

Linear programming-introduction

Úvod do principu lineárního
programování

Ing.J.Skorkovský,CSc.

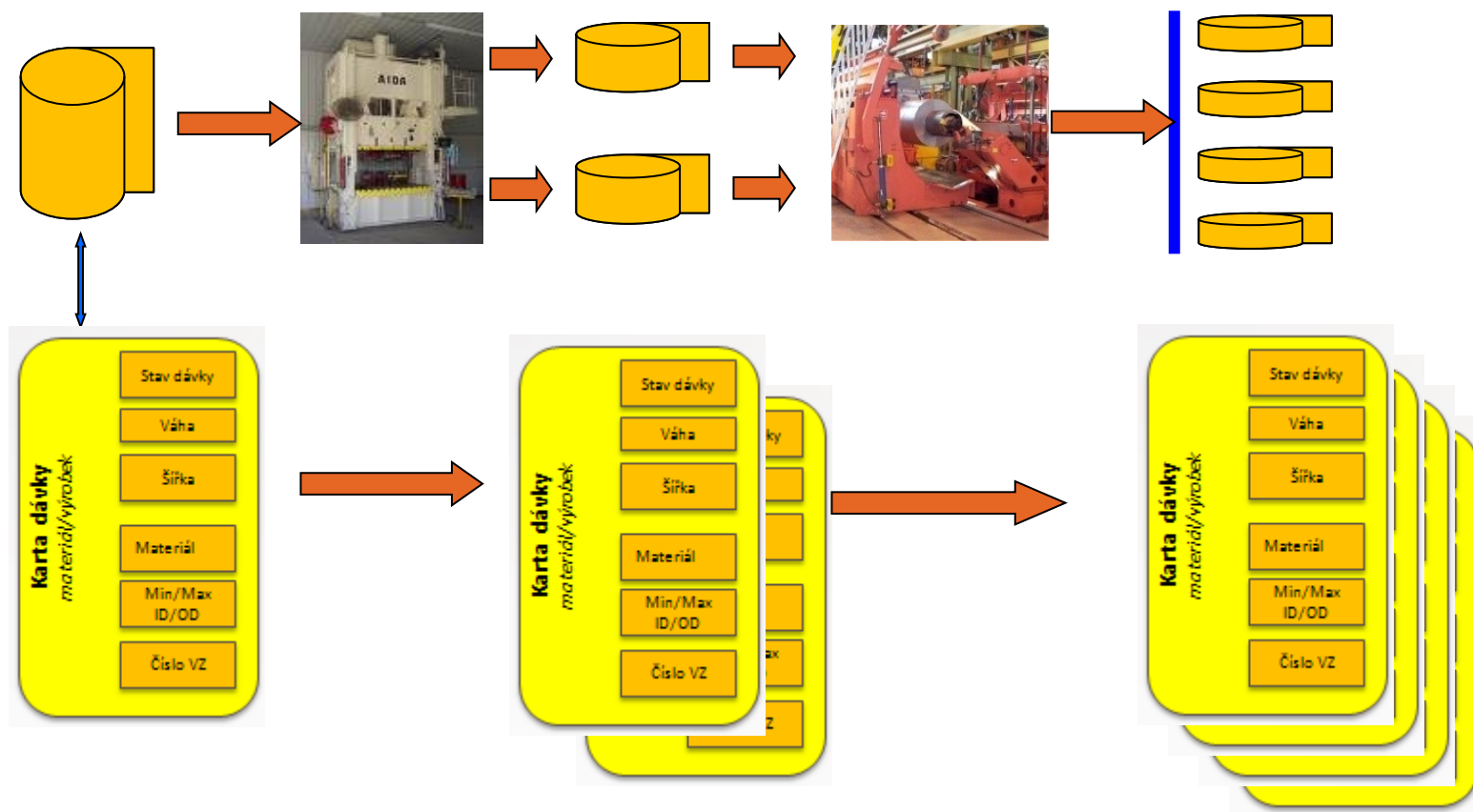
KPH-ESF-MU

Czech Republic

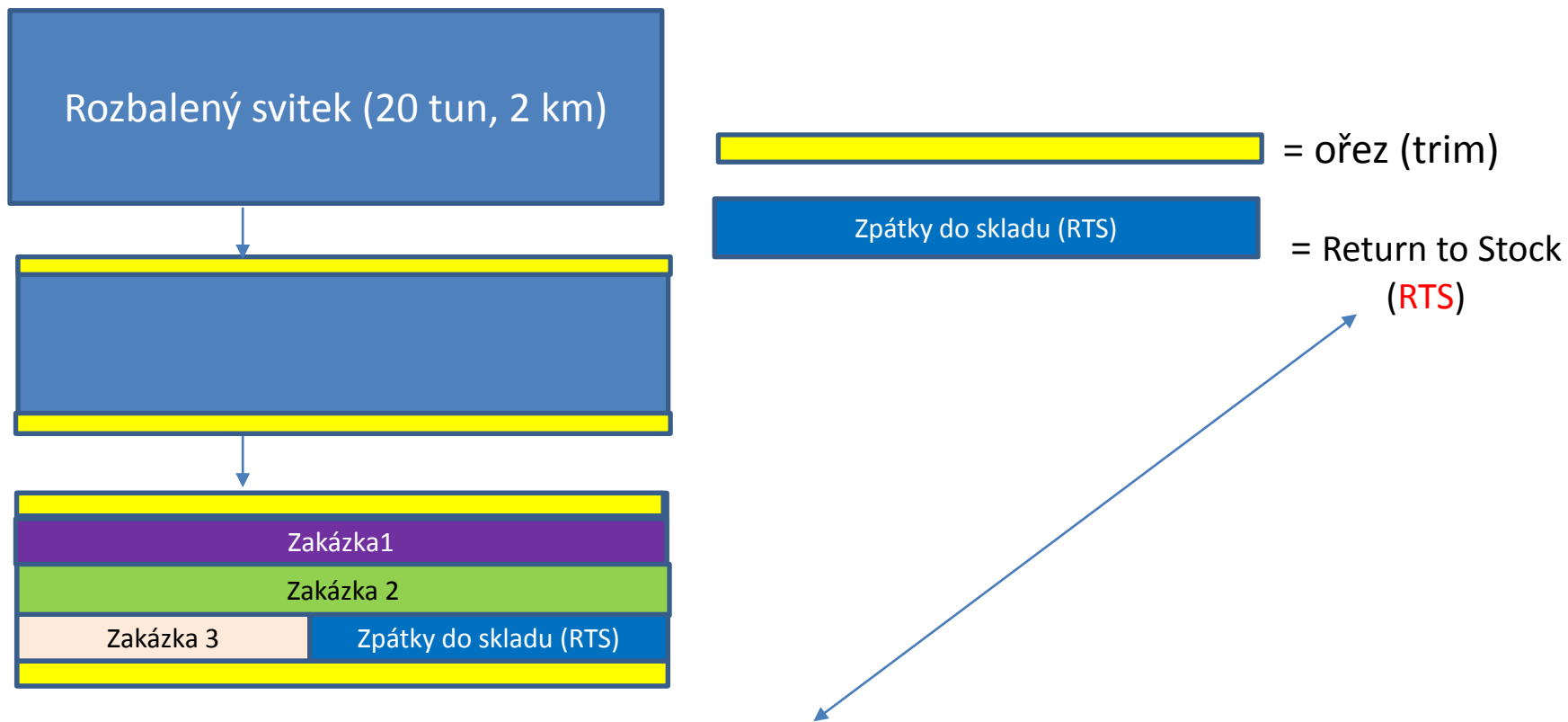
USE- Oblasti použití

- **Slitting and Levelling of material (coils, bars, sheets)-Cutting material, trimming,...** (dělení materiálu)
- **Blending - blending, diet, feeding rations for animals, ..** (míchání krmných směsi podle receptu veterináře,..)
- **Transport problems - material flow from stock to the destination and route planning - shortest route** (optimalizace dopravních tras)
- **Assignment of resources with limited capacities - CCR=Capacity Constraint Resource – přiřazení úkolů(zakázek) zdrojům s omezenou kapacitou** (v podstatě zdroje typu DRUM)
- **Sources : Operation Management, Quality and Competitiveness in a global environment, Russel and Taylor (ESF library),...**

Dělení materiálu-řešeno i v MS Dynamics NAV



Řezání (dělení) ocelových svitků



Základní problém optimalizace je, aby se **RTS** minimalizoval, protože jinak jde o nevyužitý materiál, který má charakter šrotu

Formulation of the model - formulace modelu

Výrobek	Popis	Práce/hod	Materiál/ks	Výnos/ks
Dish (Miska)	x1	1	4	40
Mug (Hrnek)	x2	2	3	50



CZ

Which combination of products will have the greatest return at the limits of maximum production capacity type = **40** hours and the amount of material, that is limited to **120** kg of clay (jíl)?

