Tento materiál je určen výhradně pro posluchačů předmětu Matematika A tutora RNDr. Štěpána MIKOLÁŠE.

Učební text **Matematika A – distanční studijní opora** (dále jen DSO), který můžete zakoupit v prodejně na Ekonomicko-správní fakultě je rozčleněn do šesti kapitol. První dvě jsou věnovány opakování středoškolské látky a jsou určeny výhradně k samostatnému studiu, nebudou proto - až na výjimky - probírány na tutoriálech. Další čtyři kapitoly se zabývají lineární algebrou a látka zde obsažená bude na tutoriálech vysvětlována.
Následující text obsahuje zejména řešené příklady, které budou probírány na tutoriálech a vznikl proto, aby posluchači na tutoriálech nemuseli příliš mnoho psát a mohli se o to více soustředit na výklad.

Nedílnou součástí kombinovaného studia je vypracování POTů (práce opravovaná tutorem). Zadání POTů bude zveřejněno v On-line studiu. Zde chci jenom upřesnit způsob odevzdávání vypracovaných POTů. Možností je několik:

1. Odevzdání na některém tutoriálu – tuto možnost preferuji.
2. Odevzdání paní Hráčkové, sekretářce Katedry aplikované matematiky a informatiky ESF, Lipová 41a, Brno – 7. poschodí. Na obálku nebo první stránku POTu je pak třeba výrazně napsat **Určeno pro tutora RNDr. Mikoláše.**
3. Zaslat poštou na adresu:
   RNDr. Štěpán Mikoláš
   Katedra aplikované matematiky PřF MU
   Janáčkovo nám. 2a
   602 00 BRNO
4. Zcela výjimečně a po předchozí dohodě zaslat v elektronické podobě emailem na adresu: mikolas@math.muni.cz
   Zde ovšem bývají problémy, protože universitní server příliš rozsáhlé maily odmítá.

V žádném případě neodevzdávejte POTy prostřednicvím „odevzdávárny“ v On-line studiu. Ta je pro matematické texty zcela nevhodná a v loňském školním roce jsem z několika takto odevzdaných textů nedostal ani jediný.

Odevzdané POTy se budu snažit do 2 – 3 týdnů opravit. V Informačním systému MU (dále jen IS) jsem u předmětu KMMATA vytvořil poznámkový blok POTy. Pokud např. odevzdáte POT1 a bude buďto bez chyb nebo jen s drobnými chybičkami, jejichž opravu nebudu vyžadovat, napíši do poznámkového bloku jenom „POT1“. Budou-li v POTu větší chyby, napíši např. „POT1 – opravit př. 2a,3,5.“
Poznámkový blok najdete na adrese http://is.muni.cz/ , klepnete myší na Student a po zadání Vašeho login a password volíte předmět KMMATA a poznámkový blok POTy.

Moje poštovní i emailová adresa je uvedena výše. Zde uvedu ještě telefonní čísla:
Na pracoviště 549495864.
Mobil: 732172039.

Informace o písemné části zkoušky.
platí pro skupinu tutora RNDr. Mikoláše

témata na písemku**:**
- kvadratické nerovnice, nerovnice s absolutními hodnotami
- operace s maticemi (např. $3A-B*C+D^T$)
- lineární závislost a nezávislost vektorů, báze a dimenze podprostoru $W \subset V_n$, hodnost matice
- determinanty
- systémy lineárních rovnic
- Cramerovo pravidlo
- inverzní matice
- vlastní čísla a vlastní vektory

Písemka bude trvat 90 minut a bude mít šest příkladů. Každý příklad bude hodnocen maximálně 10 body.
Od bodového zisku se bude odvíjet návrh známky takto:

<0,30)	<30,35)	<35,40)	<40,45)	<45,53)	<53,60>
F	E	D	C	B	A

Ústní zkouškou je možno si navrženou klasifikaci zlepšit, ale i zhoršit.

Zadání i vypracované vzorové řešení jedné písemné zkoušky je uvedeno na závěr tohoto textu

Řešené příklady z matematiky A.

Nerovnice.

Nerovnicí rozumíme vztah tvaru $f(x) \le g(x)$ [respektive $f(x) \ge g(x)$] nebo $f(x) < g(x)$ [respektive $f(x) > g(x)$] .

Řešením nerovnice rozumíme každé číslo α, jehož dosazením do nerovnice dostaneme platnou nerovnost. Nerovnice nemusí mít žádné řešení, ale může mít i nekonečně mnoho řešení. Má proto smysl mluvit o ***množině řešení*** dané nerovnice. Dvě nerovnice, které mají stejné množiny řešení se nazývají ***ekvivalentní.***

Při řešení nerovnice používáme ***ekvivalentní úpravy,*** kterými ji převedeme na co nejjednodušší ekvivalentní nerovnici, jejíž řešení snadno určíme.

Ekvivalentní úpravy jsou:

- přičtení stejného výrazu k oběma stranám nerovnice
- násobením obou stran nerovnice libovolným kladným výrazem

Při násobení obou stran nerovnice záporným výrazem se znaménko nerovnice změní ve znaménko opačné.

V dalším se budeme zabývat pouze kvadratickými nerovnicemi a nerovnicemi s absolutními hodnotami.

Příklad 1. Řešte v **R** nerovnici $x^2 - x - 6 \ge 0$.

Řešení:

Kvadratický trojčlen $x^2 - x - 6$ rozložíme v kořenové činitele:

$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$.

$(x+2)(x-3) \ge 0$

$x+2$	-		+		+
$x-3$	-		-		+
(x+2)(x-3)	+		-		+
		-2		3	

celkem $x \in (-\infty,-2 > \cup < 3,\infty)$

Celý tento postup lze zkrátit užitím následujícího tvrzení:
Dva různé reálné kořeny kvadratického trojčlenu rozdělí číselnou osu na tři intervaly. V každém z nich nabývá tento trojčlen pouze kladných [respektive pouze záporných] hodnot. Nabývá–li v jednom z intervalů kladných hodnot, nabývá v sousedních intervalech záporných hodnot a naopak.

Stačí tedy při řešení kvadratické nerovnosti určit znaménko kvadratického trojčlenu v jediném vnitřním bodě jednoho z intervalů.

Vrátíme-li se k Příkladu 1. , dostáváme

$f(x) = (x+2)(x-3)$, $f(0) = -6 < 0$ a tedy

(x+2)(x-3)	+		-		+
		-2		3	

Příklad 2.

Řešte v **R** nerovnici $|x^2-4x|+3>x^2+|x-5|$.

Řešení:

x^2-4x	+	-	+	+
$x-5$	-	-	-	+

a) Pro $x\in(-\infty,0>\cup<4,5)$ dostaneme

$$x^2-4x+3>x^2-x+5$$
$$3x<-2$$
$$x<-2/3$$

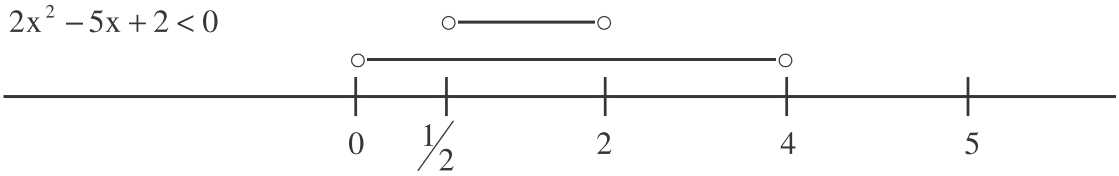
znázorněno graficky:

$x\in(-\infty,-2/3)$

b) Pro $x\in(0,4)$ dostaneme:

$$-x^2+4x-3>x^2-x+5$$
$$2x^2-5x+2<0$$
$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)<0$$

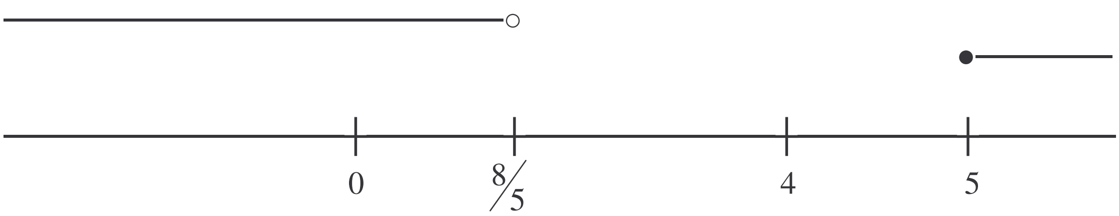
$2x^2-5x+2$	+	+	-	+	+	+
$2x^2-5x+2<0$						



$x\in\left(1/2,2\right)$

c) Pro $x\in<5,\infty)$ dostaneme:

$$x^2-4x+3>x^2+x-5$$
$$5x<8$$
$$x<8/5=1{,}6$$



$x\in\varnothing$

Celkem $x\in\left(-\infty,-2/3\right)\cup\left(1/2,2\right)$

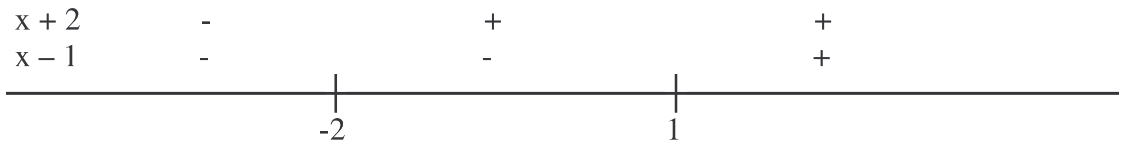
Příklad 3. Řešte v **R** nerovnici $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| \geq 3$.

