# Početní základy finanční matematiky

*sylabus 1. přednášky*

(5.4)

19. 9. 2005

# 1 Matematické základy

## 1.1 Řady

Poznámka: Je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost čísel, pak z této posloupnosti lze vytvořit novou posloupnost $(S_n)_{n=1}{}^{\infty}$, následujícím rekurentním předpisem: $s_1 = a_1 s_n = s_{n-1} + a_n$ , nebo též předpisem $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

1.1.0.1 Posloupnost $s_n$budeme nazývat posloupnost částečných součtů řady Jestliže posloupnost částečných součtů řady $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje (tj. existuje vlastní limita posloupnosti $s_n$), nazýváme řadu $\sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergentní

1.1.0.2 **Definice:** Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. *Řada* $\widetilde{\sum}_{n=1}^{\infty} a_n$ je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, taková, že $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $s_2 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,... tj.:

1.1.0.2.1
$$\widetilde{\sum}_{n=1}^{\infty} a_n = (\sum_{i=1}^{j}(a_i))_{j=1}^{\infty}$$

Pokud posloupnost na levé straně 1.1.0.2.1 konverguje, nazveme její limitu *součet řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1^j} (a_i))$$

1.1.0.3 **Poznámka:** Z historických důvodů se řada a její součet značí stejně, takže se symbol $\widetilde{\sum}$ nepoužívá a místo něj se používá symbol $\sum$. Nerozlišuje se tedy *posloupnost částečných součtů* $(\sum_{i=1}^{j}(a_i))_{j=1}^{\infty} = (s_n)_{n=1}^{\infty}$, $(s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ldots)$ a její limita, která však ne vždy existuje. Pokud existuje a je vlastní ($\in \mathbb{R}$) říká se o řadě, že je konvergentní, nebo že *konverguje*. Pokud tato limita existuje a je nevlastní ($= \pm\infty$), říká se, že řada *diverguje*. Pokud tato limita neexistuje, říká se, že ona řada *osciluje*.

### 1.1.1 Mocninné řady a exponenciální funkce

1.1.1.1 **Definice:**

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{1}{2}\cdot z^2 + \frac{1}{6}\cdot z^3 + \frac{1}{24}\cdot z^4 + \frac{1}{120}\cdot z^5 + \cdots$$

a odtud můžeme určit hodnotu eulerovy

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

1.1.1.2 Vidíme, že $\exp' = \exp$.

1.1.1.3 **Věta:** (Cauchy) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolutně konvergují. Pak konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$$

1.1.1.4 **Poznámka:**

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \ldots + b_n + \ldots) =$$
$$= \begin{array}{cccccccccc} & a_0\,b_0 & + & a_1\,b_0 & + & a_2\,b_0 & + & a_3\,b_0 & + & \ldots \\ + & a_0\,b_1 & + & a_1\,b_1 & + & a_2\,b_1 & + & a_3\,b_1 & + & \ldots \\ + & a_0\,b_2 & + & a_1\,b_2 & + & a_2\,b_2 & + & a_3\,b_2 & + & \ldots \\ + & a_0\,b_3 & + & a_1\,b_3 & + & a_2\,b_3 & + & a_3\,b_3 & + & \ldots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

1.1.1.5 **Důsledek:** $\exp(z_1+z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=\exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$

1.1.1.6 Předpokládejme $x\in\mathbb{R}$, $i$ je imaginární jednotka. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}1+\mathrm{i}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{6}\cdot\mathrm{i}\cdot x^3+\frac{1}{24}\cdot x^4+\frac{1}{120}\cdot\mathrm{i}\cdot x^5-\frac{1}{720}\cdot x^6-\frac{1}{5040}\cdot\mathrm{i}\cdot x^7+\cdots$$

1.1.1.7 A definujeme

$$\cos(x)=\Re\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)=1-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{24}\cdot x^4-\frac{1}{720}\cdot x^6+\cdots$$

1.1.1.8

$$\sin(x)=Im\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)=x-\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{120}\cdot x^5-\frac{1}{5040}\cdot x^7+\cdots$$