Note: A similar task in terms of flow was solved in the P&Q example based on TOC (only valid for Czech student), where the limitation was in resource B and with a maximum capacity of 2400 minutes.

Při které kombinaci vyráběných produktů (miska a hrnek) budeme mít největší výnos když máme možnost pracovat maximálně **40 hodin** (limit kapacity) a nemůžeme využít více jak **120 kg** jílu (hrnčířské hlíny) – omezení materiálové

Formulace modelu

Výrobek	Popis	Práce/hod	Materiál/ks	Výnos/ks
Miska	x1	1	4	40
Hrnek	x2	2	3	50

Při které kombinaci vyráběných produktů (miska a hrnek) budeme mít největší výnos když máme možnost pracovat maximálně **40 hodin** (limit kapacity) a nemůžeme využít více jak **120 kg** jílu (hrnčířské hlíny) – omezení materiálové

Poznámka : podobný úkol je řešený v již odpřednášeném příkladu, ve kterém se zjišťovala Optimální kombinace dvou produktů (**P&Q**) s použitím podle TOC principů, kde limitní kapacita každého strojního centra bylo 2400 minut. Strojní centru, které bylo úzkým místem (Drum nebo jinak také **CCR**) bylo centrum B

TOC P and Q class problem prezentace




CCR= Capacity Constrained Resource

Basic structures and used terminology

Základní rovnice a terminologie

- We minimize our target function Z (**cílová funkce**) in the form of:
 $Z = c_1 * x_1 + c_2 * x_2 + \dots + c_n * x_n$ with respect to the matrix of restrictive conditions:
(in our case $c_1=40$ and $c_2=50$) – v našem příkladu $c_1=40$ a $c_2=50$
 - $A_{11} * x_1 + A_{12} * x_2 + \dots + A_{1n} * x_n \quad (<=>) \quad B_1$
 - $A_{21} * x_1 + A_{22} * x_2 + \dots + A_{2n} * x_n \quad (<=>) \quad B_2$
 - $A_{m1} * x_1 + A_{m2} * x_2 + \dots + A_{mn} * x_n \quad (<=>) \quad B_m$
- Systém lineárních rovnic**
kde prvky vektoru B (B_1, B_2, \dots)
reprezentují ohraničení 40 hodin (B_1)
a 120 kilogramů (B_2)
- It is classical system of linear equations je $Ax=B$ (restrictive conditions-**omezení**)
 - The solving of such a linear equation system, e.g. By use of GAUSS-JORDAN algorithm **is not required** with the help of Excel Solver (**Excel Řešitel**)
 - x_{ij} : decision variable= level of operation activity specified by this variable
 - B_i : restrictive conditions (**podmínky omezení**)
 - allowed deviations from the norm (in time and material)
- c_j : coefficient of the target function (v našem případě $c_1=40$ a $c_2=50$ ->**výnosy**)
- A_{ij} : restrictive coefficients : work and material for one unit (pcs) of the product

Example I (introduction to the problem – practical demonstration)

Výrobek	Popis	Práce/hod	Materiál/ks	Výnos/ks
Dish (miska)				40
Mug (hrnek)				50


$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \quad (\text{classical equation from}) \quad Z = c_0 \text{ největší výnos}$$

Target function: $Z = 40 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2$, which we must maximize (maximalizovat výnos)

Maximal production capacity = 40 hours and Maximal quantity of material = 120 kg (jsou to dva prvky matice B (40,120) – omezení)

Specifications of task restrictions by use of 2x2 matrix (2 x 2 matice)

Rovnice dvou přímek



$$= 40 \quad (\text{work- no more than 40 hours}) \quad (\text{ne více než 40 hod})$$

