Početní základy finanční matematiky

sylabus 4. přednášky

(5.8)

16. 10. 2005

3.5.3 Průměry

3.5.3.1 **1. Obecná rozvaha a definice:**

3.5.3.2 Investiční fondy rády uvádějí průměrnou míru výnosu za několik posledních let. Myslí tím aritmetický průměr z výnosů. Je ale jen velmi málo úvah, ve kterých by nahrazení skutečných hodnot měr výnosů jejich aritmetickým průměrem nevedlo k chybě.

3.5.3.3 Předpokládejme, že aritmetický průměr měr výnosů ξ_1, ξ_2,..., ξ_n, za posledních N let je K. Jaká je skutečná výnosnost tohoto fondu za posledních N let? Pokud známe pouze aritmetický průměr, dovedeme ji pouze ohraničit shora. Můžeme říci, že výnosnost fondu byla menší nebo rovna $(1+K)^N - 1$.

3.5.3.4 **1.1. Proof:** Pro $N = 2$, pokud jsou ξ_1 a ξ_2 míry výnosu za dvě po sobě jdoucí období a ζ míra výnosu za obě tato období. Pokud je K aritmetický průměr ξ_1 a ξ_2 máme:

$$\begin{gathered}(1+\xi_1)\cdot(1+\xi_2) = 1+\zeta \\ \frac{1}{2}\,\xi_1 + \frac{1}{2}\,\xi_2 = K\end{gathered} \tag{1}$$

odtud

$$\begin{gathered}\xi_2 = -\xi_1 + 2\,K \\ \zeta = 2\,K - {\xi_1}^2 + 2\,\xi_1\,K\end{gathered} \tag{2}$$

a

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\,\zeta = -2\,\xi_1 + 2\,K = 0 \Longleftrightarrow \xi_1 = K \tag{3}$$

přitom

$$\frac{\partial^2}{\partial {\xi_1}^2}\,\zeta = -2 \tag{4}$$

Takže

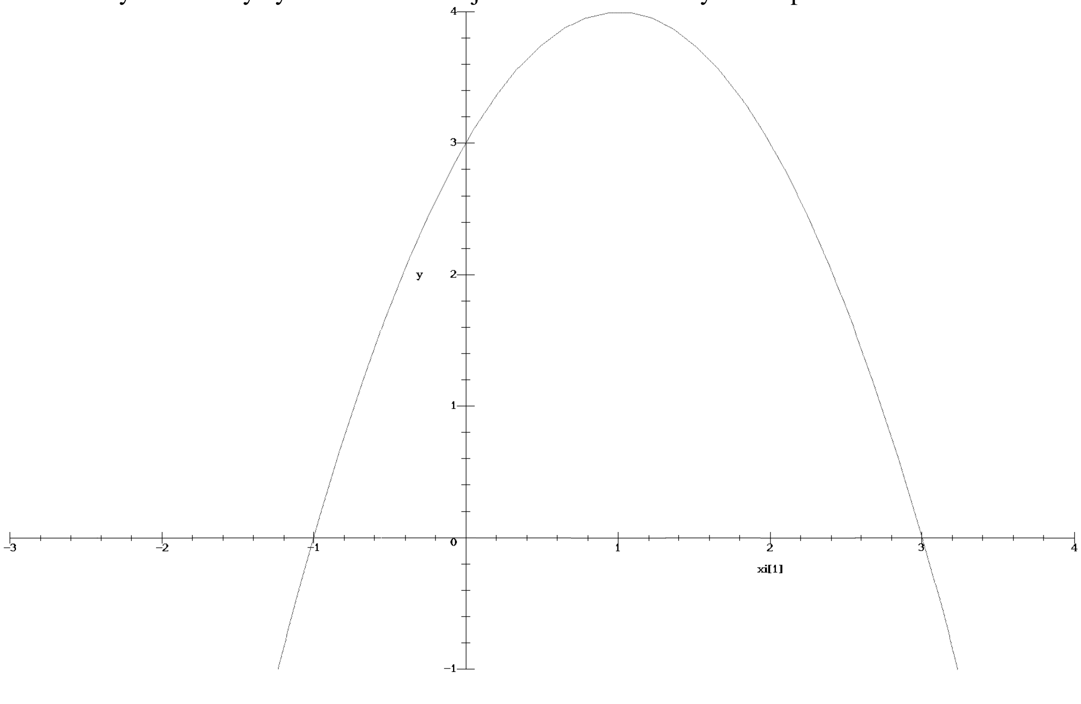
3.5.3.5 • ζ nabývá maxima $\zeta = 2\,K + K^2$, je-li $\xi_1 = \xi_2 = K$.