Řešení:

Definiční obor: $\mathbf{R}-\{1\}$

Celou nerovnici násobíme pro $x \neq 1$ výrazem $|x-1|$, který je kladný a dostaneme

$$|x+2| \geq 3|x-1|$$



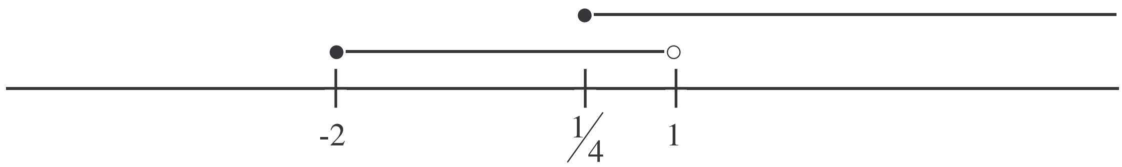
a) Pro $x \in (-\infty,-2)$ dostaneme:

$$-x-2 \geq -3x+3$$
$$2x \geq 5$$
$$x \geq 5/2$$

$$x \in \emptyset$$

b) Pro $x \in <-2,1)$ dostaneme:

$$x+2 \geq -3x+3$$
$$4x \geq 1$$
$$x \geq 1/4$$



$x \in < 1/4 \; , \; 1)$

c) Pro $x \in (1,\infty)$ dostaneme:

$$x+2 \geq 3x-3$$
$$2x \leq 5$$
$$x \leq 5/2$$

$x \in (1 \; , \; 5/2 >$

Celkem $\quad x \in < 1/4 \; , \; 1) \cup (1 \; , \; 5/2 >$

Příklad 4. Řešte v **R** nerovnici $\dfrac{|4x-10|}{x+2} < 6$.

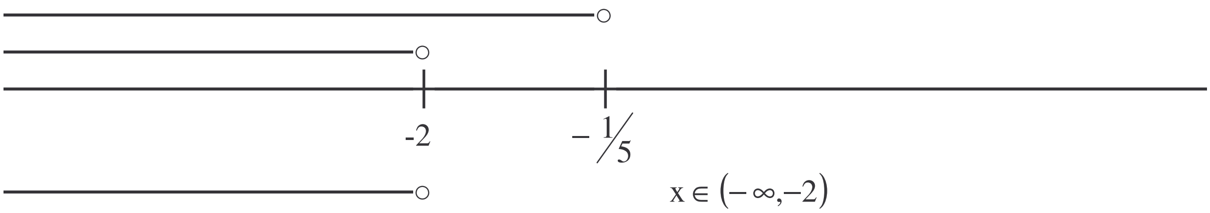
Řešení:

Def. obor: $\mathbf{R}-\{-2\}$ **.**

4x -10	-	-	+
x + 2	-	+	+

a) Pro $x \in (-\infty,-2)$ dostaneme:

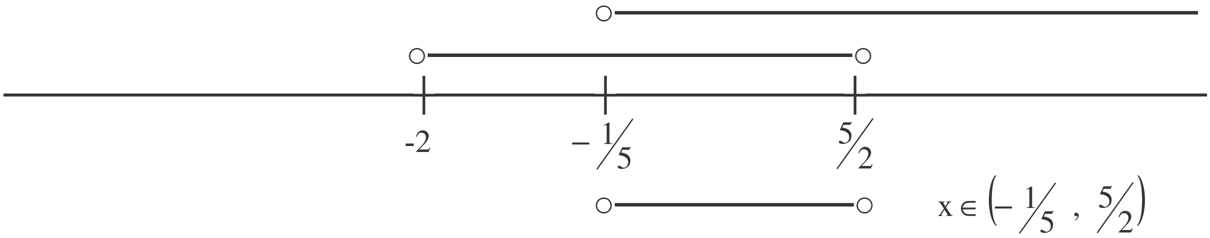
$$-4x+10 > 6x+12$$
$$10x < -2$$
$$x < -\tfrac{1}{5}$$



$x \in (-\infty,-2)$

b) Pro $x \in \left(-2\ ,\ \tfrac{5}{2}\right)$ dostaneme

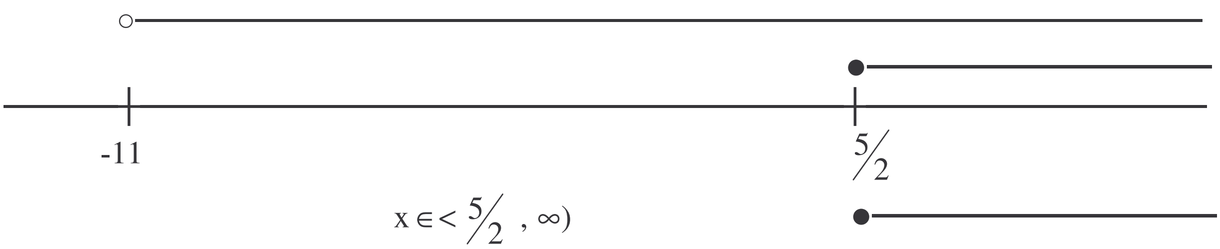
$$-4x+10 < 6x+12$$
$$10x > -2$$
$$x > -\tfrac{1}{5}$$



$x \in \left(-\tfrac{1}{5}\ ,\ \tfrac{5}{2}\right)$

c) Pro $x \in \left< \tfrac{5}{2}\ ,\ \infty\right)$ dostaneme:

$$4x-10 < 6x+12$$
$$2x > -22$$
$$x > -11$$



$x \in \left< \tfrac{5}{2}\ ,\ \infty\right)$

Celkem $x \in (-\infty,-2) \cup \left(-\tfrac{1}{5}\ ,\ \infty\right)$.

Matice.

DSO str. 126-

Buďte $m, n \in \mathbf{N}$. Soustava $m \cdot n$ čísel zapsaných následujícím způsobem do m řádků a n sloupců

$$(*) \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá ***matice typu (m,n).*** Čísla a_{ij} se nazývají ***prvky matice*** **A,** i je ***řádkový index***, j je ***sloupcový index***. Případně prvky matice značíme $a_{i,j}$.

Místo zápisu (*) často užíváme stručnější zápis $\mathbf{A} = (a_{ij}),\ 1 \le i \le m\ ,\ 1 \le j \le n$.

Prvky $a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}$, kde $r = \min\{m,n\}$ tvoří ***hlavní diagonálu*** .

Prvky a_{ij} , kde $i + j = n + 1$ tvoří ***vedlejší diagonálu*** .

Matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule se nazývá ***nulová matice*** a značí se **0** .

.Je-li $m = n$, říkáme, že matice **A** je ***čtvercová matice*** řádu n.
Čtvercová matice, která má všechny prvky pod hlavní diagonálou rovny nule se nazývá ***horní trojúhelníková matice*** . Pro $i > j$ platí $a_{ij} = 0$.

Čtvercová matice, která má všechny prvky nad hlavní diagonálou rovny nule se nazývá ***dolní trojúhelníková matice*** . Pro $i < j$ platí $a_{ij} = 0$.

Čtvercová matice, která má nenulové prvky pouze v hlavní diagonále se nazývá ***diagonální matice***.
Diagonální matice, která má všechny prvky v hlavní diagonále rovny jedné se nazývá ***jednotková matice*** a značí se **E** (případně $\mathbf{E_n}$ chceme-li vyjádřit, že se jedná o matici řádu n).
Dvě matice **A,B** považujeme za sobě rovné a píšeme **A = B** právě když jsou téhož typu a když pro každé i = 1,2,…,m a j = 1,2,…,n platí $a_{ij} = b_{ij}$.

Matice typu $\mathbf{A} = (a_{11} \ \ a_{12} \ \ ... \ \ a_{1n})$ typu (1,n) se nazývá ***řádkový vektor***. První index většinou vynecháváme a vektor značíme malým písmenem, tedy $\mathbf{a} = (a_1 \ \ a_2 \ \ ... \ \ a_n)$.

Podobně matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ . \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ typu (m,1) se nazývá ***sloupcový vektor*** . Druhý index

většinou vynecháváme a vektor značíme malým písmenem, tedy $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$

Matice typu (m,n) je zřejmě tvořena m řádkovými a n sloupcovými vektory.

Příklady.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 0 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

A je matice typu (4,6).
Hlavní diagonála je 1, 3, 2, -5 .
Vedlejší diagonála je 2, -4, 3, 1 .

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bje nulová matice typu (3,4).
Značí se též **0** .

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

C je čtvercová matice řádu 4.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D je horní trojúhelníková matice.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

F je dolní trojúhelníková matice

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

G je diagonální matice řádu 5.

$$\mathbf{E_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{E_4}$ je jednotková matice řádu 4.

Operace s maticemi.

DSO str. 132-137.

Definice.

Nechť **A** je matice typu (m,n) . Potom matici typu (n,m), jejíž i-tý řádek je roven i-tému sloupci matice **A** , i = 1,2,…,m , nazýváme ***transponovanou maticí*** k matici **A** a značíme ji $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.

Poznámka.

Transponovaná matice $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ vznikne z matice **A** záměnou řádků za sloupce.

Příklad.

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Potom $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Definice.

Nechť **A,B** jsou matice téhož typu (m,n). ***Součtem*** matice **A** a **B** rozumíme matici **C** typu (m,n), pro jejíž prvky c_{ij} , i = 1,2,…,m , j = 1,2,…,n , platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad .$$

Píšeme pak **C = A + B** .

Příklad.

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ -6 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Potom $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1+4 & -2+3 & -5+3 \\ -2+3 & 1+2 & 7+5 & 2+2 \\ 4-6 & 6-3 & 3-1 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 12 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **.**

Definice.