1.1.1.9 Platí tedy

$$e^{\mathrm{i}x}=\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)$$

a

$$i\cdot e^{\mathrm{i}x}=\left(e^{\mathrm{i}x}\right)'=(\cos(x)+i\sin(x))'=\cos'(x)+i\cdot\sin'(x)$$

ale také

$$i\cdot e^{\mathrm{i}x}=i(\cos(x)+i\sin(x))'=i\cos(x)-\sin(x)=-\sin(x)+i\cos(x)$$

odtud plyne:

$$\cos'=-\sin$$
$$\sin'=\cos$$

1.1.1.10 **Definice:** Funkce $\exp$ je na R prostá. Definujeme funkci logaritmus $\ln\colon\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ Jako funkci k ní inverzní. Tedy $\ln$ je na $\mathbb{R}^+$ jednoznačně definován těmito rovnicemi:

$$\ln\circ\exp=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}},\text{ tedy }\forall x\in\mathbb{R}\colon\ln(e^x)=x$$
$$\exp\circ\ln=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}+},\text{ tedy }\forall x\in\mathbb{R}^+\colon e^{\ln(x)=x}$$

1.1.1.11 Definujeme dále $\exp_z=x\mapsto\exp(\ln(z)\cdot x)$ (tj. $z^x=z^{\ln(z)\cdot x}$) a $\log_z=exp_z^{-1}$. Tedy $\exp=\exp_e$.

## 1.1.2 Pravidla pro počítání s logaritmem a mocninami

1.1.2.1 Platí

$$\exp(\ln(x)+\ln(y))\overset{1.1.1.5}{=}\exp(\ln(x)\cdot\exp(\ln(y))=x\cdot y=\exp(\ln(x\cdot y))$$

a pokud na obě strany rovnice aplikujeme funkci $\ln$ dostaneme

$$\boxed{\ln(x)+\ln(y)=\ln(x\cdot y)}$$

1.1.2.2 Dále platí

$$\exp_a(x)\cdot\exp_b(x)=\exp(\ln(a)\cdot x)\cdot\exp(\ln(b)\cdot x)\overset{1.1.1.5}{=}\exp(x(\ln(a)+\ln(b))\overset{1.1.2.1}{=}=\exp_{a\cdot b}(x)$$

a tedy

$$\boxed{a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x}$$

1.1.2.3 Přímým dosazením do 1.1.1.1 dostaneme

$$\exp(0) = 1$$

a dále s použitím 1.1.1.5

$$\exp(-x) + \exp(x) = \exp(0) = 1 \Longrightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$a^{-x} = e^{-x\cdot\log(a)} = \frac{1}{e^{x\cdot\log(a)}} = \frac{1}{a^x}$$

a protože podle 1.1.2.2 platí

$$\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

máme

$$\boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x}.$$

1.1.2.4 Dále

$$\left(e^{\ln(z)}\right)^x = z^x \overset{1.1.1.11}{=} e^{x\cdot\ln(z)}$$

a tedy pro každou kladnou konstantu $y$ ($y = \ln(z)$) máme

$$\boxed{(e^y)^x = e^{xy}.}$$

tento vztah platí ale i pro záporná $y$, protože

$$e^{yx} = \frac{1}{e^{-yx}} \overset{1.1.2.3}{=} \left(\frac{1}{e}\right)^{-yx} \overset{-y>0}{=} \left(\left(\frac{1}{e}\right)^{-y}\right)^x \overset{1.1.2.3}{=} \left(e^{-y}\right)^x$$

1.1.2.5 Dále

$$\exp_w(\log_z(x)\cdot\log_w(z)) = \left(w^{\log_w(z)}\right)^{ln_z(x)} = z^{\log_z(x)} = x = \exp_w(\log_w(x))$$

a pokud obě strany rovnosti zobrazíme funkcí $\log_w$ dostaneme

$$\log_z(x)\cdot\log_w(z) = \log_w(x)$$

a tedy

$$\boxed{\log_z(x) = \frac{\log_w(x)}{\log_w(z)} = \frac{\ln(x)}{\ln(z)}}$$

nadto pro inverzní funkci platí (pokud označíme $h_r$ homotetii $h\colon x \mapsto r\cdot x$)

$$\exp_w = \log_w^{-1} = (h_{\log_w(z)}\circ\log_z)^{-1} = \ln_z^{-1}\circ h_{\log_w(z)}^{-1} = \exp_z\circ h_{1/\log_w(z)}$$

protože $h_r^{-1} = h_{1/r}$, a tedy

$$w^x = z^{\frac{x}{\log_w(z)}}.$$

Za povšimnutí rovněž stojí, že

$$\log_z(w) = \frac{\ln(z)}{\ln(w)} = \frac{1}{\log_w(z)}$$

1.1.2.6 **Cvičení:** Ze vztahu 1.1.2.4 tj. $(\exp(a))^b = \exp(a \cdot b)$ vyvoďte:

$$\boxed{\ln(a^b) = b\ln(a)}$$

1.1.2.7 **Cvičení:** Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí

1.1.2.7.1 • $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto x^4$, $x \mapsto 4^x$