3.5.3.6 • Je-li $\xi_1 = 0$, je $\xi_2 = 2\,K$ a $\zeta = 2\,K$.

3.5.3.7 • Je-li $\xi_1 = -1$ je $\xi_2 = 1 + 2\,K$ a $\zeta = -1$

3.5.3.8 • a dále $\lim\limits_{\xi_1\to\infty} \xi_2 = -\infty$, $\lim\limits_{\xi_1\to\infty} \zeta = -\infty$, $\lim\limits_{\xi_1\to(-\infty)} \xi_2 = \infty$, $\lim\limits_{\xi_1\to(-\infty)} \zeta = -\infty$

3.5.3.9 Závislost výsledné míry výnosu na velikosti jedné ze dvou úrokových měr při konstantním aritmetickém průměru:



3.5.3.10 Obrázek je proveden pro tuto volbu parametrů:
3.5.3.11 • počet období $N = 2$,
3.5.3.12 • aritmetický průměr výnosů $K = 1$
3.5.3.13 Maximální míry výnosu je dosaženo, pokud jsou obě míry výnosů stejné a jsou rovny 1. Zdola není míra výnosu ohraničená.
3.5.3.14 Podobná situace nastane i v případě, kdy je období více. Pokud známe aritmetický průměr K měr výnosů, míra výnosu za N období je

$$\left(1 + N\,K - \left(\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i\right)\right) \left(\prod_{i=1}^{N-1} (1+\xi_i)\right) = 1 + \zeta \tag{5}$$

a funkce ζ, jejímž argumentem je $N-1$ výnosů ξ_i má opět maximum a to

$$\xi + 1 = (1 + K/N)^N - 1 \tag{6}$$

a není zdola ohraničená.
3.5.3.15 • Současná hodnota kapitálu může být 0 při libovolném aritmetickém průměru výnosů. K tomu je nutno a stačí, aby jedna míra výnosů byly rovna -1.
3.5.3.16 • Když má jeden fond větší prměrnou míru výnosu, než druhý, neznamená to, že by zhodnocení u tohoto fondu muselo být nutně vyšší.
3.5.3.17 ⋮
3.5.3.18 Z toho je patrno, že nám takovýto průměr výnosů nedává žádnou podstatnou informaci.
3.5.3.19 Lze říci, že jsme použili nesprávný průměr. Že použití geometrického průměru by nám dalo lepší výsledky. Kdybychom počítali průměr podle vzorce:

$$\zeta = \left(\prod_{i=1}^{N} (1+\xi_i)\right)^{\left(\frac{1}{N}\right)} - 1 \tag{7}$$

namísto

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^{N} \xi_i}{n} \tag{8}$$

dostali bychom přímo N-tou odmocninu míry celkového výnosu. Zejména fondy s vyšším průměrným výnosem by měly i vyšší skutečný výnos.
3.5.3.20 Geometrický průměr, stejně jako exponenciální průměr, který hraje významnou roli ve finanční matematice též, lze nazírat jako jisté zobecnění aritmetického průměru pro vhodně zvolenou funkci k ve tvaru:

$$x \circ y = (x,\, y) \to \left(k^{(-1)}\right) \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{k}\,(x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{k}\,(y)\right) \tag{9}$$