Nechť **A** je matice typu (m,n) a α je reálné číslo. Potom ***součinem čísla*** α ***a matice*** **A** rozumíme matici **B**, pro jejíž prvky platí

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \quad \text{pro } i = 1,2,\ldots,m \text{ , } j = 1,2,\ldots,n \text{ .}$$

Píšeme $\mathbf{B} = \alpha \cdot \mathbf{A}$, případně pouze $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}$

Příklad.

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, α = -3 . Potom $\alpha \cdot \mathbf{A} = -3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 & 15 \\ 6 & -3 & -21 & -6 \\ -12 & -18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$ **.**

Definice.

Nechť **A,B** jsou matice téhož typu (m,n). ***Rozdíl*** **A - B** definujeme jako matici $\mathbf{A} + (-1) \cdot \mathbf{B}$.

Příklad.

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ -6 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Potom **A – B =**

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ -6 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 & -8 \\ -5 & -1 & 2 & 0 \\ 10 & 9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>**Definice**</u> .

Nechť **A** je matice typu (m,k) a **B** je matice typu (k,n) . Potom ***<u>součinem</u>*** matic **A** a **B** (v tomto pořadí) je matice **C** typu (m,n), pro jejíž prvky c_{ij} , i = 1,2,…,m , j = 1,2,…,n

platí $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}$.

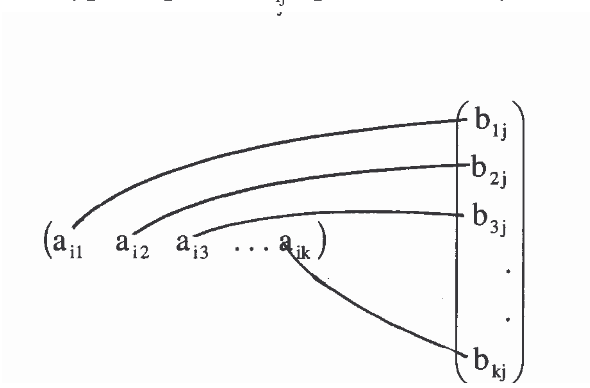
Píšeme **C = A.B ,** případně jenom **C = AB** .

<u>**Poznámky.**</u>

1. Všimněme si, že počet sloupců matici **A** je stejný jako počet řádků v matici **B**. Jinak by součin nebyl definován.
2. Vztah pro výpočet prvku c_{ij} matice **C** lze zapsat s použitím sumační symboliky takto:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} \cdot b_{rj} .$$

3. Pro výpočet prvku c_{ij} používáme i-tý řádek matice **A** a j-tý sloupec matice **B**



Říkáme, že prvek c_{ij} je skalárním součinem řádkového vektoru $(a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \ldots \; a_{ik})$ a sloupcového vektoru $(b_{1j} \quad b_{2j} \quad b_{3j} \quad \ldots \; b_{kj})^T$.

<u>**Poznámka.**</u>

Z definice součinu matice je zřejmé, že obecně matice **AB** není rovna matici **BA** . Může se dokonce stát, že matice **AB** existuje a matice **BA** neexistuje. Pokud pro nějaké matice **A** a **B** platí **AB = BA**, nazývají se matice **A,B** ***<u>zaměnitelné</u>*** .

<u>**Poznámka.**</u>

Pro operace s maticemi platí řada pravidel (viz DSO str. 140-141). Zde připomenu pouze: Jsou-li matice **A,B,E,0** takové, že naznačené operace jsou proveditelné, platí:

1. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$
2. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$
3. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Příklad 1.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -4\\ -2 & 5 & 8\end{pmatrix}\quad,\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 7\\ -3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$. Vypočítejte **AB** a **BA** .

Řešení:

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -4\\ -2 & 5 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 7\\ -3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5+2.(-3)+(-4).1 & 3.7+2.4+(-4).2\\ (-2).5+5.(-3)+8.1 & (-2).7+5.4+8.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 21\\ -17 & 22\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}5 & 7\\ -3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & -4\\ -2 & 5 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5.3+7.(-2) & 5.2+7.5 & 5.(-4)+7.8\\ (-3).3+4.(-2) & (-3).2+4.5 & (-3).(-4)+4.8\\ 1.3+2.(-2) & 1.2+2.5 & 1.(-4)+2.8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 45 & 36\\ -17 & 14 & 44\\ -1 & 12 & 12\end{pmatrix}$$

V tomto případě oba součiny **AB** i **BA** existují, ale nejsou si rovny. Matice **A,B** nejsou zaměnitelné.

Příklad 2.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$. Vypočítejte **AB** a **BA** .

Řešení:

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Součin dvou nenulových matice může být roven nulové matici.

Příklad 3.

Vypočtěte

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 2 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & -3 & 1\\ 3 & 5 & 3\\ 7 & 1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Řešení:

$$=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0 & 0 & -4\\ 3 & 2 & 2 & -2 & 2\\ 4 & -1 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 2 & -2 & -2 & -4\\ -2 & -2 & 2 & -2 & -4\\ -4 & 2 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3 & 3 & 7\\ 0 & 1 & -3 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Příklad 4.

Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Určete matici **B** tak, aby součin **AB** existoval, součin **BA** neexistoval a vypočtěte **AB**.

Řešení:

Matice **A** je typu (3,5) , matice **B** musí být typu (5,p), $p \neq 3$.

Stačí např.volit libovolnou matici typu (5,2). Aby byl výpočet co nejjednodušší, volme nulovou matici tohoto typu, tedy $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pak skutečně **BA** neexistuje a $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 5.

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 2 & 10 & -9 & 2 \\ 7 & 8 & 11 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ -9 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$. Určete matici **C** tak, aby součin **ACB** existoval a spočtěte tento součin.

Řešení:

Matice **A** je typu (3,5), matice **B** je typu (4,2). Matice **C** musí být typu (5,4) a výsledek bude typu (3,2). Aby výpočet byl co nejjednodušší, volme za **C** nulovou matici typu (5,4), tedy

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pak je $\mathbf{ACB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Schodovitá matice.

DSO str. 140

<u>**Definice.**</u>

Nechť **A** je matice typu (m,n). Řekneme, že **A** je horní schodovitá matice, jestliže existuje takové přirozené číslo $h \leq n$, že ke každému i = 1,2,….,h existuje nejmenší s_i tak, že $a_{is_i} \neq 0$ a $s_1 < s_2 < \ldots < s_h$ a zbývající řádky h+1,h+2,…,m jsou nulové.

Poznámka.

Srozumitelněji řečeno, řekneme, že matice **A** je horní schodovitá matice, jestliže nulové řádky následují až za nenulovými a každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek bezprostředně předcházející.

Poněvadž se v dalším budeme zabývat jen horními schodovitými maticemi, můžeme přívlastek „horní“ vynechávat.

Schodovitá matice je tedy např. matice tvaru

$$\begin{pmatrix}
0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & . & . & & . & . & . & a_{1n}\\
0 & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & . & . & & . & . & . & a_{2n}\\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & . & . & & . & . & . & a_{3n}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{47} & a_{48} & . & . & & . & . & . & a_{4n}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{58} & . & . & & . & . & . & a_{5n}\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & & . & . & . & .\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{m-2,j} & . & & . & a_{m-2,n}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{m-1,n-1} & & a_{m-1,n}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

SUBMATICE

DSO str. 137

Definice.
Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m,n) a nechť $\mathbf{u} = (i_1, i_2, ..., i_p)$ je takový vektor, že pro k = 1,2,…,p je $i_k \in \{1,2,...,m\}$ a $i_p \neq i_q$ pro $p \neq q$. Dále nechť je $\mathbf{v} = (j_1, j_2, ..., j_r)$ je takový vektor, že pro k = 1,2,…,r je $j_k \in \{1,2,...,n\}$ a $j_p \neq j_q$ pro $p \neq q$. Potom matici, která vznikne z matice **A** vypuštěním řádků s řádkovými indexy, které jsou složkami vektoru **u** a sloupců, se sloupcovými indexy, které jsou složkami vektoru **v** nazýváme ***submaticí*** matice **A** a značíme $\mathbf{A}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ .Matice, která vznikne z matice **A** tak, že z ní ponecháme jen řádky s řádkovými in dexy, které jsou složkami vektoru **u** a sloupce, se sloupcovými indexy, které jsou složkami vektoru **v** je submaticí matice **A** a značíme ji $\mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

Příklad.

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 9\\ 2 & 7 & 5 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 4 & -4 & -5\\ 3 & 6 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = (2,4)$, $\mathbf{v} = (1,3,4)$. Potom

$$\mathbf{A}_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = \mathbf{A}_{(2,4),(1,3,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 9\\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{A}((2,4),(1,3,4)) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Poznámka.
Jestliže např. **u** = (i), **v** =(j) značíme příslušnou submatici pouze $\mathbf{A}_{i,j}$, případně $\mathbf{A}_{ij}$.

Příklad.

Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 9\\ 2 & 7 & 5 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 4 & -4 & -5\\ 3 & 6 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Potom $\mathbf{A}_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 9\\ 2 & 7 & 5 & 2\\ 3 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}(3,4) = (-4)$.

INVERZNÍ MATICE

DSO str. 145

Definice.

Nechť je dána čtvercová matice **A** . Matice **B** , pro kterou platí **AB = BA = E** se nazývá ***inverzní maticí*** k matici **A** a značí se $\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad 6.

Zjistěte, zda matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 3 \\ -2{,}5 & -5{,}5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ je inverzní maticí k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 3 \\ -2{,}5 & -5{,}5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -7 & 3 \\ -2{,}5 & -5{,}5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy skutečně je $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$**.**

Věta.