1.1.2.7.2 • $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 2x^2 + 1$, $x \mapsto -x^2$

1.1.2.7.3 • $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 3^x$, $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1.1.2.7.4 • $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 2^{-x}$, $x \mapsto -2^x$, $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1.1.2.7.5 • $x \mapsto \log_2(x)$, $x \mapsto \log_3(x)$, $x \mapsto \ln_{\frac{1}{2}}(x)$

1.1.2.7.6 • $x \mapsto 2^x$,$x \mapsto \log_2 x$,$x \mapsto 4^x$,$x \mapsto x^4$,

1.1.2.7.7 • $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 + 1$, $x \mapsto (x+2)^2$

1.1.2.7.8 • $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 2x^2 + 1$, $x \mapsto -x^2$

1.1.2.7.9 • $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 3^x$, $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1.1.2.7.10 • $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 2^{-x}$, $x \mapsto -2^x$, $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1.1.2.7.11 • $x \mapsto \ln_2(x)$, $x \mapsto \ln_3(x)$

1.1.2.7.12 • . Grafy popište!

1.1.2.8 **Cvičení:** Najděte všechna řešení rovnic $2^{x+1} = 7, 3^{x+2} = 6, 3 \cdot 2^{x-1} = 2, \log_3(x) = 5, \log_{25}(x) = \frac{1}{2}, 2^x = \ln 2.$

1.1.2.9 **Cvičení:** $\mathrm{id}^n \colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{cases}$ Učete hodnotu funkce

$$\mathrm{Id}^3 \circ \ln \circ \mathrm{Id}^2$$

v bodě $e$.

1.1.2.10 **Příklad:** Najděte všechny lokální extrémy funkce $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ a určete je.

1.1.2.11 *Řešení:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) &= -\frac{-1+\ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e \\ \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) &= \frac{-3+2\,\ln(x)}{x^3} \\ 0 > -e^{-3} &= \left.\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right|_{x=e} \end{aligned}$$

tj. zadaná funkce má v bodě $e$ lokální maximum.

# 2 Relativní a absolutní hodnota

*Učitel matematiky vyvolá kloučka v poslední lavici: „Abi, co jsou to čtyři procenta?“*

*Abi potřese hlavou: „No jo, pane učieli, co jsou to čtyři procenta!?“*

Josef Kalenský: Hrách v botě: Židovské anekdoty 1. vydání, Praha, Grafoprint-Neubert, 1993 ISBN 80-857885-12-9

## 2.1 Příklad

Uvažujme tři různé obchodované komodity po dobu alespoň $\langle 0, 5\rangle$, kde čas je měřen v nějaké vhodné jednotce. $i$-tá komodita, $i = 1, 2, 3$ se obchoduje v okamžiku $t = 1, 2, 3, 4, 5$ v kurzu

$$(i,t) \mapsto \left| 2\, i^3 + 5\, i^2 \sin\left(\frac{it}{6}\right) \right| + 1$$

tedy

| **Okamžik** | **Kurz komodity** | | |
|---|---|---|---|
| | **1.** | **2.** | **3.** |
| 0 | 3 | 17 | 55 |
| 1 | 3,83 | 23,6 | 76,6 |
| 2 | 4,64 | 29,4 | 92,9 |
| 3 | 5,40 | 33,8 | 99,9 |
| 4 | 6,10 | 36,4 | 95,9 |
| 5 | 6,70 | 36,9 | 81,9 |

Kurz komodity je číslo, ale můžeme předpokládat, že to je veličina, která má rozměr $\frac{\text{měna}}{\text{jednotka množství}}$. Množství se může ovšem u každé komodity měřit jínak (jednou objem, jednou hmotnost, jednou třeba počet zrnek), zatímco měna zůstává konstantní.