obecné vlastnosti tohoto průměru jsou popsány v [Azzel str. 229]
3.5.3.21 THEOREM: there exists a continuous and strictly monotonic function which gives a value of a mean (9) holds if, and only if, $\circ$: $I^2 \mapsto I$ is continuous and strictly increasing in booth variables, idempotent, commutative (symetric) and medial (bysimetric) which means:

$$(x \circ y) \circ (z \circ w) = (x \circ z) \circ (y \circ w) \tag{10}$$

in the Book P. S. Bullen, D. S. Mitrinović P. M. Vasić; means and Their Inequalities, D. Reidel publishing Company, Dordecht, Boston., Lancaster, Tokyo, 1988, ISBN 90–277–2629–9, p. 372 je pokus o axiomatickou definici průměru:
3.5.3.22 • je symetrický, is symetric,
3.5.3.23 • homogenní (stupně 1), homogenous of degree 1,
3.5.3.24 • reflexivní, reflexive
3.5.3.25 • asociativní, associative, (průměr n čísel má tutéž hodnotu, jako by měl, kdyby $p \leq n$ z nich bylo nahrazeno svým průměrem): $\mathrm{f}\,(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{f}\,(\mathrm{f}\,(a_1, \ldots, a_p), \ldots, \mathrm{f}\,(a_1, \ldots, a_p),\, a_{p+1}, \ldots, a_n)$
3.5.3.26 • a rostoucí ve všech proměnných, icreasing in each variable.
3.5.3.27 Tato definice nám nevyhovuje, protože například průměrná úroková míra spoření není symetrická (a symetrie není narušena pohým přidáním vah).

3.5.3.28 Nevýhodou těchto koncepcí je, že se průměr vztahuje k hodnotám, ze kterých je počítán, ale nikoliv k jejich významu, čili k tomu, co s nimi chceme dělat. (Tak například aritmetický průměr má smysl jen pro aditivní veličiny, tj. pro veličiny, které chceme sčítat, ale obvyklá definice aritmetického průměru tuto restricky nezahrnuje). Nabízíme koncepci, která je jednodužší, obecnější a tuto nevýhodu nemá. Povaha průměrovaných hodnot je zde vyjádřena účelovou funkcí, do které mají být hodnoty dosazovány:

3.5.3.29 **1.2. Definition:** Z je průměrná hodnota hodnot $(z_i)_{i=1}^n$ *vzhledem k funkci* $\mathrm{F}\colon \coprod_{i\in I} X^i \to Y$ pokud $n \in I$ a $\mathrm{F}\left((z_i)_{i=1}^n\right) = \mathrm{F}\left((Z)_{i=1}^n\right)$ (tj. $F\left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right) = F\left(z, z, \ldots, z\right)$).

3.5.3.30 Pokud je F prostá, je průměr určen jednoznačně, pokud existuje. Je-li $\mathrm{Im}\left(f\right) = \mathrm{Im}\left(f|_\Delta\right)$, kde Δ je diagonála: $\Delta = \{(x)_{i=1}^n \in X\}$, průměr existuje vždy.

3.5.3.31 **1.3. Example:** Je-li F sčítání, dosaneme aritmetický průměr. Je-li F násobení, dostaneme geometrický průměr.

3.5.3.32 Při volbách se hlasy sčítají. Aritmetický průměr hlasů odevzdaných pro tu kterou volební stranu odpovídá poměrnému zastoupení strany v parlamentu.

3.5.3.33 Míra inflace se násobí. Je-li

$$\iota := [.01,\ .03,\ .02,\ .01,\ .03] \tag{11}$$

míra inflace za pět po sobě jdoucích období je míra inflace za celou tuto dobu

$$\left(\prod_{j=1}^{5}\left(1+\iota_j\right)\right) - 1 = .10386857 \tag{12}$$

A pokud by byla inflace po všechna období stejná a byla by rovna

$$\kappa := \left(\prod_{j=1}^{5}\left(1+\iota_j\right)\right)^{1/5} - 1 = .019960783 \tag{13}$$

byla by míra inflace za 5 období táž:

$$\left(\prod_{j=1}^{5}\left(1+\kappa\right)\right) - 1 = .10386857 \tag{14}$$

Tedy pokud bude účelová funkce

$$\iota \mapsto \left(\prod_{j}\left(1+\iota_j\right)\right) - 1 \tag{15}$$

Bude průměr vzhledem k této funkci geometrický průměr z hodnot $1 + \iota_j$ a nebo jistý nepojmenovaný průměr z hodnot ι_j.