Nechť je dána matice **A** a nechť k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$. Potom platí

a) Matice **A** a $\mathbf{A}^{-1}$ jsou čtvercové matice téhož řádu.
b) Inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ je určena jednoznačně.
c) K matici $\mathbf{A}^{-1}$ existuje inverzní matice a je $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$.
d) Jestliže **A, B** jsou čtvercové matice téhož řádu a když k nim existují inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$ **,** potom k matici **AB** existuje inverzní matice a platí $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

SYSTÉMY LINEÁRNÍCH ROVNIC

DSO str. 141-146

Budeme se zabývat systémem m lineárních algebraických rovnic o n neznámých.

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ (1)\quad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou ***neznámé***, reálná čísla a_{ij} , $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ jsou ***koeficienty systému.*** Je-li aspoň jedno z čísel $b_1, b_2, \ldots, b_m$ různé od nuly, nazýváme systém (1) systémem ***lineárních nehomogenních rovnic*** . Jsou-li všechna čísla $b_1, b_2, \ldots, b_m$ rovna nula, mluvíme o systému ***lineárních homogenních rovnic*** . Přívlastek „algebraický“ jsme vynechali, protože se jinými než algebraickými rovnicemi nebudeme zabývat.

Řešením systému (1) nazýváme každou n-tici reálných čísel $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, po jejichž dosazení do systému (1) přejdou všechny rovnice v platné rovnosti.

Označme $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ nebo

$$\overline{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{ a dále } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matici **A** nazýváme ***maticí systému*** (1), matici $\overline{\mathbf{A}}$ ***rozšířenou maticí systému*** (1) , vektor **b** nazýváme ***vektorem pravých stran*** . Rozšířenou matici také značíme $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Systém (1) lze zřejmě zapsat ve tvaru $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Mluvíme pak o zápisu v ***maticové notaci*** .

Příklad 7.

Systém
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 18 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= -29 \end{aligned}$$
zapište v maticovou notaci. Napište též rozšířenou matici tohoto systému.

Řešení:

Matice systému je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$, vektor pravých stran je $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 18 \\ -29 \end{pmatrix}$,

Rozšířená matice systému je $\overline{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 18 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & -29 \end{array}\right)$. Označme dále $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Zápis daného systému v maticové notaci je $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Věta.

Nechť $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je systém n rovnic o n neznámých a nechť k matici **A** existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$. Pak má systém $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení, dané vztahem $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Poznámky.

1. Podrobněji se budeme systémy rovnic zabývat na příštích tutoriálech.
2. Místo systém rovnic používáme též pojem ***soustava rovnic*** .

Lineární prostor.

DSO str. 155-205

Základní pojmy.

DSO str.155-162

Definice.

Neprázdná množina P se nazývá vektorovým prostorem, jestliže pro každé $\mathbf{a},\mathbf{b} \in P$ a každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je definován součet $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in P$ a násobek $\alpha\mathbf{a} \in P$ tak, že pro všechna $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{x},\mathbf{y} \in P$, $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ platí:

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

Existuje prvek $\mathbf{0} \in P$ tak, že pro všechna $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.

Ke každému $\mathbf{x} \in P$ existuje prvek $(-\mathbf{x}) \in P$ tak, že platí $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

$\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}$

$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$

$\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$

Potom množinu P s takto zavedenými operacemi součtu dvou prvků a násobku prvku reálným číslem nazýváme ***lineárním prostorem*** nebo též ***vektorovým prostorem*** a značíme jej **P** .
Prvek **0** nazýváme ***nulovým prvkem*** prostoru **P** .

Věta.

Nechť $n \in \mathbf{N}$ a nechť $\mathbf{R}^n$ je množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel.
Nechť $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Definujeme

(1) $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

(2) $\alpha \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, ..., \alpha \cdot x_n)$.

Množina $\mathbf{R}^n$ s těmito operacemi sčítání dvou prvků a násobení prvku reálným číslem je vektorový prostor.. Nazýváme jej ***aritmetickým vektorovým prostorem*** a značíme $\mathbf{V}_n$.

Poznámka.

Ze středoškolské matematiky a fyziky je znám pojem volného vektoru. Uvažujeme-li prostor $\mathbf{U}_3$ volných vektorů ve třírozměrném prostoru, je zřejmé, že mezi prostory $\mathbf{U}_3$ a $\mathbf{V}_3$ existuje vzájemně jednoznačné přiřazení. Není proto nutno mezi $\mathbf{U}_3$ a $\mathbf{V}_3$ striktně rozlišovat.

Definice.

Nechť **P** je vektorový prostor. Podmnožinu $Q \subseteq P$ nazýváme ***vektorovým podprostorem* Q *vektorového prostoru* P** , jestliže pro každé $\mathbf{a},\mathbf{b} \in Q$ a každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \in Q$ a $\alpha \cdot \mathbf{a} \in Q$. Říkáme též, že vektorový podprostor je uzavřený vzhledem k operacím součtu a násobku reálným číslem.

Lineární nezávislost a závislost vektorů.

DSO str. 164

Definice.

Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{P}$ jsou vektory, $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ jsou čísla. Potom vektor

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n$$

nazýváme ***lineární kombinací*** vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou ***koeficienty lineární kombinace*** .

Definice.

Řekneme, že vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{P}$ jsou ***lineárně nezávislé*** , jestliže

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \iff c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0 .$$

Nejsou-li vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně nezávislé, říkáme, že jsou ***lineárně závislé***.

Poznámka.

Z předchozí definice vyplývá, že vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existují čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$, z nichž je alespoň jedno různé od nuly tak, že platí $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$.

Příklad 8.

Na základě definice lineární nezávislosti vektorů rozhodněte, zda jsou dané vektory lineárně nezávislé či závislé.

a) $\mathbf{u}$ = (1,1,-1,2) , $\mathbf{v}$ = (-4,1,1,3) , $\mathbf{w}$ = (2,-3,1,-1) , $\mathbf{t}$ = (1,1,1,1)

b) $\mathbf{u}$ = (1,1,1,2) , $\mathbf{v}$ = (2,3,4,5) , $\mathbf{w}$ = (1,0,1,0) , $\mathbf{t}$ = (0,3,4,4).

Řešení: vektory **u , v , w , t** jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když vztah

$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} + d\mathbf{t} = \mathbf{0}$ je splněn pouze pro a = b = c = d = 0.

ad a) z předchozího vztahu dostáváme

a.(1,1,-1,2) + b.(-4,1,1,3) + c.(2,-3,1,-1) + d.(1,1,1,1) = (0,0,0,0)

a po rozepsání do souřadnic

$$\begin{aligned} a - 4b + 2c + d &= 0 \\ a + b - 3c + d &= 0 \\ -a + b + c + d &= 0 \\ 2a + 3b - c + d &= 0 \end{aligned}$$

Později se seznámíme s různými metodami řešení takových soustav rovnic. Nyní se spokojíme s tím že od druhé rovnice odečteme první, ke třetí rovnici přičteme první a od čtvrté rovnice odečteme dvojnásobek první. Dostaneme

$$\begin{aligned} a - 4b + 2c + d &= 0 \\ 5b - 5c &= 0 \\ -3b + 3c + 2d &= 0 \\ 11b - 5c - d &= 0 \end{aligned}$$

druhou rovnici dělíme 5 a poté přičteme její trojnásobek ke třetí rovnici a odečteme její jedenáctinásobek od čtvrté rovnice. Obdržíme

$$\begin{aligned} a - 4b + 2c + d &= 0 \\ b - c &= 0 \\ 2d &= 0 \\ 6c - d &= 0 \end{aligned}$$

odtud ihned plyne d = 0, c = 0, b = 0, a =0

Vektory **u , v , w , t** jsou lineárně nezávislé.

Všimněme si ještě, že souřadnice vektorů **u , v , w , t** tvoří sloupcové vektory koeficientů u jednotlivých neznámých.

ad b) $\mathbf{u} = (1,1,1,2)$, $\mathbf{v} = (2,3,4,5)$, $\mathbf{w} = (1,0,1,0)$, $\mathbf{t} = (0,3,4,4)$.

Řešení: stejně jako v případě a) položíme

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} + d\mathbf{t} = \mathbf{0} \quad .$$

z tohoto vztahu dostáváme

a. (1,1,1,2) + b. (2,3,4,5) + c. (1,0,1,0) + d. (0,3,4,4) , rozepsáním do složek

$$\begin{aligned} a + 2b + c &= 0 \\ a + 3b + 3d &= 0 \\ a + 4b + c + 4d &= 0 \\ 2a + 5b + 4d &= 0 \end{aligned}$$

a obdobně jako v případě a) dostáváme postupně

$$\begin{aligned} a + 2b + c &= 0 \\ b - c + 3d &= 0 \\ 2b + 4d &= 0 \\ b - 2c + 4d &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a + 2b + c &= 0 \\ b - c + 3d &= 0 \\ 2c - 2d &= 0 \\ -c + d &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a + 2b + c &= 0 \\ b - c + 3d &= 0 \\ c - d &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

odtud plyne, že jednu neznámou můžeme volit libovolně

$d = r$ a ostatní neznámé spočítáme: $c = r$, $b = -2r$, $a = 3r$, kde $r \in \mathbf{R}$

např. pro $r = 1$ dostaneme

$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{t} = \mathbf{0}$

Vektory **u,v,w,t** jsou lineárně závislé.

Po probrání látky o hodnosti matice budeme mít k disposici mnohem efektivnější metodu k rozhodování o lineární nezávislosti či závislosti vektorů. Vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když hodnost matice, jejímiž řádky [respektive sloupci] jsou dané vektory je rovna počtu těchto vektorů.

Hodnost matice.