2.1.0.1 Předpokládáme, že komodity jsou libovolně dělitelné a že zásoby jsou neomezené, tj. že můžeme nakoupit jakékoliv množství jakékoliv komoditz. Otázka je, kterou komoditu je v tom kterém okamžiku výhodné podržet.

2.1.0.2 Znalost kursu nám v rozhodování nepomůže. Důležité je, jak se budou kurzy měnit. Podržíme-li komodity, jejichž kurzy rostou, vyděláme. Podržíme-li komodity, jejichž kurzy klesají, proděláme. Předpokládejme, že chceme vydělat co nejvíce. Spočítáme o kolik se změní kury každé komodity do následujícího okamžiku (tedy v okamžiku $t$ určíme hodnotu $\kappa(i, t + 1) - \kappa(i, t)$)

2.1.0.3

| **Okamžik** | **Změna kurzu komodity za nejbližší období** | | |
|---|---|---|---|
| | **1.** | **2.** | **3.** |
| 0 | 0,83 | 6,6 | 21,6 |
| 1 | 0,81 | 5,8 | 16,3 |
| 2 | 0,76 | 4,4 | 7,0 |
| 3 | 0,70 | 2,6 | -4,0 |
| 4 | 0,60 | ,5 | -14,0 |
| 5 | 0,51 | -1,7 | -20,6 |

Stanovili jsme přírůstek kurzu na jednotku množství komodity, ale nás by spíš zajímal relativní přírůstek kurzu, přírůstek kurzu na jednotku investovaného kapitálu.

$$\frac{\kappa(j, i+1) - \kappa(j, i)}{\kappa(j, i)}$$

| Okamžik | **Relativní přírůstky kurzů** | | |
|---|---|---|---|
| | **1.** | **2.** | **3.** |
| 0 | 0,276 | 0,388 | 0,393 |
| 1 | 0,211 | 0,246 | 0,213 |
| 2 | 0,164 | 0,150 | 0,0753 |
| 3 | 0,130 | 0,0799 | -0,0400 |
| 4 | 0,100 | 0,0110 | -0,149 |
| 5 | 0,0745 | -0,0461 | -0,248 |

Poslední tabulka je pro obchodovaní směrodatná. Předpokládejme, že máme v okamžiku $0$ kapitál velikosti $100$. Ten investujeme v každém okamžiku $t = 1, 2, 3, 4$ do nějaké komodity a v následujícím okamžiku zase komoditu prodáme a tím kapitál zhodnotíme. Nejvýhodnější strategie je tato:

2.1.0.3.1 • v čase $0$ kupujeme $1.81818181818$ jednotek komodity číslo $3$ a tak v čase $1$ budeme mít kapitál velikosti $139.225725886$.

2.1.0.3.2 • v čase $1$ kupujeme $5.91345366510$ jednotek komodity číslo $2$ a tak v čase $2$ budeme mít kapitál velikosti $173.662735874$.

2.1.0.3.3 • v čase $2$ kupueme $37.459820785$ jednotek komodity číslo $1$ a tak v čase $3$ budeme mít kapitál velikosti $202.175436134$.

2.1.0.3.4 • v čase $3$ kupujeme $37.459820785$ jednotek komodity číslo $1$ a tak v čase $4$ budeme mít kapitál velikosti $228.199572364$.

2.1.0.3.5 • v čase $4$ kupujeme $37.459820785$ jednotek komodity číslo $1$ a tak v čase $5$ budeme mít kapitál velikosti $251.013923705$. V okamžicích $3$ a $4$ nemusíme chodit na trh, stačí stále držet komoditu číslo $1$. Tedy nakoupíme komoditu číslo 3 tu prodáme v čase 1 a koupíme komoditu číslo 2, tu prodáme v čase 2 a koupíme komoditu číslo 1 a tu podržíme do okamžiku 5.