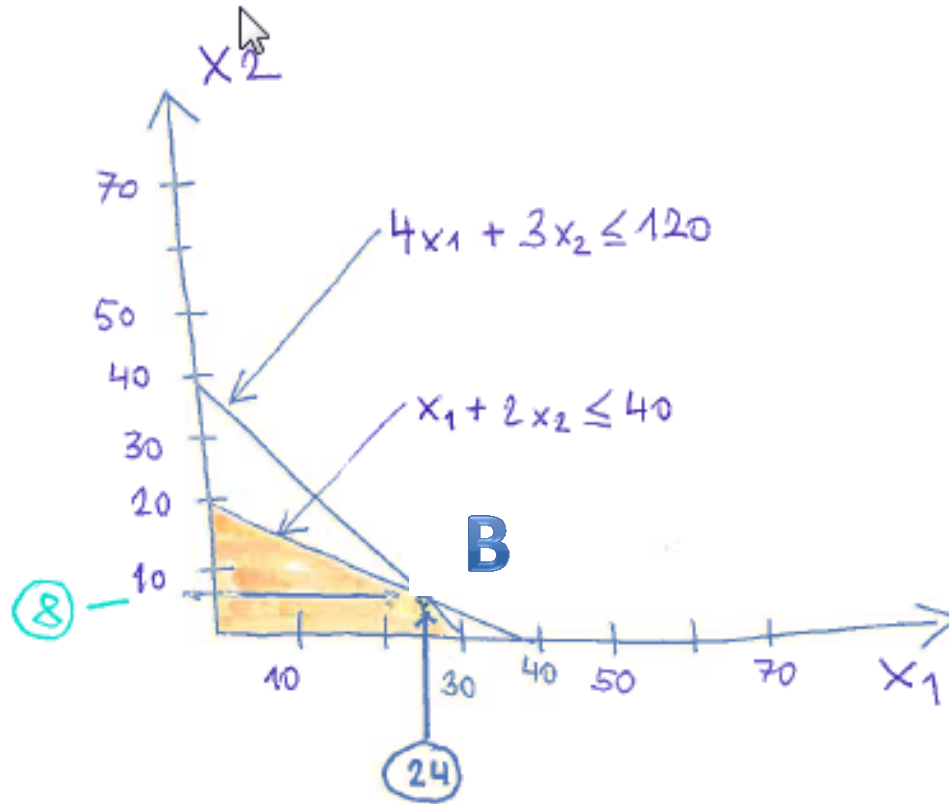
$$= 120 \quad (\text{materiál=kg jílu}) \rightarrow x_1 = (40 - 2x_2) + 3x_2 = 120 \dots$$

Manual solving : $\rightarrow x_1 = 24$ a $x_2 = 8$ and after substitution od variables (vyřešení 2 lineárních rovnic o 2 neznámých)
in target function we will get

