Řešení písemné práce 12. 12. 2004

Příklad 1.: U 10 výrobců byly zjišťovány náklady (znak X – v Kč) a ceny (znak Y – v Kč) pro stejný výrobek. Výsledky (X,Y): (30,18; 50,26), (30,19; 50,23), (30,21; 50,27), (30,22; 50,25), (30,25; 50,22), (30,26; 50,32), (30,26; 50,33), (30,28; 50,29), (30,30; 50,37), (30,33; 50,42). Jsou uvedeny číselné charakteristiky:
m_1 = 30,248 Kč, m_2 = 50,296 Kč, s_1^2 = 0,002096 Kč^2, s_2^2 = 0,003684 Kč^2, s_{12} = 0,002292 Kč^2.
a) Vypočtěte koeficient korelace a interpretujte ho. (Návod: poznámka 3.16.) (1 bod)
b) Najděte koeficienty regresní přímky vyjadřující závislost cen na nákladech. Vypočtěte index determinace a interpretujte ho. Vzrostou-li náklady o 10 haléřů, o kolik haléřů vzrostou ceny? (Návod: věta 4.3., příklad 4.4.) (2 body)
c) Pomocí koeficientů variace porovnejte variabilitu nákladů a cen. (Návod: definice 3.10., příklad 3.11.) (1 bod)
Řešení:

ad a) $r_{12} = \dfrac{s_{12}}{s_1 s_2} = \dfrac{0{,}02292}{\sqrt{0{,}002096 \cdot 0{,}003684}} = 0{,}8248$. Znamená to, že mezi náklady a cenou existuje silná přímá lineární závislost – s rostoucími náklady roste i cena výrobku.

ad b) $\mathrm{b}_1 = \dfrac{s_{12}}{s_1^{\;2}} = \dfrac{0{,}002292}{0{,}002096} = 1{,}0935$, $\mathrm{b}_0 = m_2 - b_1 m_1 = 50{,}296 - 1{,}0935 \cdot 30{,}248 = 17{,}2198$.

Regresní přímka má tedy rovnici y = 17,2198 + 1,0935x. Její index determinace je $ID^2 = 0{,}8248^2 =$ 0,68, což znamená, že variabilita cen je vysvětlená z 68% regresní přímkou. Vzrostou-li náklady o 10 haléřů, ceny vzrostou v průměru o 10,935 haléřů.

ad c) Koeficient variace pro náklady: $\dfrac{s_1}{m_1} = \dfrac{\sqrt{0{,}002096}}{30{,}248} = 0{,}001535$, koeficient variace pro ceny:

$\dfrac{s_2}{m_2} = \dfrac{\sqrt{0{,}003684}}{50{,}296} = 0{,}0012067$. Vidíme tedy, že variabilita cen je menší než variabilita nákladů.

Příklad 2.: V sérii 50 výrobků je 5 zmetků. Ze série třikrát po sobě náhodně vybereme jeden výrobek, který vždy vrátíme zpět. Náhodná veličina X udává počet zmetků mezi vybranými výrobky.
a) Určete typ rozložení náhodné veličiny X a napište vzorec pro její pravděpodobnostní funkci. (Návod: příklad 8.3.) (1 bod)
b) Najděte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X. (Návod: věta 9.13.) (1,5 bodu)
c) Vypočtěte pravděpodobnost, že mezi vybranými výrobky budou aspoň dva zmetky. (Návod: příklad 8.3.) (1,5 bodu)
Řešení:

ad a) X ~ Bi(n, υ), kde n = 3, υ = 5/50 = 0,1, $\pi(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} 0{,}1^x 0{,}9^{3-x} & \text{pro x = 0,1,2,3} \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$

ad b) E(X) = nυ = 3.0,1 = 0,3, D(X) = nυ(1- υ) = 3.0,1.0,9 = 0,27, $\sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}27} = 0{,}51962$

ad c) P(X≥2) = π(2) + π(3) = 0,028

Příklad 3.: Měřením délky deseti válečků byly získány tyto hodnoty: 5,38 5,36 5,35 5,40 5,41 5,34 5,29 5,43 5,42 5,32. Předpokládáme, že uvedené hodnoty jsou číselné realizace náhodného výběru rozsahu 10 z rozložení N(μ, σ^2), kde parametry μ a σ^2 neznáme.
a) Vypočtěte číselné realizace výběrového průměru a výběrového rozptylu. (Návod: definice 11.2.) (1 bod)
b) Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro směrodatnou odchylku σ. (Návod: věta 12.9.) (1,5 bodu)

c) Na hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že střední hodnota délkyválečků je 5,40 mm proti oboustranné alternativě. (Návod: poznámka 13.5.(b), příklad 13.7.(b)) (1,5 bodu)

Řešení:

ad a)

$$m = \frac{1}{10}(5{,}38 + \ldots + 5{,}32) = 5{,}37mm,\ s^2 = \frac{1}{9}\left[(5{,}38 - 5{,}37)^2 + \ldots + (5{,}32 - 5{,}37)^2\right] = 0{,}00211mm^2$$

$$d = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}00211}{\chi^2_{0{,}975}(9)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}00211}{19{,}023}} = 0{,}0316mm$$

ad b)

$$h = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}00211}{\chi^2_{0{,}025}(9)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}00211}{2{,}7}} = 0{,}0839mm$$

Znamená to, že 0,0316 mm < σ < 0,0839 mm s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c) Testujeme H_0: μ = 5,40 mm proti H_1: μ ≠ 5,40 mm na hladině významnosti 0,01. Sestrojíme oboustranný empirický 99% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu při neznámém rozptylu.

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha/2}(n-1) = 5{,}37 - \frac{\sqrt{0{,}00211}}{\sqrt{10}} t_{0{,}995}(9) = 5{,}37 - \frac{\sqrt{0{,}00211}}{\sqrt{10}} 3{,}2498 = 5{,}3228mm$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha/2}(n-1) = 5{,}37 + \frac{\sqrt{0{,}00211}}{\sqrt{10}} t_{0{,}995}(9) = 5{,}37 + \frac{\sqrt{0{,}00211}}{\sqrt{10}} 3{,}2498 = 5{,}4172mm$$

Protože $5{,}40 \in (5{,}3228,\ 5{,}4172)$, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,01.