2.1.0.4 **Poznámka:** Kdybychom mohli obchodovat komodity v každém okamžiku, bylo by pro nás nejvýhodnější nakoupit třetí a podržet ji až do okamžiku, který je řešením rovnice:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}\,\kappa(2,\,t)}{\kappa(2,\,t)} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}\,\kappa(3,\,t)}{\kappa(3,\,t)}$$

a to je okamžik

$$T1 := 0{,}705050758054.$$

Pak je prodat a nakoupit druhou komoditu a tu podržet až do okamžiku, který je řešením rovnice (v Maple jej určíme příkazem fsolve):

$$\mathit{T2} := \mathrm{fsolve}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}\,\kappa(1,\,t)}{\kappa(1,\,t)} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}\,\kappa(2,\,t)}{\kappa(2,\,t)}\right)$$

a to je okamžik

$$T2 := 2{,}21738435914$$

a pak koupit první komoditu, (takový případ podrobně rozebereme později) Proto držíme vždy tu komoditu, pro kterou je hodnota podílu $\frac{\frac{\partial}{\partial t}\,\kappa(i,\,t)}{\kappa(i,\,t)}$ největší. Je-li

$$\mathrm{Vynosnost}\colon (i,\ \mathit{t1},\ \mathit{t2}) \to \frac{\kappa(i,\ \mathit{t2})}{\kappa(i,\ \mathit{t1})}$$

je stav kapitálu roven

$$100 \cdot \mathrm{Vynosnost}(3, 0, T1) \cdot \mathrm{Vynosnost}(2, T1, T2)) \cdot \mathrm{Vynosnost}(1, T2, 5) = 251{,}599979784$$

# 3 Ustálený stav (Steady state)

## 3.1 Exponenciální funkce

### 3.1.1 Definice

3.1.1.1 **Poznámka:** Funkce, která má v každém bodě stejnou derivaci jako hodnotu je až na násobek funkce exp, tj. Všechna řešení rovnice

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \phi(x)$$

jsou funkce ve tvaru

$$\phi\colon x \mapsto e^x \cdot c_1$$

kde $c_1$ je nějaká konstanta. Jsou to funkce které mají v každém bodě — ve kterém existuje — stejný poměr derivace a hodnoty a tento poměr je 1, neboli jsou to funkce, které mají stejnou relativní hodnotu derivace vyjádřenou v hodnotách funkce jako v jednotkách (a to rovnu jedné).

3.1.1.2 Kdybychom hledali všechny funkce, které mají konstantní poměr derivace a hodnoty (už by ta konstanta nemusela být 1), hledali bychom řešení rovnic:

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = K\phi(x)$$

pro všechny konstanty $K$ a ta jsou:

$$\phi(x) = e^{Kx}c_2$$

kde $c_1$ je libovolná konstanta.

3.1.1.3 **Definice:** *Exponenciání funkce* nazveme každou funkci

$$x \mapsto Ae^{Bx},$$

kde $A$ a $B$ jsou nějaké konstanty.

3.1.1.4 **Definice:** : Řekneme, že veličina $F$ závislá na čase je v ustáleném stavu (v čase), pokud její hodnota je exponenciální funkcí času.

3.1.1.5 **Poznámka:** Hodnoty exponencialni funkce $\phi$ v ekvidistantních okamžicích, tj. čísla $\phi(x_0)$, $\phi(x_0 + k)$, $\phi(x_0 + 2k)$, $\phi(x_0 + 3k)$,. . . , kde $k > 0$ tvoří geometrickou posloupnost. Kvocient této posloupnosti použijeme jako míru růstu $\phi$).

## 3.2 Míra růstu veličin v ustáleném stavu. Míra růstu inflace, jako příklad.

### 3.2.1 Reálná a nominální a hodnota

*Cynic is a man, who knows the price of everything and the value of nothing.*

*Oscar Wilde*

Agregace je seskupení (z lat a- a grex, gen gregio =stádo).

3.2.1.1 Uvažujme zboží jako agregát a nějakou jeho míru objemu. Uvažujme nějakou měnu jako jednotku množství peněz.

3.2.1.2 Cena jednotky množství zboží se mění v čase.

3.2.1.3 Index cen je cena jednotkového množství agregovaného zboží. Protože jednotka množství zboží není dobře definovaná veličina, na počátku našich úvah nějakou zvolíme, lze ji zvolit například tak, aby v počátku (v čase $t = 0$) byla cena jednotkového množství zboží 100, což se často dělá.

3.2.1.4 Pokud je inflace, cena zboží roste, a tedy cena peněz klesá. Peníze jsou ekvivalentem cen bohužel závislým na čase. Pomocí peněz lze porovnávat ceny platné pouze v tomtéž okamžiku. Pokud porovnáváme cenu zboží v jednom okamžiku s cenou jiného zboží v jiném okamžiku nejsou peníze vhodným ekvivalentem.