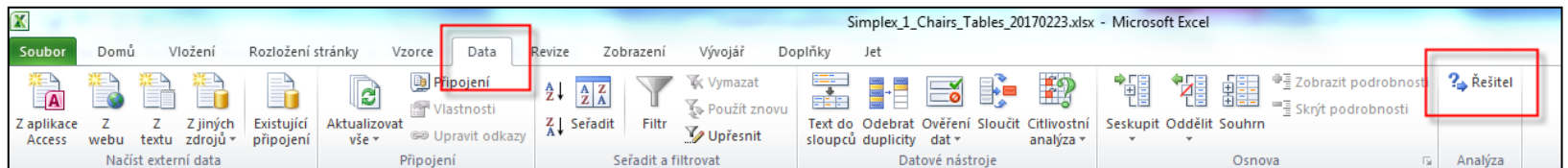
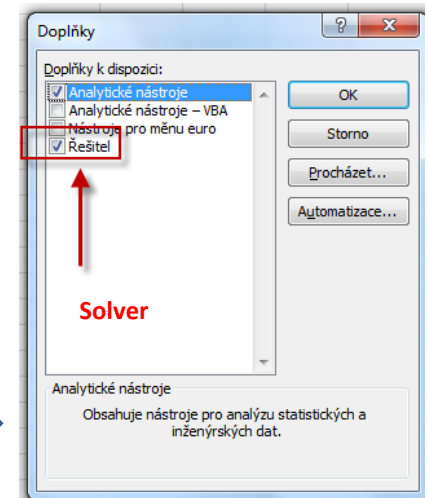
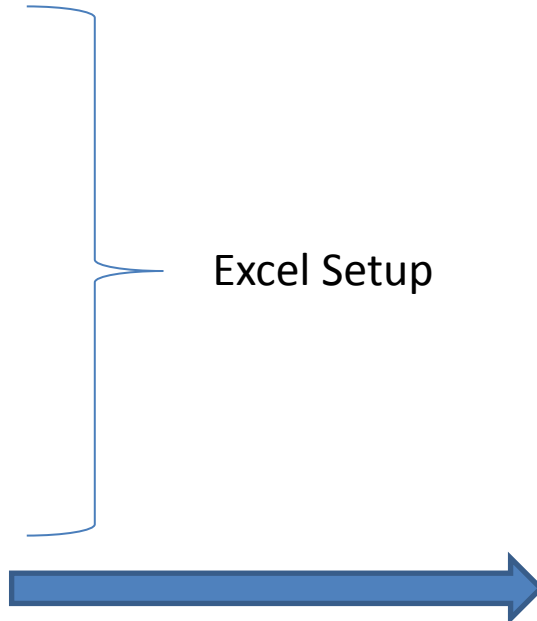
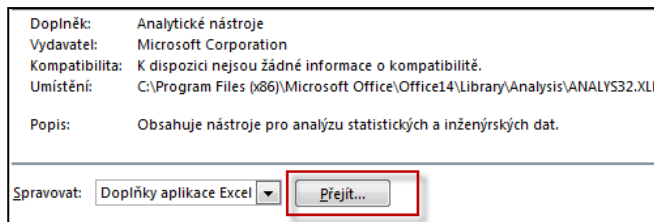
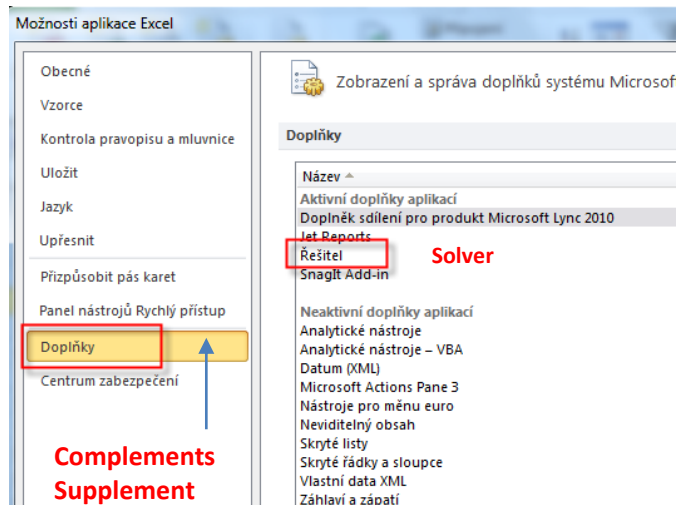
$$Z = 40 \cdot 24 + 50 \cdot 8 = 1360 \quad (\text{maximální výnos})$$

(optimal Return meets the point B – see next slide)

Graphical solution- grafické zobrazení



Use of Solver (Czech EXCEL)



Not for Czech courses !!!!! ->see next slides

Use o solver

(see actual Excel formulas on one of the the next slides)

	Dish	Mug	Total	Capacity
Variables (x1, x2)	0	0	0	
Return	40	50	0	
Material	4	3	0	120
Work	1	2	0	40

$=D7*D6+E7*E6$
 $=D10*D6+E10*E6$
 $=D11*D6+E11*E6$

Assignment entered in table

Assignment

x1=Dish , x2=Mug, max 40 hod (B1), max 120 kg (B2)

Target function $Z = x1 * c1 + x2 * c2 = 40 * x1 + 50 * x2$

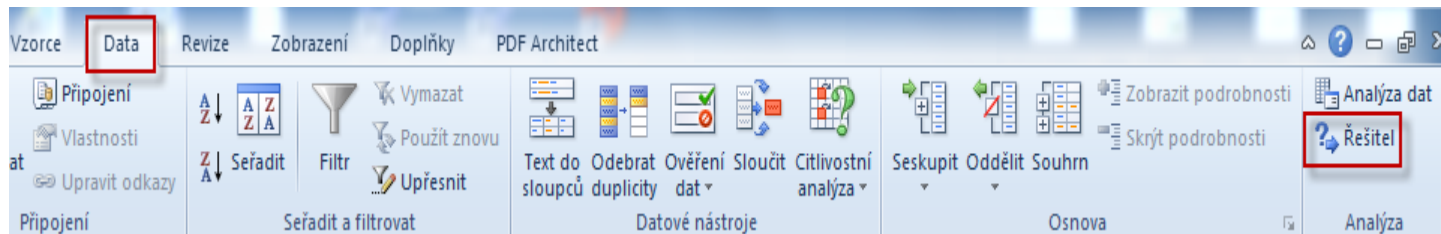
$4 * x1 + 3 * x2 = 120$ -capacity restrictions= max quantity of material =B1