DSO str. 176 - 184

Elementární řádkové transformace, které nemění hodnost matice jsou:

- libovolná změna pořadí řádků
- násobení kteréhokoliv řádku libovolným číslem různým od nuly
- přičtení libovolného násobku kteréhokoliv řádku k libovolnému nenulovému násobku kteréhokoliv jiného řádku
- vypuštění nulového řádku

Hodnost matice se nemění jejím transponováním.

Elementárními transformacemi lze matici převést na schodovitý tvar.

Hodnost matice, která je ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Příklad 9. Určete řádkovou hodnost matice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Řešení:

Jedná se o příklad 4.5. , DSO str.179 kde napíšeme pro větší přehlednost jenom výsledky jednotlivých úprav.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

h($\mathbf{X}$) = 3

Příklad 10. Určete hodnost matice a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 & 1 & 6 \\ 4 & 12 & -4 & 3 & 14 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení:

$$\text{a)}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 & 1 & 6 \\ 4 & 12 & -4 & 3 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 & 6 \\ 4 & 12 & -4 & 3 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ h(\mathbf{A}) = 4$$

$$\text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

h(**B**) = 2

Příklad 11. Rozhodněte, zda jsou dané vektory lineárně nezávislé či závislé.
a) **u** = (1,1,-1,2) , **v** = (-4,1,1,3) , **w** = (2,-3,1,-1) , **t** = (1,1,1,1)
b) **u** = (1,1,1,2) , **v** = (2,3,4,5) , **w** = (1,0,1,0) , **t** = (0,3,4,4).
Řešení: Jedná se o **Příklad 8** ze strany 15, který nyní budeme řešit pomocí hodnosti matice. Vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když hodnost matice, jejímiž řádky [respektive sloupci] jsou dané vektory je rovna počtu těchto vektorů.

a) vytvoříme matici **A** a převedeme ji na schodovitý tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 11 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

h(**A**) = 4 a vektory **u , v** ,**w , t** jsou lineárně nezávislé

b) vytvoříme matici **B** a převedeme ji na schodovitý tvar

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

h(**B** = 3) a vektory **u , v** ,**w , t** jsou lineárně závislé

Báze a dimenze vektorového prostoru.

DSO str. 184 – 188

Příklad 12. Rozhodněte, zda vektory **u =** (1,0,1,1), **v** = (2,1,-1,-2), **w** = (0,-1,2,3), **t** = (3,0,2,2) tvoří bázi ve V_4 .

Řešení: ve V_4 tvoří bázi každé 4 lineárně nezávislé vektory. Stačí tedy vyšetřit lineární nezávislost daných vektorů.

vytvoříme matici **A** a převedeme ji na schodovitý tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

h(**A**) = 3, vektory jsou lineárně závislé, netvoří tedy bázi. Generují však podprostor $W \subset V_4$,dimW = 3.

Příklad 13. Ve vektorovém prostoru V_4 je podprostor W vytvořen jako lineární obal vektorů **u =** (1,0,0,0), **v** = (1,1,0,1), **w** = (2,-1,0,0), **t** = (1,0,0,-1). Určete jeho bázi a dimenzi. Rozhodněte, zda vektory **a =** (1,-3,0,-5) a **b** = (0,0,1,1) patří do podprostoru W.

Řešení: nejprve zjistíme, zda vektory **u , v** , **w , t** jsou lineárně závislé či nezávislé

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

h(**A**) = 3, dim W = 3 a bázi W tvoří např. vektory **u , v** , **w** nebo vektory (1,0,0,0), (0,1,0,1),(0,0,0,1).

Vektor **a** $\in$ W [respektive **b** $\in$ W] právě tehdy, když je lineární kombinací vektorů báze, tedy když vektory báze a vektor **a** [respektive **b**] jsou lineárně závislé.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, h(**A**) = 3 ,

vektory **u , v** , **w , a** jsou lineárně závislé, tedy **a** $\in$ W.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, h(**B**) = 4,

vektory (1,0,0,0), (0,1,0,1),(0,0,0,1), **b** jsou lineárně nezávislé, tedy **b** $\notin$ W.

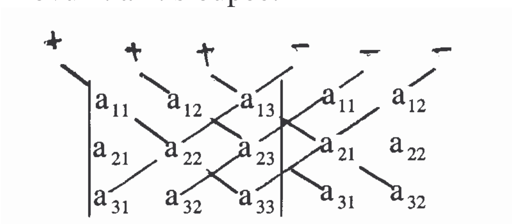
Determinanty.

DSO str.208-238

Sarrusovo pravidlo platí pro výpočet determinantu matice řádu 3. Jeho použití pro determinanty řádu vyššího než 3 je hrubá chyba.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \mathbf{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

vhodná pomůcka pro výpočet podle Sarrusova pravidla je napsat vedle determinantu znovu 1. a 2. sloupec:



bez nároku na striktní matematické vyjadřování lze říct,že sečteme součiny prvků v hlavní diagonále a v diagonálách s ní rovnoběžných a od tohoto součtu odečteme součiny prvků ve vedlejší diagonále a v diagonálách s ní rovnoběžných

Příklad 14. Spočtěte užitím Sarrusova pravidla D = $|\mathbf{A}|$, je-li $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{matrix}$$ a počítáme

D = 1.5.1 + 2.2.(-1) + 3.0.3 – 3.5.(-1) – 1.2.3 – 2.0.1 = 5 – 4 + 15 -6 = 10

Uvažujme čtvercovou matici **A**. Pro její determinant platí:

- determinant z horní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků v její hlavní diagonále
- má-li matice A dva řádky [respektive sloupce] stejné, potom $|\mathbf{A}| = 0$
- jestliže v některém řádku [respektive sloupci] matice jsou samé nuly, pak $|\mathbf{A}| = 0$
- jestliže jeden řádek [respektive jeden sloupec] matice **A** vynásobíme číslem α, potom determinant takto vzniklé matice je roven $\alpha.|\mathbf{A}|$
- vzájemnou výměnou dvou různých řádků [respektive sloupců] matice A se hodnota jejího determinantu změní v opačnou hodnotu
- jestliže k libovolnému řádku [respektive sloupci] přičteme α-násobek jiného řádku [respektive sloupce], hodnota determinantu se nezmění
- transponováním matice se hodnota determinantu nemění

Užitím výše uvedených úprav buďto převedeme matici na horní trojúhelníkový tvar, nebo upravíme matici tak, aby některý sloupec [respektive řádek] obsahoval jediný nenulový prvek a rozvojem determinantu podle tohoto sloupce [respektive řádku] snížíme řád determinantu.

Příklad 15. Spočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení: Jedná se o příklad 5.12., DSO str. 232. Ve skriptech je determinant spočten převedením matice na horní trojúhelníkový tvar.Zde ho spočteme postupným snižováním jeho řádu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & -14 & -28 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} -3 & -4 & 5 \\ -14 & -28 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & 5 \\ 7 & 0 & -32 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2}.(-4).\begin{vmatrix} 7 & -32 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4.(-7+96) = 356$$

Příklad 16. Vypočtěte hodnotu determinantu $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & -2 \\ -3 & -14 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 11 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & -2 \\ -3 & -14 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 11 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 \\ -3 & -14 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & -2 \\ 1 & 11 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 23 & 7 \\ 0 & -4 & -10 & -4 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -\left(-1^{1+1}\right).1.\begin{vmatrix} 1 & 23 & 7 \\ -4 & -10 & -4 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 23 & 7 \\ 0 & 82 & 24 \\ 0 & -137 & -40 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix} 82 & 24 \\ -137 & -40 \end{vmatrix} = -[82.(-40) - 24.(-137)] = 3280 - 3288 = -8$$

Příklad 17. Vypočtěte determinant :

$$\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 26 \\ 42 & 70 & 77 & 27 \\ 43 & 68 & 72 & 26 \\ 29 & 49 & 65 & 25 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 26 \\ 7 & 11 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \\ -6 & -10 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} -6 & -10 & -6 & -1 \\ 7 & 11 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \\ 35 & 59 & 71 & 26 \end{vmatrix} =$$

$$= -2.\begin{vmatrix} -6 & -10 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \\ 35 & 59 & 71 & 26 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} -6 & -4 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 0 \\ 35 & 24 & 71 & 26 \end{vmatrix} = -2.(-1)^{2+1}.1\begin{vmatrix} -4 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 24 & 71 & 26 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 24 & 47 & 26 \end{vmatrix} =$$

$$= 2.(-1)^{2+1}.1.\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 47 & 26 \end{vmatrix} = -2.(-52+47) = 10$$

Příklad 18. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ 1 & 8 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & 10 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & -40 & -16 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & 10 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 7 \\ -40 & -16 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \\ 7 & 1 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 10 & 0 \\ -40 & -16 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \\ 5 & -2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 7 & 1 & 10 & 0 \\ -20 & -8 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \\ 5 & -2 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2.\begin{vmatrix} 7 & 1 & 10 & 0 \\ 36 & 0 & 83 & 5 \\ -19 & 0 & -34 & -2 \\ 19 & 0 & 20 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 36 & 83 & 5 \\ -19 & -34 & -2 \\ 19 & 20 & 7 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} -2 & 15 & 1 \\ -19 & -34 & -2 \\ 19 & 20 & 7 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} -2 & 15 & 1 \\ -23 & -4 & 0 \\ 33 & -85 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-1)^{1+3}.1\begin{vmatrix} -23 & -4 \\ 33 & -85 \end{vmatrix} = -2[-23.(-85) - (-4).33] = -2.(1955 + 132) = -2.2087 = -4174$$

Cramerovo pravidlo.