3.2.1.5 A pokud je jako ekvivalent cen použijeme, jsme v situaci krejčího, kterému se prodlužuje metr a který, když šije oblek, musí znát nejen míry zákazníka, ale i to, kdy je měřil, aby je mohl správně přepočítat.

3.2.1.6 Cena vyjádřená v jednotkách nějaké měny se nazývá jmenovitá, nebo nominální cena (hodnota). Cena vyjádřená v jednotkách nějakého množství agregovaného zboží se nazývá reálná cena (hodnota).

3.2.1.7 Nominální hodnota peněz je konstantní. Reálná hodnota peněz klesá, je-li inflace, roste je-li deflace. Ceny jsou nepřímo uměrné hodnotě peněz.

### 3.2.2 Inflace a její míra

3.2.2.1 **Definice:** Nechť agregované ceny zboží $P$ mají v čase $t$ hodnotu $P(t)$. *Míra inflace* $\iota(\langle t_0, t_1\rangle)$ za dobu $\langle t_0, t_1\rangle)$ je relativní hodnota přírůstku ceny zboží $P$ za tuto dobu, vyjádřená v jednotce $P(t_0)$, tedy

$$\iota(\langle t_0, t_1\rangle) = \frac{P(t_1) - P(t_0)}{P(t_0)}$$

3.2.2.2 Můžeme rovněž vyjádřit míru inflace porovnáním ceny peněz. Cena zboží a cena peněz jsou nepřímo úměrné: Pokud je v čase $t$ cena zboží $P(t)$ a cena peněz $X(t)$ paltí:

$$P(t_0)X(t_0) = P(t_1)X(t_1)$$

a tedy

$$\frac{P(t_1)}{P(t_0)} = \frac{X(t_0)}{X(t_1)}$$

a platí

$$\iota(\langle t_0, t_1\rangle) = \frac{P(t_1) - P(t_0)}{P(t_0)} = \frac{P(t_1)}{P(t_0)} - 1 = \frac{X(t_0)}{X(t_1)} - 1 = \frac{X(t_0) - X(t_1)}{X(t_1)}$$

a míra inflace za dobu $\langle t_0, t_1\rangle)$ je relativní hodnota přírůstku ceny peněz $X$ za tuto dobu, vyjádřená v jednotce $X(t_1)$.

3.2.2.3 **Poznámka:** Je-li hodnota peněz konstatního množství (konstantní ceny) v čase $t_0$ je $X_0$ a v čase $t_1$ je $X_1$. Je-li $t_0 < t_1$, $X_0 > X_1$ jde o inflaci. Poměr $\frac{X_0}{X_1} = \kappa$ nezávisí na množství peněz $X$ a číslo $\iota = \kappa - 1$ je míra inflace.

3.2.2.4 **Příklad:** Je-li míra inflace $\iota = 0$ je $X_1 = X_0$. Je-li míra inflace $\iota = 1$ je $X_1 = \frac{1}{2}X_0$. Je-li míra inflace $\iota = \frac{1}{2}$ je $X_1 = \frac{2}{3}X_0$.

3.2.2.5 Míra infalce je bezrozměrné číslo, které udává jak se změnila reálná hodnota peněz. Jak se změnila za určitou dobu, v našem případě za dobu od okamžiku $t_0$ do okamžiku $t_1$.

3.2.2.6 Reálná hodnota peněz v čase $t_1$ (jejichž hodnota v čase $t_0$ byla $X_0$) je $X_1 = \frac{X_0}{1+\iota}$. Tento vztah je vztahem reálné hodnoty v čase $t_0$ a $t_1$ jakéhokoliv množství peněz.

3.2.2.7 Pro agregopvané ceny $P$ platí tento vztah:

$$P_1 = P_0 \cdot (1 + \iota)$$

3.2.2.8 **Poznámka:** Pokud jsou ceny v ustáleném stavu (tj rostou exponenciálně viz. ( 3.1.1.4)) na nějakém intervalu času, míra inflace v tomto intervalu závisí jen na délce času a nikoliv na jeho počátečním okamžiku.

3.2.2.9 Zvolme nějakou jednotku času a předpokládejme, že míra inflace je $\iota$ a že ceny jsou v ustáleném stavu, to znamená, že za každou dobu jednotkové délky (bez ohledu na to, kde v čase začíná) je poměr reálné hodnoty na počátku a na konci týž a sice $1 + \iota$.