$1 * x1 + 2 * x2 = 40$ -capacity restrictions by max work capacity=B2



Product	Description	Work /hour	Material/pcs	Return/pcs
Dish	x1	1	4	40
Mug	x2	2	3	50

Solver start



Použití Řešitele (Only for Czech course - not for MPH_AOPR)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3			Miska	Hrnek	Total	Kapacita	
4		Proměnné x1,X2	0	0			
5		Přínos	40	50	0		
6							
7		Materiál	4	3	0	120	
8		Práce	1	2	0	40	
9							

$$Z = x_1 * c_1 + x_2 * c_2 = 40 * x_1 + 50 * x_2$$

$$E5 = C4 * C5 + D4 * D5 \text{ (cílová funkce)}$$

$$E7 = C7 * C4 + D7 * D4 = 4 * x_1 + 3 * x_2 = 120$$

$$E8 = C8 * C4 + D8 * D4 = x_1 + 2 * x_2 = 40$$

Parametry Řešitele

Účelová funkce:

Hledat: Max Min Hodnota:

Proměnné modelu:

Omezující podmínky:

	Miska	Hrnek	Total	Kapacita
Proměnné x1,X2	24	8		
Přínos	40	50	1360	
Materiál	4	3	120	120
Práce	1	2	40	40

=D7*D6+E7*E6

Use of solver (ENG)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5				Dish	Mug	Total	Capacity	
6				0	0			
7				40	50	0		
8								
9								
10				4	3	0	120	
11				1	2	0	40	
12								

$$Z = x1 * c1 + x2 * c2 = 40 * x1 + 30 * x2$$

$$F10 = D10 * D6 + E10 * E6 = 4 * x1 + 3 * x2 = 120$$

$$F11 = D11 * D6 + E11 * D6 = x1 + 2 * x2 = 40$$

=D10*D6+E10*E6

=D11*D6+E11*E6

Parametry Řešitele

Nastavit cíl: **Target** \$F\$7

Na: Max Min Hodnota: 0

Na základě změny proměnných buněk: **Variables** \$D\$6:\$E\$6

Omezující podmínky:

\$F\$10 <= \$G\$10
\$F\$11 <= \$G\$11

Restrictions

Nastavit proměnné bez omezujících podmínek jako nezáporné

Vyberte metodu řešení: GRG Nonlinear

Metoda řešení
Modul GRG Nonlinear vyberte pro hladké nelineární problémy Řešitele. Modul LP Simplex zvolte pro lineární problémy Řešitele a modul Evolutionary pro nehladké problémy Řešitele.



	Dish	Mug	Total	Capacity
Variables X1, X2	24	8		
Return	40	50	1360	
Material	4	3	120	120
Work	1	2	40	40

Využití Řešitele (use of Solver)

