Řešení písemné práce 2.4.2006

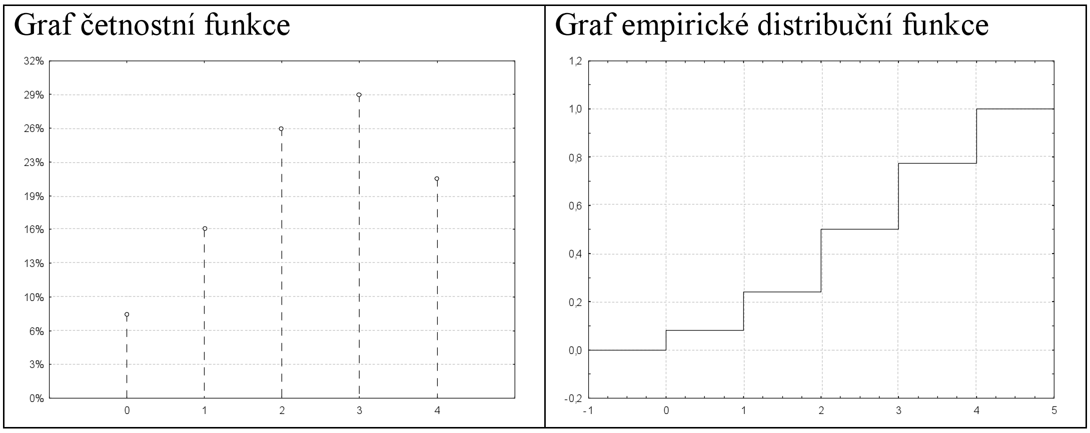
Příklad 1.:
a) V následující tabulce jsou uvedeny počty správně vyřešených příkladů u přijímací zkoušky z matematiky a jejich absolutní četnosti.

x_j	0	1	2	3	4
n_j	5	10	16	18	13

Sestavte variační řadu a nakreslete graf četnostní funkce a empirické distribuční funkce. (Návod: definice 2.4., příklad 2.5.) (2 body)
b) Z datového souboru 1,4 9,9 0,2 9,9 9,6 4,1 2,3 0,9 4,8 7,6 1,9 1,0 3,1 8,1 4,5 3,9 0,3 2,8 0,5 3,6 vypočtěte medián a kvartilovou odchylku. (Návod: definice 3.4., příklad 3.5.) (1 bod)
c) Hodnoty znaku X mají aritmetický průměr -1 a rozptyl 0,5. Najděte aritmetický průměr a rozptyl hodnot znaku Y = -2 + 5X. (Návod: věta 3.18. (a), příklad 3.19.) (1 bod)

Řešení:
ad a) Variační řada

$x_{[j]}$	n_j	p_j	N_j	F_j
0	5	5/62	5	5/62
1	10	10/62	15	15/62
2	16	16/62	31	31/62
3	18	18/62	49	49/62
4	13	13/62	62	1



ad b) Soubor uspořádáme podle velikosti:
0,2 0,3 0,5 0,9 1,0 1,4 1,9 2,3 2,8 3,1 3,6 3,9 4,1 4,5 4,8 7,6 8,1 9,6 9,9 9,9
Rozsah souboru n = 20.

Výpočet mediánu: nα = 20.0,5 = 10, $x_{0,50} = \dfrac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \dfrac{3,1+3,6}{2} = 3,35$.

Výpočet dolního kvartilu: nα = 20.0,25 = 5, $x_{0,25} = \dfrac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \dfrac{1,0+1,4}{2} = 1,2$.

Výpočet horního kvartilu: nα = 20.0,75 = 15, $x_{0,75} = \dfrac{x_{(15)} + x_{1(6)}}{2} = \dfrac{4,8+7,6}{2} = 6,2$.

Výpočet kvartilové odchylky: $q = x_{0,75} - x_{0,25} = 6,2 - 1,2 = 5$.

ad c) $m_1 = -1$, $s_1^2 = 0,5$, $m_2 = -2 + 5m_1 = -2 - 5 = -7$, $s_2^2 = 5^2\, s_1^2 = 25.0,5 = 12,5$.

Příklad 2.:

a) Náhodný pokus spočívá v hodu třemi mincemi. Jev A znamená padnutí aspoň dvou líců, jev B padnutí nejvýše dvou rubů. Najděte opačné jevy k jevům A, B. (Návod: poznámka 5.3. (e)) (1 bod)

b) Jevy A, B jsou stochasticky nezávislé, přičemž P(A) = 0,2 a P(B) = 0,3. Jaká je pravděpodobnost nastoupení aspoň jednoho z jevů A, B? (Návod: vlastnost P3 ve větě 5.7., definice 6.1.) (1 bod)

c) Nechť X ~ N(1, 1/4). Vypočtěte P(1 < X < 2). (Návod: 4. vlastnost ve větě 7.5. (a), příklad 8.9.) (2 body)

Řešení:

ad a)

$\overline{A}$ … padne nevýše jeden líc (neboli padnou aspoň dva ruby), $\overline{B}$ … padnou právě tři ruby.

ad b)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}44$$

ad c)

$$P(1 < X < 2) = P\left(\frac{1-1}{0{,}5} < \frac{1-1}{0{,}5} < \frac{2-1}{0{,}5}\right) = P(0 < U < 2) = \Phi(2) - \Phi(0) = 0{,}97725 - 0{,}5 = 0{,}47725$$

Příklad 3.: Kontrola zvážila 5 tabulek čokolády. Výsledky vážení (v gramech) byly: 198, 199, 197, 202, 200. Předpokládáme, že tyto výsledky představují realizace náhodného výběru rozsahu 5 z normálního rozložení N(μ, σ^2).

a) Vypočtěte výběrový průměr a výběrový rozptyl. (1 bod) (definice 11.2.)

b) Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ. (1,5 bodu) (věta 12.9. (b))

c) Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2. (1,5 bodu) (věta 12.9. (c))

Řešení:

ad a) m = 199,2 g, s^2 = 3,7 g^2

ad b) $d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 199{,}2 - \frac{\sqrt{3{,}7}}{\sqrt{5}} t_{0{,}975}(4) = 199{,}2 - \frac{\sqrt{3{,}7}}{\sqrt{5}} 2{,}7764 = 196{,}8$

$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 199{,}2 + \frac{\sqrt{3{,}7}}{\sqrt{5}} t_{0{,}975}(4) = 199{,}2 + \frac{\sqrt{3{,}7}}{\sqrt{5}} 2{,}7764 = 201{,}6$

196,8 g < μ < 201,6 g s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c) $d = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} = \frac{4 \cdot 3{,}7}{\chi^2_{0{,}975}(4)} = \frac{4 \cdot 3{,}7}{11{,}143} = 1{,}33$

$h = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} = \frac{4 \cdot 3{,}7}{\chi^2_{0{,}025}(4)} = \frac{4 \cdot 3{,}7}{0{,}484} = 30{,}58$

1,33 g^2 < σ^2 < 30,58 g^2 s pravděpodobností aspoň 0,95.

Hodnocení

$(10,12\rangle$ … A, $(9,10\rangle$ … B, $(8,9\rangle$ … C, $(7,8\rangle$ … D, $\langle 6,7\rangle$ …E, $\langle 0,6)$ … F