3.2.2.9.1 • Jaká je míra inflace za dvě taková období?

3.2.2.9.2 • Jaká je míra inflace za polovinu této doby.

3.2.2.9.3 • Obecně: Jaká je míra inflace za období délky $\Delta t$?

Označme $\iota(1) = \iota$ a označme $t_{1/2}$ a $t_2$ časové okamžiky splňující: $t_{1/2} = \frac{t_0+t_1}{2}$ a $t_2 = 2t_1 - t_0$. V čase $t_2$ je reálná hodnota $X_2 = \frac{X_1}{1+\iota(1)} = \frac{X_0}{(1+\iota(1))^2}$ a my ve 3.2.2.9.1 hledáme takové $\iota(2)$, aby $\frac{X_0}{1+\iota(2)} = \frac{X_0}{(1+\iota(1))^2}$ Odtud

$$\iota(2) = (1 + \iota(1))^2 - 1.$$

3.2.2.10 Podobně 3.2.2.9.2: hledáme takové $\iota\left(\frac{1}{2}\right)$, aby $\frac{X_0}{\left(1+\iota\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \frac{X_0}{1+\iota(1)}$ a

$$\iota\left(\frac{1}{2}\right) = (1 + \iota(1))^{1/2} - 1.$$

3.2.2.11 Tuto úvahu můžeme opakovat pro libovolné racionální číslo. Dostaneme

$$\iota\left(\frac{p}{q}\right) = (1 + \iota(1))^{p/q} - 1.$$

a pokud má být funkce $\iota$ spojitá, je podle Heineho věty (protože racionální čísla jsou hustá v množině reálných čísel)

$$\iota(\Delta t) = (1 + \iota(1))^{\Delta t} - 1.$$

Tedy

3.2.2.12 **Lemma:** Jsou-li ceny v ustáleném stavu, je míra jejich inflace exponenciální funkcí délky času, za nějž se inflace počítá. A vztah mezi reálnou hodnotou kapitálu téže nominální hodnoty v čase 0 a v čase $t$ je

$$X(t) = \frac{X(0)}{(1+\iota)^t}$$

kde $\iota$ je míra inflace za dobu 1.

### 3.2.3 Průměrná inflace

3.2.3.1 Připomeňme, že průměr $n$ čísel, je funkce neklesající v žádném z těchto čísel, jejíž hodnota je mezi nejmenším a největším z nich.

3.2.3.2 **Definice:** *Průměrná inflace* za dobu $\langle t_0, t_1 \rangle$ je taková inflace cen v ustáleném stavu, která má stejnou míru za dobu $\langle t_0, t_1 \rangle$ jako inflace těch cen, jejímž je průměrem.

3.2.4 **Případ ekvidistantních období:** Předpokládejme, že v každém z $n$ intervalů $(\langle t_{i-1}, t_i \rangle)$, $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, které mají stejnou délku, je míra inflace $\iota_i$. Pak kapitál reálné hodnoty $X_0$ V čase $t_0$ má v čase $t_n$ reálou hodnotu

$$X_n = \frac{X_0}{(1+\iota_1)(1+\iota_2)\cdots(1+\iota_n)}$$

Hledáme $\iota$ pro které platí: $X_n = \frac{1}{(1+\iota)^n}$. Dostáváme míru průměrné inflace:

$$\iota = \sqrt[n]{(1+\iota_1)(1+\iota_2)\cdots(1+\iota_n)} - 1$$

3.2.4.1 **Příklad:** Jaká je průměrná měsíční inflace. . .

3.2.5 **Případ neekvidistantních období:** Předpokládejme, že chceme znát průměrnou inflaci $\iota$ za dobu $\tau$ v nějakém časovém období $I$, jsou-li známy míry inflace v různých disjunktních obdobích délky $I_1$,. . . $I_n$ které pokrývají $I$. Předpokládejme, že průměrná míra inflace v období $I_i$ je $\iota_i$. Postupujeme stejně, jako v případě 3.2.4: násobením spočítáme míru inflace (+1) za dobu $I_1 + I_2 + \cdots + I_n$, pak odmocněním spočítáme míru inflace (+1) za jednotku času a umocněním za dobu $\tau$ a odečteme jedničku. Průměrná inflace za jednotku času tedy je:

$$((1+\iota_1)(1+\iota_2)\cdots(1+\iota_n))^{\frac{1}{I_1+I_2+\cdots+I_n}} - 1$$

A za období délky $\tau$

$$((1+\iota_1)(1+\iota_2)\cdots(1+\iota_n))^{\frac{\tau}{I_1+I_2+\cdots+I_n}} - 1.$$