DSO str.240

Nechť **A** je regulární čtvercová matice řádu n, **b** je n-rozměrný sloupcový vektor a **x** je hledaný n-rozměrný sloupcový vektor. Označme $\mathbf{B}_i$ matici, která vznikne z matice **A** tak, že její i-tý sloupec nahradíme vektorem pravých stran **b.** Potom systém lineárních rovnic **A.x = b** má právě jedno řešení **x** a platí $x_i = \dfrac{|\mathbf{B}_i|}{|\mathbf{A}|}$ pro i = 1,2,…,n.

Příklad 19 . Řešte systém rovnic
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$
užitím Cramerova pravidla.

Řešení:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \\ 3 & 13 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4}.1.\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+2}.5.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5.(2-3) = -5$$

$$x_1=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\begin{vmatrix}6&-2&1&1\\0&3&1&1\\3&6&3&2\\3&9&4&2\end{vmatrix}=-\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix}6&-2&1&1\\-6&5&0&0\\-9&10&1&0\\-9&13&2&0\end{vmatrix}=-\frac{1}{5}\cdot(-1)^{1+4}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}-6&5&0\\-9&10&1\\-9&13&2\end{vmatrix}=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}-6&5&0\\-9&10&1\\9&-7&0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot(-1)^{2+3}.1.\begin{vmatrix}-6&5\\9&-7\end{vmatrix}=-\frac{1}{5}\cdot(42-45)=\frac{3}{5}$$

$$x_3=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\begin{vmatrix}2&-2&6&1\\2&3&0&1\\5&6&3&2\\7&9&3&2\end{vmatrix}=-\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix}2&-2&6&1\\0&5&-6&0\\1&10&-9&0\\3&13&-9&0\end{vmatrix}=-\frac{1}{5}\cdot(-1)^{1+4}.1.\begin{vmatrix}0&5&-6\\1&10&-9\\3&13&-9\end{vmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix}0&5&-6\\1&10&-9\\0&-17&18\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot(-1)^{2+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}5&-6\\-17&18\end{vmatrix}=-\frac{6}{5}\cdot\begin{vmatrix}5&-1\\-17&3\end{vmatrix}=-\frac{6}{5}\cdot(15-17=\frac{12}{5}$$

$$x_4=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\begin{vmatrix}2&-2&1&6\\2&3&1&0\\5&6&3&3\\7&9&4&3\end{vmatrix}=-\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix}2&-2&6&1\\2&3&1&0\\5&6&3&3\\2&3&1&0\end{vmatrix}=0$$, neboť druhý a čtvrtý řádek jsou stejné.

Celkem $x_1=\frac{3}{5}$, $x_2=-\frac{6}{5}$, $x_3=\frac{12}{5}$, $x_4=0$.

Příklad 20. Řešte systém rovnic $\begin{aligned}3x-y+\ \ z&=10\\5x+y+2z&=29\\-4x+y+2z&=2\end{aligned}$ užitím Cramerova pravidla.

Řešení:

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}3&-1&1\\5&1&2\\-4&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&1\\8&0&3\\-1&0&3\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}8&3\\-1&3\end{vmatrix}=24+3=27$$

$$x=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\begin{vmatrix}10&-1&1\\29&1&2\\2&1&2\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\cdot\begin{vmatrix}10&-1&1\\39&0&3\\12&0&3\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\cdot(-1)^{1+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}39&3\\12&3\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\cdot3\cdot3\cdot\begin{vmatrix}13&1\\4&1\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot9=3$$

$$y=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\begin{vmatrix}3&10&1\\5&29&2\\-4&2&2\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\cdot\begin{vmatrix}3&10&1\\-1&9&0\\-10&-18&0\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\cdot(-1)^{1+3}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}-1&9\\-10&-18\end{vmatrix}=\frac{9}{27}\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\-10&-2\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot12=4$$

$$z=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\begin{vmatrix}3&-1&10\\5&1&29\\-4&1&2\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\cdot\begin{vmatrix}10&-1&1\\8&0&39\\-1&0&12\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\cdot(-1)^{1+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}8&39\\-1&12\end{vmatrix}=\frac{3}{27}\cdot\begin{vmatrix}8&13\\-1&4\end{vmatrix}=\frac{45}{9}=5$$

Inverzní matice.

DSO str.244

Nechť **A** = $(a_{i,j})$ pro i= 1,2,…,n , j = 1,2,..n je regulární čtvercová matice. Potom k ní existuje právě jedna inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ = **B** = $(b_{i,j})$, kde i = 1,2,…,n , j = 1,2,…,n a pro její prvky platí $b_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \dfrac{|\mathbf{A}_{j,i}|}{|\mathbf{A}|}$.

Příklad 21. Určete matici inverzní k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **.**

Řešení:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-3)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{-3.(-3)} = 9$$

$$|\mathbf{A}_{1,1}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad |\mathbf{A}_{1,2}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6 \quad , \quad |\mathbf{A}_{1,3}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$|\mathbf{A}_{2,1}| = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6 \quad , \quad |\mathbf{A}_{2,2}| = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7 \quad , \quad |\mathbf{A}_{2,3}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$|\mathbf{A}_{3,1}| = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \quad , \quad |\mathbf{A}_{3,2}| = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17 \quad , \quad |\mathbf{A}_{3,3}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -6 & -7 & 17 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Příklad 22. Určete matici inverzní k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}.1.\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$|\mathbf{A}_{1,1}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad , \quad |\mathbf{A}_{1,2}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \ ,$$

$$|\mathbf{A}_{1,3}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 31 \ , \ |\mathbf{A}_{1,4}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 23$$

$$|\mathbf{A}_{2,1}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad |\mathbf{A}_{2,2}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \ ,$$

$$|\mathbf{A}_{2,3}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 19 \ , \ |\mathbf{A}_{2,4}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

$$|\mathbf{A}_{3,1}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad |\mathbf{A}_{3,2}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

$$|\mathbf{A}_{3,3}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad , \quad |\mathbf{A}_{3,4}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$|\mathbf{A}_{4,1}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad |\mathbf{A}_{4,2}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

$$|\mathbf{A}_{4,3}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad , \quad |\mathbf{A}_{4,4}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 23. Pomocí inverzní matice řešte systém rovnic

$$\begin{array}{l} 2x+z+z=4 \\ x+2y+z=1 \\ x+y+2z=3 \end{array} .$$

Řešení:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A.x = b

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$$

Nejprve najdeme matici inverzní k matici **A**.

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=4$$

$$|\mathbf{A}_{1,1}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\ ,\ |\mathbf{A}_{1,2}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\ ,\ |\mathbf{A}_{1,3}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$|\mathbf{A}_{2,1}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\ ,\ |\mathbf{A}_{2,2}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\ ,\ |\mathbf{A}_{2,3}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$|\mathbf{A}_{3,1}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\ ,\ |\mathbf{A}_{3,2}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\ ,\ |\mathbf{A}_{3,3}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Systém lineárních rovnic.

DSO str.250-264.

Nechť jsou dány systém lineárních rovic **Ax = b** a **Cx=d.**
Řekneme, že tyto dva systémy jsou ekvivalentní, jestliže každé řešení systému prvního systému je i řešením druhého systému a naopak také každé řešení druhého systému je řešením prvního systému.
Matici **A** nazýváme nazýváme maticí systému, matici $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ rozšířenou maticí systému.

Podle Frobeniovy věty má systém řešení právě tehdy když hodnost matice systému a hodnost rozšířené matice jsou si rovny. Je-li h společná hodnota obou hodností a n počet neznámých, potom platí: Je-li h = n , má systém právě jedno řešení, je-li h < n, má systém nekonečně mnoho řešení, závislých na (n-h) parametrech.
Jestliže matice $(\mathbf{C}|\mathbf{d})$ vznikne z matice $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ elementárními řádkovými transformacemi, potom systémy **Ax = b** a **Cx=d** jsou ekvivalentní**.**

Příklad 24. Převedením rozšířené matice systému na schodovitý tvar řešte systém rovnic:

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 1\\
2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 2\\
x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= 3\\
3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 - 8x_5 &= 3
\end{aligned}$$

Řešení: napíšeme rozšířenou matici systému a elementárními řádkovými transformacemi ji převedeme na horní schodovitý tvar. Pokud to lze, do prvního řádku napíšeme koeficienty rovnice, která má u neznámé x_1 koeficient 1 .

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3\\ 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2\\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3\\ 0 & -8 & 4 & -14 & 20 & -8\\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4\\ 0 & -11 & 13 & -20 & 29 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3\\ 0 & -1 & -7 & -1 & 1 & -4\\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4\\ 0 & -11 & 13 & -20 & 29 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3\\ 0 & -1 & -7 & -1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24\\ 0 & 0 & 90 & -9 & 18 & 38 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3\\ 0 & -1 & -7 & -1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 10 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 90 & -9 & 18 & 38 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3\\ 0 & -1 & -7 & -1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 10 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

h(**A**) = 3 , $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 4$, tedy systém rovnic nemá řešeni

Příklad 25. Převedením rozšířené matice systému na schodovitý tvar řešte systém rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= -2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 16 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 &= -18 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= -4 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 16 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & -1 & -18 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 16 \\ 0 & 8 & -7 & 4 & -2 & -48 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 6 & -10 & 7 & -5 & -82 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & -2 & -20 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -7 & 4 & -2 & -48 \\ 0 & 6 & -10 & 7 & -5 & -82 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & -2 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & -5 & -46 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23 & -13 & -46 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right)$$

Tato horní trojúhelníková matice je maticí systému, který je ekvivalentní se zadaným systémem. Její hodnost je 5, rozšířená matice systému má také hodnost 5 a počet neznámých je rovněž 5. Systém má tedy právě jedno řešení.
Napišme takto získaný ekvivalentní systém rovnic.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 16 \\ -x_2 + x_3 &= 6 \\ x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -x_4 &= 2 \\ -13x_5 &= 0 \end{aligned}$$

ze kterého snadno vypočítáme $x_5 = 0$, $x_4 = -2$, $x_3 = 8$, $x_2 = 2$, $x_1 = 2$
a přepsáno vektorově $\mathbf{x} = (2,2,8,-2,0)^T$

Poznamenejme, že tato metoda řešení systému n lineárních rovnic o n neznámých, který má regulární matici převedením matice systému na **horní trojúhelníkovou matici** se nazývá **Gaussova eliminační metoda**. (viz DSO 264)

Pokud matici systému převedeme na **diagonální matici,** jedná se o **Jordanovu eliminační metodu** (viz DSO 266).

