

Vzorová písemná práce

Příklad 1.: Při statistickém šetření pojištěnců byly získány tyto výše pojistek (v Kč):

Výše pojistky	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570
Počet pojištěnců	7	10	14	22	25	12	3	3	2	2

- Nakreslete graf četnostní funkce. (1 bod)
- Zjistěte průměr, medián a modus výše pojistky. (1,5 bodu)
- Vypočtěte rozptyl, směrodatnou odchylku a koeficient variace výše pojistky. (1,5 bodu)

Příklad 2.: Počet různých druhů zboží, které zákazník nakoupí při jedné návštěvě obchodu, je náhodná veličina X . Dlouhodobým sledováním bylo zjištěno, že X nabývá hodnot 0, 1, 2, 3, 4 s pravděpodobnostmi 0,25, 0,55, 0,11, 0,07 a 0,02.

- Najděte distribuční funkci náhodné veličiny X a nakreslete její graf. (1,5 bodu)
- Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X . (1 bod)
- Vypočtěte rozptyl náhodné veličiny X . (1,5 bodu)

Příklad 3.: U jistého měřicího zařízení má být posouzena jeho přesnost. Proto na něm byla nezávisle změřena délka téhož výrobku. Výsledky měření v cm byly: 15,15; 15,20; 15,04; 15,14; 15,22. Předpokládáme, že tyto výsledky jsou číselné realizace náhodného výběru rozsahu 5 z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

- Vypočtěte realizaci výběrového průměru, výběrového rozptylu a výběrové směrodatné odchylky. (1,5 bodu)
- Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ (1 bod)
- Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2 a pro směrodatnou odchylku σ . (1,5 bodu)

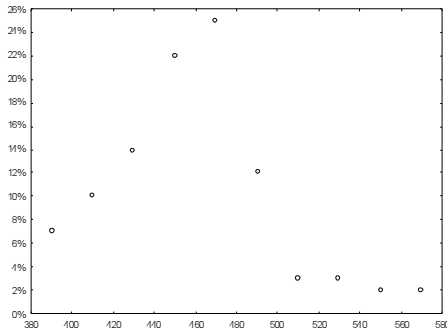
Hodnocení písemky

- (10, 12] ... A
- (9, 10] B
- (8, 9] C
- (7, 8] D
- [6, 7] E
- [0, 6) F

Řešení vzorové písemné práce

Řešení příkladu 1.:

ad a) Graf četnostní funkce



ad b) Použijeme vzorec pro vážený aritmetický průměr. Rozsah souboru:

$$n = 7 + 10 + \dots + 2 = 100.$$

$$m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r n_j x_{[j]} = \frac{1}{100} (7 \cdot 390 + 10 \cdot 410 + \dots + 2 \cdot 570) = 457,4$$

Datový soubor má sudý rozsah, tedy medián je průměr dvou prostředních hodnot uspořádaného datového souboru, tj. průměr 50. a 51. uspořádané hodnoty, tedy 450. Modus je nejčetnější varianta znaku, tj. 470.

ad c) Rozptyl vypočteme podle vzorce pro vážený rozptyl.

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r n_j (x_{[j]} - m)^2 =$$

$$\frac{1}{100} [7 \cdot (390 - 457,4)^2 + 10 \cdot (410 - 457,4)^2 + \dots + 2 \cdot (570 - 457,4)^2] = 1493,24$$

$$\text{Směrodatná odchylka } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1493,24} = 38,64$$

$$\text{Koeficient variace } \frac{s}{m} = \frac{38,64}{457,4} = 0,08$$

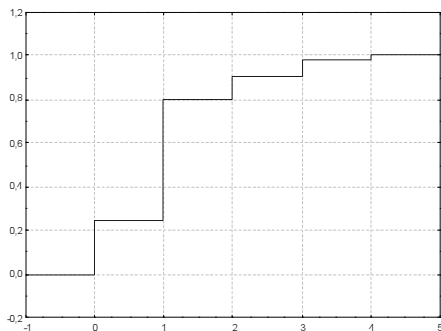
Řešení příkladu 2.:

ad a)

$$x \in (-\infty, 0): \Phi(x) = 0, x \in \langle 0, 1): \Phi(x) = 0,25, x \in \langle 1, 2): \Phi(x) = 0,8, x \in \langle 2, 3): \Phi(x) = 0,91,$$

$$x \in \langle 3, 4): \Phi(x) = 0,98, x \in \langle 4, \infty): \Phi(x) = 1$$

Graf:



ad b)

$$E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\pi(x) = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,55 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0,02 = 1,06$$

ad c)

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \\ = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \pi(x) - [E(X)]^2 = 0^2 \cdot 0,25 + 1^2 \cdot 0,55 + 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,07 + 4^2 \cdot 0,02 - 1,06^2 = 0,8164$$

Řešení příkladu 3.:

ad a) $m = 15,15$, $s^2 = 0,0049$, $s = 0,07$

ad b) Ve statistických tabulkách najdeme $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0,975}(4) = 2,7764$. Po dosazení do vzorců pro dolní a horní mez dostaneme

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 15,15 - \frac{0,07}{\sqrt{5}} 2,7764 = 15,06$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 15,15 + \frac{0,07}{\sqrt{5}} 2,7764 = 15,24.$$

Tedy $15,06 \text{ cm} < \mu < 15,24 \text{ cm}$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c) Ve statistických tabulkách najdeme $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0,975}(4) = 11,143$,

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0,025}(4) = 0,484$. Po dosazení do vzorců pro dolní a horní mez dostaneme

$$d = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} = \frac{4 \cdot 0,0049}{11,143} = 0,0018, \quad h = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} = \frac{4 \cdot 0,0049}{0,484} = 0,0405$$

Tedy $0,0018 \text{ cm}^2 < \sigma^2 < 0,0405 \text{ cm}^2$ s pravděpodobností aspoň 0,95.