3.5.3.34 **2. Průměrné výnosy penzijních fondů:**

3.5.3.35 Předpokládejme, že známe roční výnosy penzijních fondů. Hledáme nějaký průměrný výnos, který by nám umožnil fondy porovnat.

3.5.3.36 Předpokládejme, že příspěvky spořitele penzijnímu fondu jsou dlouhodobě stejné, (i přes snahu fondů donutit přispěvatele ke stále větším příspěvkům), můžeme očekávat, že pokud byly roční příspěvky účastníka včetně státních příspěvků x a pokud byla míra jejich zůročení vzniklá rozdělením zisku v roce i rovna ξ_i spořitel by naspořil za dobu N:

$$x\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{i=1}^{j}\left(1+\xi_{N-i+1}\right)\right)\right) \tag{16}$$

Pro spořitele je tedy důležitý průměrný výnos fondu vzhledem k funkci

$$(\xi)_{i=1}^{T} \to \left(\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{i=1}^{j}\left(1+\xi_{N-i+1}\right)\right)\right) \tag{17}$$

by podle naší definice byl takový výnos ζ, který by splňoval rovnici:

$$K=\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{i=1}^{j}\left(1+\xi_{N-i+1}\right)\right)=\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{i=1}^{j}(1+\zeta)\right)=-\frac{-(1+\zeta)^{(N+1)}+1+\zeta}{\zeta} \tag{18}$$

Jde o algebraickou rovnici stupně N.

3.5.3.37 Pokud by období bylo jenom jedno, byla by úroková míra za toto období rovna svému průměru:

$$\zeta=-1+K \tag{19}$$

Pokud by období byla dvě, měla by rovnice obecně dvě řešení . V případě, že by naspořená částka byla větší než $\frac{1}{4}$ spořené částky by byla tato řešení reálná . V případě, který považujeme za rozumný, že by naspořená částka byla větší než dvojnásobek spořené částky by jedno řešení bylo kladné a bylo by rovno

$$\zeta=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\,K} \tag{20}$$

V případě, že by období byla tři existovala by jedinná reálná průměrná úroková míra a to:

$$\zeta=1/6\,\frac{\left(28+108\,K+12\,\sqrt{9+42\,K+81\,K^2}\right)^{2/3}-8-8\sqrt[3]{28+108\,K+12\,\sqrt{9+42\,K+81\,K^2}}}{\sqrt[3]{28+108\,K+12\,\sqrt{9+42\,K+81\,K^2}}} \tag{21}$$

3.5.3.38 Pokud by bylo období více než čtyři, nedovedeme řešit rovnici (18) algebraicky a musíme ji řešit numericky.

3.5.3.39 **2.4. Example:** Za posledních pět let v České republice fungovalo několik penzijních fondů. Budeme sledovat tyto fondy:

3.5.3.40 (1) ČSOB Progres, (2) Zemský PF, (3) PF KB, (4) ING, (5) Credit Suisse, (6) PF ČP, (7) Allianz, (8) Generali, (9) Nový ČP, (10) ČSOB Stabilita, (11) PF ČS, (12) Hornický PF;

3.5.3.41

Fondy	**míra výnosu (v %)**				
	1999	2000	2001	2002	2003
ČSOB Progres	7.7	5.6	3.9	4.3	4.3
Zemský PF	7.0	5.0	4.6	4.1	4.01
PF KB	7.2	4.9	4.4	4.6	3.4
ING	6	4.4	4.8	4	4
Credit Suisse	6.5	4.1	4.3	3.4	3.4
PF ČP	6.6	4.5	3.8	3.2	3.1
Allianz	6	3.8	4.4	3.7	3
Generali	5.3	3.6	4.6	4.1	3
Nový ČP	5.6	3.8	4.1	3.5	3.34
ČSOB Stabilita	6.1	4.2	3.2	3.0	2.34
PF ČS	4.4	4.2	3.8	3.5	2.64
Hornický PF	4.4	2	2.8	3.2	2.44