Příklad 26. Předchozí příklad nyní vyřešíme Jordanovou eliminační metodou.
Řešení: vyjdeme z horní trojúhelníkové matice, získané při řešení předchozího příkladu a budeme ji dále upravovat.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 16 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Tato rozšířená matice je maticí systému

$$\begin{array}{lllllcr} x_1 & & & & & = & 2 \\ & -x_2 & & & & = & -2 \\ & & x_3 & & & = & 8 \\ & & & -x_4 & & = & 2 \\ & & & & x_5 & = & 0 \end{array}$$

ze kterého ihned dostáváme vektor řešení $\mathbf{x} = (2,2,8,-2,0)^T$

Příklad 27. Převedením rozšířené matice systému na schodovitý tvar řešte systém rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 11 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 11 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & 3 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$, počet neznámých $n = 4$

Systém má nekonečně mnoho řešení, závislých na 4-2 = 2 parametrech.
Budeme tedy řešit následující ekvivalentní systém rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 2 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Neznámé x_3 a x_4 volíme za parametry, položíme tedy $x_3 = c_1$ a $x_4 = c_2$ a dosazením do systému rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 - 4c_1 + 3c_2 \\ x_2 &= -1 - 6c_1 + 5c_2 \end{aligned}$$

Odtud vypočteme $x_1 = 2 - 4c_1 + 3c_2 + 2 + 12c_1 - 10c_2 = 4 + 8c_1 - 7c_2$

tedy celkem

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 4 + 8c_1 - 7c_2 \\ x_2 &= -1 - 6c_1 + 5c_2 \\ x_3 &= c_1 \\ x_4 &= c_2 \end{aligned}\right. \quad , \text{ kde } c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

a ve vektorové notaci

x = $(4,-1,0,0)^T + c_1(8,-6,1,0)^T + c_2(-7,5,0,1)^T$

Homogenní systém lineárních rovnic.

Pokud vektor pravých stran systému lineárních rovnic je nulový, mluvíme o homogenním systému. Je to tedy systém $\mathbf{Ax = 0}$.
Hodnost jeho matice systému a rozšířené matice jsou vždy stejné, homogenní systém má proto vždy řešení. Při převodu matice systému na schodovitý tvar nepíšeme vektor pravých stran, protože přidáním sloupce nul k matici se její hodnost nemění.

Příklad 28. Řešte systém rovnic $\mathbf{Ax = 0}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Za parametry volíme neznámé $x_4 = 7c_1$ a $x_2 = c_2$ a odtud spočteme $x_3 = -5c_1$ a $x_1 = 2c_1 + 2c_2$, ve vektorové notaci:

x = $c_1(2,0,-5,7)^T + c_2(2,1,0,0)^T$

Jordanova metoda výpočtu inverzní matice

DSO str.268

Nechť **A** je regulární matice. Matici **A** převedeme elementárními řádkovými úpravami na jednotkovou matici **E**. Tytéž úpravy převedou jednotkovou matici **E** na matici $\mathbf{A}^{-1}$.
Symbolicky zapsáno: $\left(\mathbf{A}|\mathbf{E}\right) \sim \ldots \sim \left(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}\right)$.

Příklad 29. Jordanovou metodou najděte matici inverzní k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -19 & 5 & 24 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 30. Jordanovou metodou najděte matici inverzní k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -11 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -11 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & -2 & 0 & \frac{17}{18} & -\frac{21}{18} & \frac{11}{18} \\ 0 & 0 & 18 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 0 & \frac{17}{18} & -\frac{21}{18} & \frac{11}{18} \\ 0 & 0 & 18 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{11}{18} & -\frac{3}{18} & \frac{5}{18} \\ 0 & -2 & 0 & \frac{17}{18} & -\frac{21}{18} & \frac{11}{18} \\ 0 & 0 & 18 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{36} & -\frac{3}{36} & \frac{5}{36} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{36} & \frac{21}{36} & -\frac{11}{36} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{18} & \frac{3}{18} & \frac{1}{18} \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory matice.

DSO str.284

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n a M množina všech sloupcových vektorů o n složkách. Je-li $\mathbf{x} \in M$, je též $\mathbf{Ax} \in M$. Říkáme, že matice $\mathbf{A}$ zobrazuje množinu M do sebe. Naskýtá se otázka, zda existuje vektor $\mathbf{x} \in M$, který se maticí $\mathbf{A}$ zobrazí na vektor $\lambda\mathbf{x}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbf{R}$, tedy zda platí $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Číslo $\tilde{\lambda}$, vyhovující této podmínce se nazývá ***vlastním číslem matice*** $\mathbf{A}$ a vektor $\tilde{\mathbf{x}}$ pro který platí $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{x}}$ ***vlastním vektorem,příslušným k vlastnímu číslu*** $\tilde{\lambda}$.

Vztah $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ upravíme na tvar $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tento homogenní systém rovnic má nenulové řešení právě když je jeho determinant roven 0.

Rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, kde λ je obecně komplexní proměnná , se nazývá ***charakteristickou rovnicí matice*** **A .** Číslo $\tilde{\lambda}$ je vlastním číslem matice **A,** právě když je kořenem charakteristické rovnice**.** Každý vektor $\tilde{\mathbf{x}}$ vyhovující systému lineárních rovnic $(\mathbf{A} - \tilde{\lambda}\mathbf{E})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ je vlastním vektorem matice **A**, příslušným k vlastnímu číslu $\tilde{\lambda}$.

Příklad 31. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$**.**

Řešení: charakteristická rovnice je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 3 \\ -1 & 8-\lambda & 6 \\ 2 & -14 & -10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ .Výpočtem determinantu dostáváme:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 3 \\ -1 & 8-\lambda & 6 \\ 2 & -14 & -10-\lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 8-\lambda & 6 \\ -\lambda & 3 & 3 \\ 2 & -14 & -10-\lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 8-\lambda & 6 \\ 0 & \lambda^2-8\lambda+3 & 3-6\lambda \\ 0 & 2-2\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2-8\lambda+3 & 3-6\lambda \\ 2-2\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2-8\lambda+3)(2-\lambda)-(3-6\lambda)(2-2\lambda) = -\lambda^3+8\lambda^2-3\lambda+2\lambda^2-16\lambda+6-12\lambda^2+6\lambda+12\lambda-6 =$$
$$= -\lambda^3-2\lambda^2-\lambda = -\lambda(\lambda+1)^2$$

Řešením rovnice $-\lambda(\lambda+1)^2 = 0$ dostáváme vlastní čísla $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -1$.
Nyní vypočítáme jim odpovídající vlastní vektory.

Pro $\lambda_1 = 0$ dostáváme homogenní systém rovnic o matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 8 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, příslušný ekvivalentní systém rovnic je

$$\begin{aligned} -x_1+8x_2+6x_3 &= 0 \\ x_2+x_3 &= 0 \end{aligned}$$ zde volíme $x_3 = c_1$ a vypočteme $x_2 = -c_1$, $x_1 = -8c_1+6c_1 = -2c_1$

Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ odpovídají vlastní vektory $c_1(-2,-1,1)^T$.

Pro $\lambda_2 = -1$ dostáváme homogenní systém rovnic o matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 9 \\ 0 & -20 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, příslušný ekvivalentní systém rovnice je

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+3x_3 &= 0 \\ 4x_2+3x_3 &= 0 \end{aligned}$$ zde volíme $x_3 = 4c_2$ a vypočteme $x_2 = -3c_2$ a $x_1 = 9c_2-12c_2 = -3c_2$

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = -1$ odpovídají vlastní vektory $c_2(-3,-3,4)^T$.

Příklad 32. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice **A =** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení: charakteristická rovnice je

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - \lambda + 4 - 6 = 0 \qquad \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$$

Pro $\lambda_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}$ dostáváme homogenní systém rovnic

$$\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)x_1 \qquad + \; 2x_2 = 0$$

$$3x_1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)x_2 = 0$$ první rovnici násobíme výrazem $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)$ a dostaneme

$-\left(\frac{9}{4} - \frac{33}{4}\right)x_1 + (3-\sqrt{33})x_2 = 0$, tedy $6x_1 + \left(3 - \sqrt{33}\right)x_2 = 0$, což je dvojnásobek druhé rovnice,

volíme $x_1 = \left(3 - \sqrt{33}\right)c_1$

a vypočteme odtud $x_2 = -6c_1$

Pro $\lambda_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}$ dostáváme homogenní systém rovnic

$$\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\right)x_1 \qquad + \; 2x_2 = 0$$

$$3x_1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\right)x_2 = 0$$ první rovnici násobíme výrazem $\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\right)$ a dostaneme

$\left(-\frac{9}{4} + \frac{33}{4}\right)x_1 + (3+\sqrt{33})x_2 = 0$ tedy $6x_1 + \left(3 + \sqrt{33}\right)x_2 = 0$, což je dvojnásobek druhé rovnice,

volíme $x_1 = \left(3 + \sqrt{33}\right)c2$

a vypočteme odtud $x_2 = -6c_2$

Vlastnímu číslu $\lambda_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}$ odpovídají vlastní vektory $c_1\left(3 - \sqrt{33}, -6\right)^T$,

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}$ odpovídají vlastní vektory $c_2\left(3 + \sqrt{33}, -6\right)^T$.