Microsoft Excel 15.0 Citlivostní sestava

List: [Simplex_1_Misky_Hrnky_Chairs_Tables_20170228.xlsx]List1

Sestava vytvořena: 9. 3. 2017 16:19:56

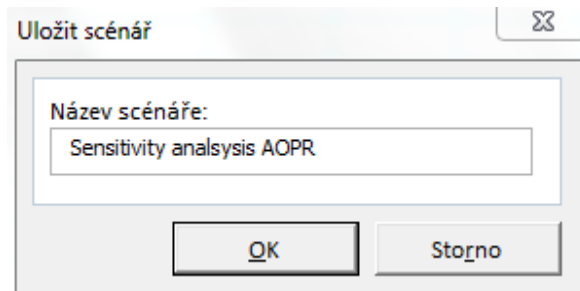
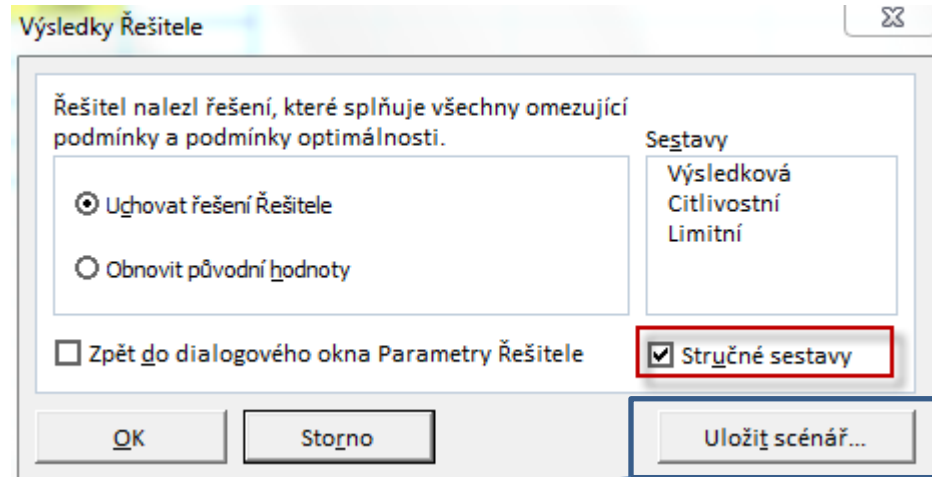
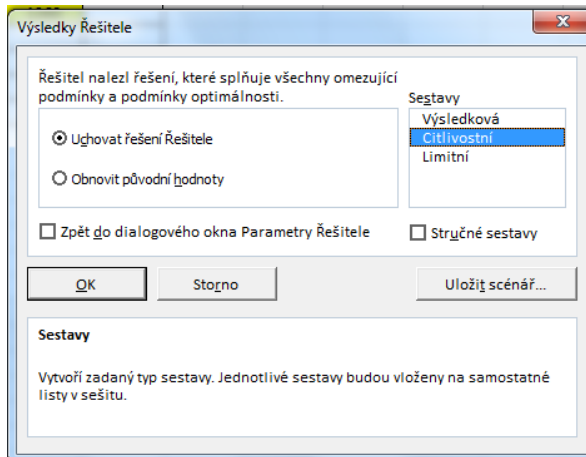
Proměnné

Levá strana omezující podmínky	Název	Konečná Hodnota	Redukovaná náklady	Účelová funkce koeficient	Povolený nárůst	Povolený pokles
\$C\$4	Proměnné x1,X2 Miska	24	0	40	26,66666667	15
\$D\$4	Proměnné x1,X2 Hrnek	8	0	50	30	20

Omezující podmínky

Levá strana omezující podmínky	Název	Konečná Hodnota	Stínová cena	Pravá strana omezující podmínky	Povolený nárůst	Povolený pokles
\$E\$7	Materiál Total	120	6	120	40	60
\$E\$8	Práce Total	40	16	40	40	10

Use of Solver (English)



New Excel List



Microsoft Excel 14.0 Citlivostní sestava
List: [LP_EXCEL_SOLVER USE_20171101.xlsx]List1
Sestava vytvořena: 2.11.2017 8:49:10

Proměnné buňky

Buňka	Název	Konečná Hodnota	Snížené Gradient
\$D\$6	Variables X1, X2 Dish	24	0
\$E\$6	Variables X1, X2 Mug	8	0

Omezující podmínky

Buňka	Název	Konečná Hodnota	Lagrangeův multiplikátor
\$F\$10	Material Total	120	6
\$F\$11	Work Total	40	16

Změna úlohy- jiné výnosy jiná omezení typu práce na dvou strojích a jejich kapacitní omezení

	Miska	Hrnek	Total	Kapacita
Proměnné x1,x2	0	0		
Přínos	40	50	0	
Stroj 1	7	5	0	200
Stroj 1	5	5	0	400



	Miska	Hrnek	Total	Kapacita
Proměnné x1,x2	0	40		
Přínos	40	50	2000	
Stroj 1	7	5	200	200
Stroj 1	5	5	200	400

Parametry Řešitele

Účejová funkce:

Hledat: Max Min Hodnota:

Proměnné modelu:

Omezující podmínky:



OK ?