# Řešení písemné zkoušky 21. 1. 2006

**Příklad 1.:** Je dána kontingenční tabulka obsahující hodnoty simultánní četnostní funkce p(x,y) vektorového znaku (X, Y):

| x | y | | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0,20 | 0,20 | 0,00 |
| 1 | 0,05 | 0,25 | 0,03 |
| 2 | 0,05 | 0,01 | 0,05 |
| 3 | 0,05 | 0,01 | 0,10 |

a) Doplňte tabulku o marginální četnostní funkce $p_1(x)$, $p_2(y)$. (0,6 bodu)
b) Vypočtěte průměry znaků X, Y. (0,8 bodu)
c) Vypočtěte rozptyly znaků X, Y. (1,2 bodu)
d) Vypočtěte a interpretujte koeficient korelace znaků X, Y. (1,4 bodu)

**Řešení:**
ad a)

| x | y | | | $p_1(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | |
| 0 | 0,20 | 0,20 | 0,00 | 0,40 |
| 1 | 0,05 | 0,25 | 0,03 | 0,33 |
| 2 | 0,05 | 0,01 | 0,05 | 0,11 |
| 3 | 0,05 | 0,01 | 0,10 | 0,16 |
| $p_2(y)$ | 0,35 | 0,47 | 0,18 | 1 |

ad b)
$m_1 = 1.0,33 + 2.0,11 + 3.0,16 = 1,03$, $m_2 = 1.0,47 + 2.0,18 = 0,83$,
ad c)
$s_1^2 = 1^2.0,33 + 2^2.0,11 + 3^2.0,16 - 1,03^2 = 1,1491$,
$s_2^2 = 1^2.0,47 + 2^2.0,10 - 0,83^2 = 0,5011$,
ad d)
$s_{12} = 1.1.0,25 + 1.2.0,03 + 2.1.0,01 + 2.2.0,05 + 3.1.0,01 + 3.2.0,1 - 1,03.0,83 = 0,3051$,

$$r_{12} = \frac{0,3051}{\sqrt{1,1491}\sqrt{0,5011}} = 0,4021$$

Mezi znaky X a Y existuje slabá přímá lineární závislost.

**Příklad 2.:** V jedné dílně pracují nezávisle na sobě tři dělníci. Náhodná veličina $X_i$ udává počet zmetků, které vyrobí i-tý dělník za jednu směnu, i = 1, 2, 3. Dlouhodobým pozorováním byly zjištěny hodnoty pravděpodobnostní funkce $\pi_i(x_i)$ , i = 1, 2, 3.

| 1.dělník | | 2.dělník | | 3.dělník | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\pi_1(x_1)$ | $x_2$ | $\pi_2(x_2)$ | $x_3$ | $\pi_3(x_3)$ |
| 0 | 0,01 | 0 | 0,09 | 0 | 0,00 |
| 1 | 0,52 | 1 | 0,63 | 1 | 0,41 |
| 2 | 0,36 | 2 | 0,28 | 2 | 0,52 |
| 3 | 0,11 | 3 | 0,00 | 3 | 0,07 |

a) Pomocí střední hodnoty počtu zmetků posuďte, který z dělníků podává nejlepší výkon. (1 bod)
b) Pomocí rozptylu počtu zmetků posuďte, který z dělníků podává nejvyrovnanější výkon. (1,5 bodu)
c) Jaká je střední hodnota a rozptyl počtu zmetků vyrobených v této dílně za jednu pracovní směnu? (1,5 bodu)

**Řešení:**
ad a) $E(X_1) = 1,57$, $E(X_2) = 1,19$, $E(X_3) = 1,66$. Znamená to, že nejlepší výkon podává druhý dělník.
ad b) $D(X_1) = 0,4851$, $D(X_2) = 0,3339$, $D(X_3) = 0,3644$. Znamená to, že nejvyrovnanější výkon podává druhý dělník.
ad c) $E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 1,57 + 1,19 + 1,66 = 4,42$,
$D(X_1 + X_2 + X_3) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) = 0,4851 + 0,3339 + 0,3644 = 1,1834$

**Příklad 3.**: Nechť $X_1, ..., X_{10}$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde parametry $\mu$, $\sigma^2$ neznáme. Realizace výběrového průměru M je m = 21,2 a realizace výběrového rozptylu $S^2$ je $s^2$ = 30,25. Na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ testujte nulovou hypotézu $H_0$: $\mu = 25$ proti alternativní hypotéze $H_1$: $\mu < 25$. Test proveďte pomocí
a) intervalu spolehlivosti, (2 body)
b) kritického oboru. (2 body)

**Řešení:**
ad a)
Při testování nulové hypotézy proti levostranné alternativě konstruujeme pravostranný interval spolehlivosti.

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) = 21,2 + \frac{\sqrt{30,25}}{\sqrt{10}} t_{0,99}(9) = 21,2 + 1,7392527.2,8214 = 26,11$$

Protože číslo c = 25 leží v intervalu $(-\infty; 26,11)$, hypotézu $H_0$: $\mu = 25$ nezamítáme na hladině významnosti 0,01.
ad b)
Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \dfrac{m-c}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{21,2-25}{\frac{\sqrt{30,25}}{\sqrt{10}}} = -2,1848$

Číslo $t_0$ porovnáme s opačnou hodnotou kvantilu $t_{0,99}(9) = 2,8214$. Protože -2,1848 je větší než -2,8214, hypotézu $H_0$: $\mu = 25$ nezamítáme na hladině významnosti 0,01.

**Hodnocení**
$(10,12\rangle$ … A, $(9,10\rangle$ … B, $(8,9\rangle$ … C, $(7,8\rangle$ … D, $\langle 6,7\rangle$ …E, $\langle 0,6)$ … F