedochází k** podstatnějším **„strukturálním“ změnám** (za ty nepokládáme nahodilé odchylky)**, které by znamenaly zásadnější proměnu globální vývojové tendence resp. výraznou změnu chování analyticky vyjádřené matematické křivky.**

**Trend může mít i časová řada, jejíž převažující vývojová tendence není vyjádřitelná analytickým zápisem, případně i ta, kdy tato tendence není popsatelná matematicky formulovatelnou závislostí vůbec. Ve druhém případě se obvykle uchylujeme k vyjádření pomocí přibližného formálního schématu.**

**Určení trendu má smysl jak pro poznání dosavadního chování časové řady, tak a zejména pro – krátkodobou, případně až střednědobou – předpověď jejího dalšího vývoje.**

**Limitní chování modifikovaného exponenciálního trendu**

**Při přijatých omezeních na parametry funkce (61)**

****  **a**  , **platí**

** **

**Při přijatých omezeních na parametry funkce (61)**

****  **a**  , **platí**

** **

**Chování modifikovaného exponenciálního trendu asymptoticky (pro  ) směřuje k saturační úrovni dané hodnotou parametru  , přičemž v blízkosti 0 by hodnoty mohly být i záporné (záleží na součtu parametrů  ).**

1. ***Kvazilineární funkce* může být zapsána schématem**

   ** , kde**

   ** je spojitá monotónní funkce a dále ,  jsou vhodné konstanty ( nenulové).**

   ***Zobecněnou kvazilineární funkci*  lze zapsat ve tvaru:**

   ** , kde**

   ** jsou vesměs spojité a ryze monotónní funkce. Oproti *kvazilineární* funkci se nevyžaduje symetrie vnitřních funkcí ,  vůči jednotlivým argumentům.**  [↑](#footnote-ref-1)
2. **S přirozenou podmínkou, že funkce  jsou vzájemně různé.** [↑](#footnote-ref-2)
3. Odhady parametrů získané pomocí jednoho a druhého kritéria tedy nebudou obecně shodné. [↑](#footnote-ref-3)
4.  [↑](#footnote-ref-4)
5. Zdostaneme a dělíme  [↑](#footnote-ref-5)
6. Je tímto zřejmé, že postup nelze uplatnit na ekonomickou časovou řadu s některými hodnotami zápornými. [↑](#footnote-ref-6)
7. Pracujeme s časovou řadou, jejíž hodnoty – aspoň v nedlouhém časovém období – jsou zpravidla dosti vzájemně blízké a rozptyl náhodných složek obvykle významněji nekolísá. [↑](#footnote-ref-7)
8. **Henri Theil byl významný nizozemský ekonometr a matematický ekonom [1924-2000], následník Jana Tinbergena**

   **na *Erasmus University v Rotterdamu*, později působil na universitě v *Chicagu* a na *University of Florida*.** [↑](#footnote-ref-8)