3.2.5.1 **Příklad:** Chceme znát průměrnou čtvrtletní inflaci za dobu uřadování ministra financí Šejdíře. Šejdíř byl ministrem financí v létech 2000, 2001, 2002 (pokaždé celý rok) a pak znovu čtyři měsíce na konci roku 2003. Celková míra inflace za roky 2000 a 2001 (dohromady) byla 0,3, míra inflace za rok 2002 byla 0,15 a měsíční míra inflace v každém z měsíců roku 2003 byla 0,05. Protože výsledek je jen přibližná aproximace skutečnosti, můžemi si dovolit zaokrouhlení a považovat všechny měsíce za stejně dlouhé a rok za jejich dvanáctinásobek. Průměrná čtvrtletní inflace tedy je

$$\left((1+0{,}3)(1+0{,}15)(1+0{,}05)^4\right)^{\frac{3}{40}} - 1 \doteq 0{,}045815030$$

3.2.6 **Bezúročné spoření** Nyní předpokládejme, že si po určitou dobu ukládáme v okamžicích $t = 0, 1, 2, \dots$ peníze na účet, na němž je úroková míra zanedbatelně malá a nebo, že si je necháváme v hotovosti. Předpokládejme, že úložky mají konstantní nominální hodnotu $z$. Nominální hodnota stavu účtu v čase 0 je $x(0) = z$. Nominální hodnota účtu v čase 1 je $x(1) = 2z$. Nominální hodnota účtu v čase 1,5 je stále je $x(1{,}5) = 2z$. Nominální hodnota stavu účtu v čase $t$ je $z \cdot [t + 1]$, kde $[-]$ je funkce celá část 3.3.3.1 Jaká je reálná hodnota $X(t)$ (měřená hodnotou v čase 0) stavu účtu, v čase $t$ je-li inflace v ustáleném stavu a je-li její míra za období délky 1 rovna $\iota$? Je $X(t) = \frac{x(t)}{(1+\iota)^t} = \frac{z \cdot [t+1]}{(1+\iota)^t}$.

3.2.6.1 **Příklad:** V jakém čase nabývá $X(t)$ maxima?

3.2.6.2 *Řešení:* Předpokládáme $\iota > 0$, $z > 0$. Aproximujeme $X$ spojitou (dokonce diferencovatelnou) funkcí

$$X(t) = \frac{z \cdot (t+1)}{(1+\iota)^t}$$

Jest

$$X'(t) = \frac{z - z\,(t+1)\ln(1+\iota)}{(1+\iota)^t}$$

a

$$X'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{1 - \ln(1+\iota)}{\ln(1+\iota)}$$

To je kritický (stacionární) bod. Přitom funkce $z\,(t+1)\ln(1+\iota)$ roste monotónně v závislosti na $t$, takže nalevo od kritického bodu je funkce rostoucí a všude napravo je klesající a tedy funkce má v kritické bodě absolutní maximum. Dosaďme nějaké hodnoty. Při inflaci, jejíž míra je $1/100$ dosáhne reálný stav účtu svého maxima přibližně v čase 99,5, při inflaci, jejíž míra je $1/2$ dosáhne reálný stav účtu svého maxima přibližně v čase 19,5, Je-li míra inflace $\frac{13}{20}$ dosáhne reálný stav účtu svého maxima přibližně v čase 1, tedy v době druhé úložky, takže vůbec nemá smysl spořit.

3.2.6.3 **Poznámka:** Reálná hodnota dosáhne maxima v bodě, který nezávisí na velikosti částek, které ukládáme. Hodnota toho maxima ovšem na velikosti ukládaných částek závisí.

3.2.6.4 **Poznámka:**

$$X''(t) = -2\,\frac{z\ln(1+\iota)}{(1+\iota)^t} + \frac{z\,(t+1)\,(\ln(1+\iota))^2}{(1+\iota)^t}$$

3.2.6.5 **Cvičení:** V jakém čase je reálná hodnota celé naspořené částky menší, než byla reálná hodnota první úložky v čase, kdy jsme ji uložili?