Poznámka k systémům lineárních rovnice.

Nechť je dán systém m lineárních rovnic o n neznámých

$$\text{(S)} \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad .$$

S tímto systémem uvažujme i homogenní systém

$$\text{(S*)} \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \quad .$$

Každé řešení **v** systému (S) lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{u} \quad ,$$

kde **p** je libovolné řešení systému (S), tzv. ***partikulární řešení***
a **u** je obecné řešení přidruženého systému (S*) .

Vraťme se k příkladu 27na str. 29, to je k příkladu

Převedením rozšířené matice systému na schodovitý tvar řešte systém rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 11 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Tento příklad má řešení

$$\mathbf{x} = (4,-1,0,0)^T + c_1(8,-6,1,0)^T + c_2(-7,5,0,1)^T$$

vektor $\mathbf{p} = (4,-1,0,0)^T$ je partikulární řešení nehomogenního systému,

každý z vektorů $\mathbf{u_1} = (8,-6,1,0)^T$ a $\mathbf{u_2} = (-7,5,0,1)^T$ je řešením přidruženého homogenního systému

a vektor $\mathbf{u} = c_1(8,-6,1,0)^T + c_2(-7,5,0,1)^T$ je obecné řešení přidruženého systému.

Stabilita řešení systémů lineárních rovnic.

Nechť je dán systém lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Řešení systému budeme považovat za ***stabilní*** , když malá změna dat na vstupu (to je malá změna prvků matice **A** nebo malá změna pravé strany **b**) povede k malé změně dat na výstupu, to je k malé změně řešení **x.** V opačném případě řekneme, že řešení je ***nestabilní.*** Má-li soustava nestabilní řešení, říkáme také že soustava, respektive její matice je ***špatně podmíněná.***

Příklad 33.
V jistém podniku jsou dvě oddělení. V prvním pracuje 101 žen a 10 mužů, ve druhém 10 žen a 1 muž. První oddělení dostane za časovou jednotku 111 kč, druhé oddělení 11 Kč. Ptáme se, jaká je mzda ženy a jaká je mzda muže za časovou jednotku.
Označíme-li mzdu ženy x a mzdu muže y, vede úloha na systém rovnic

$$\begin{aligned} 101x + 10y &= 111 \\ 10x + y &= 11 \end{aligned}$$

který má zřejmě řešení $x = 1$, $y = 1$.

Vedoucí se rozhodl druhému oddělení přidat a zvýšil částku na 11,10 Kč.
Systém rovnic je nyní tvaru

$$101x + 10y = 111$$
$$10x + y = 11{,}1$$

a má zřejmě řešení $x = 0$, $y = 11{,}1$.
Malá změna pravé strany vedla k velké změně řešení. Jedná se o špatně podmíněnou soustavu.

Příklad 34.

Uvažujme nyní soustavu

$$2x + y = 2 \qquad (r_1)$$
$$2x + 1{,}001y = 1{,}8 \qquad (r_2)$$

Tato soustava má zřejmě jediné řešení $x = 101$, $y = -200$.
Zmenšením koeficientu u y ve druhé rovnici o 0,002 tj. o méně než 0,2% dostaneme soustavu

$$2x + y = 2$$
$$2x + 0{,}999y = 1{,}8 \quad ,$$

Tato soustava má jediné řešení $x = -99$, $y = 200$, které se naprosto liší od řešení původní soustavy. Řešení je tedy nestabilní a soustava je špatně podmíněná.

Příklad 35.

Nahraďme nyní soustavu (r_1), (r_2) z příkladu 34ekvivalentní soustavou

$$3010\,r_1 - 3000\,r_2$$

$-996\,r_1 + 1000\,r_2$. Dostaneme soustavu

$$20x + 7y = 620$$
$$8x + 5y = -192,$$

která má řešení $x = 101$, $y = -200$.

Zmenšíme-li koeficient u y ve druhé rovnici o 0,1, tj, o 0,2%, dostaneme soustavu

$$20x + 7y = 620$$
$$8x + 4{,}9y = -192 .$$

Ta má řešení $x= 104{,}3$, $y = -209{,}5$, které je stabilnější, než řešení původní soustavy.

Vzorová písemná část zkoušky z matematiky A.

1. Řešte v **R** nerovnici $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| \leq 3$.

2. Vypočtěte

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T$$

3. Podprostor W ve V_4 je generován vektory **u** = (1,2,4,-3), **v** = (2,3,2,-1) a **w** = (1,0,-8,7). Určete jeho dimenzi a některou z jeho bází. Rozhodněte, zda vektor **t** = (3,8,24,-9) patří do podprostoru W.

4. Spočítejte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Gaussovou eliminační metodou řešte systém rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 &= -1 \\ 4x_1 + 11x_2 + 13x_3 + 14x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 11x_4 &= -1 \end{aligned}.$$

6. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení písemné části zkoušky z matematiky A (KMMATA)

1. Řešte v **R** nerovnici $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \le 3$

Řešení: podmínka: $x \ne -1$

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \le 3 \quad \Big|\cdot |x+1| > 0$$

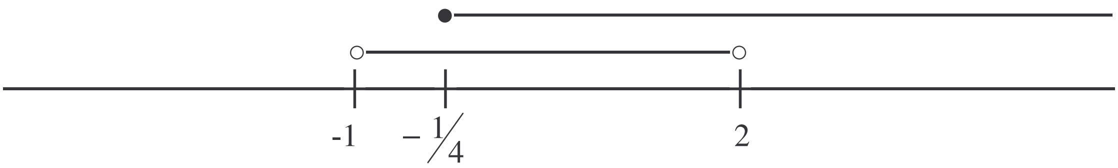
$$|x-2| \le 3 \cdot |x+1|$$

$x-2$	-	-	+
$x+1$	-	+	+

a) $x < -1$: $-x + 2 \le -3x + -3 \Rightarrow 2x \le -5 \Rightarrow x \le \frac{-5}{2}$

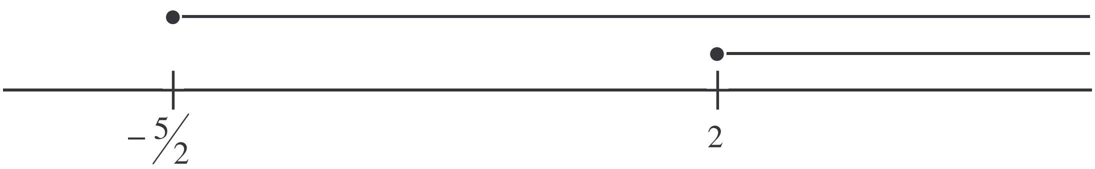
 $x \in (-\infty; -\frac{5}{2} >$

b) $-1 < x < 2$: $-x + 2 \le 3x + 3 \Leftrightarrow 4x \ge -1 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{4}$



 $x \in < -\frac{1}{4}; 2)$

c) $x \ge 2$: $x - 2 \le 3x + 3 \Leftrightarrow 2x \ge -5 \Leftrightarrow x \ge -\frac{5}{2}$



$x \in < 2; \infty)$ 

Závěr: $x \in (-\infty; -\frac{5}{2} > \cup < -\frac{1}{4}; \infty)$

2. Vypočtěte

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{T}$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

---

3. Podprostor W ve V_4 je generován vektory **u** = (1,2,4,-3), **v** = (2,3,2,-1) a **w** = (1,0,-8,7). Určete jeho dimenzi a některou z jeho bází. Rozhodněte, zda vektor **t** = (3,8,24,-9) patří do podprostoru W.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim W = 2, \text{ báze např. } \mathbf{u},\mathbf{v}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 3 & 8 & 24 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 2 & 12 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \mathbf{t} \notin W$$

---

4. Spočítejte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Řešení:

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 7 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 8 = -2$$

---

5. Gaussovou eliminační metodou řešte systém rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + \ 3x_2 + 4x_3 + \ 3x_4 &= \ 0 \\ 2x_1 + \ 5x_2 + 5x_3 + \ 8x_4 &= -1 \\ 4x_1 + 11x_2 + 13x_3 + 14x_4 &= -1 \\ 3x_1 + \ 8x_2 + \ 9x_3 + 11x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 8 & -1 \\ 4 & 11 & 13 & 14 & -1 \\ 3 & 8 & 9 & 11 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = r$, $x_4 = s$, $x_2 = 1 - 3r + 2s$, $x_1 = -3 + 9r - 6s - 4r - 3s = -3 + 5r - 9s$

zapsáno vektorově:

$\mathbf{x} = (-3,1,0,0)^T + r \cdot (5,-3,1,0)^T + s \cdot (-9,2,0,1)^T$

6.Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Pro $\lambda_1 = 3$: $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 \qquad &= 0 \\ 2x_1 + \ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ $x_2 = c$, $x_1 = 2c$, $x_3 = 5c$.

Pro $\lambda_2 = 1$: $\begin{aligned} 2x_1 \qquad &= 0 \\ x_1 \qquad &= 0 \\ 2x \ + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_3 = c$, $x_2 = -c$.

Pro $\lambda_3 = 2$: $\begin{aligned} x_1 \qquad &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$,. $x_3 = c$.

Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$ přísluší vlastní vektor $(2,1,5)^T$,
vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ přísluší vlastní vektor $(0,-1,1)^T$,
vlastnímu číslu $\lambda_3 = 2$ přísluší vlastní vektor $(0,0,1)^T$.