(22)

Českomoravská stavební spořitelna vydala pro zprostředkovatele penzijního připojištění informační příručku, ve které uspořádala fondy podle aritmetických průměrů jejich míry výnosů které jsou ovšem irelevantní (druhý sloupec násl. tabulky, hodnoty jsou uvedené v setinách). Pokud spočítáme průměry vzhledem k účelové funkci

$$\Phi\colon \left(\xi^k\right)_{i=1}^{5}\longmapsto\sum_{j=1}^{5}\left(\prod_{i=1}^{j}\left(1+\xi_{5-i+1}^{k}\right)\right) \tag{23}$$

(třetí sloupec násl. tabulky, hodnoty jsou uvedené v setinách) zjistíme, že se v několika případech stalo, že fondy s vzžšímm výnosem byly zařazeny až za fondy s nižším výnosem:

Fondy	**průměry míry výnosů**	
	aritmetický (*nevhodný*)	**vzhledem k funkci Φ** (*vhodný*)
ČSOB Progres	5.16	4.638
Zemský PF	4.94	4.501
PF KB	4.90	4.394
ING	4.64	4.358
Credit Suisse	4.34	3.895
PF ČP	4.24	† 3.704
Allianz	4.18	† 3.787
Generali	4.12	† 3.857
Nový ČP	4.06	3.757
ČSOB Stabilita	3.76	‡ 3.203
PF ČS	3.70	‡ 3.438
Hornický PF	2.96	2.789

(24)

3.5.3.42 Vidíme, že fond Allianz, uváděný na 7. místě měl skutečné průměrné zhodnocení a tedy i skutečné celkové zhodnocení lepší PF ČP uváděný na 6. místě a ještě lepší zhodnocení měl fond Generrali, uváděný až za oběma předchozími. Oba jsou ve zmiňovaných materiálech uváděny jako fondy se stejným průměrným zhodnocením 4.2.

3.5.3.43 Navíc fond ČSOB Stabilita, k jehož propagaci mělo toto srovnání rovněž sloužit, je uváděn jako fond s vyžším průměrným zhodnocením (aritmetický průměr 3.8), než fond PF ČS (aritmetický průměr 3.7) a přitom by měl být uváděn (s průměrem 3.2) až za fondem PF ČS (průměr 3.4)!

3.5.3.44 Pokud chceme správně interpetovat výsledky, musíme stanovit, citlivost naspořené částky na změnu úrokové sazby. S výhodou můžeme nahradit výnosy fondů průměrnými výnosy, které jsme vypočítali. Relativní změna naspořené částky za dobu T při změně průměrné úrokové míry z ξ na ζ, (tj. míra zisku nebo ztráty na celkové naspořené častce při volbě jiného fondu) je

$$\frac{(1+\zeta)^T\ \xi - \xi - (1+\xi)^T\ \zeta + \zeta}{\Big((1+\xi)^T - 1\Big)\ \zeta}. \tag{25}$$

V našem případě je $T = 5$ a hdnoty pro jednotlivé fondy uváděné ve stejném pořadí jako v předchozích tabulkách jsou v setinách uvedeny v tabulce následující:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & -0.27 & -0.49 & -0.56 & -1.5 & -1.8 & -1.7 & -1.5 & -1.7 & -2.8 & -2.4 & -3.6 \\
0.27 & 0 & -0.21 & -0.29 & -1.2 & -1.6 & -1.4 & -1.3 & -1.5 & -2.6 & -2.1 & -3.4 \\
0.49 & 0.21 & 0 & -0.072 & -0.99 & -1.4 & -1.2 & -1.1 & -1.3 & -2.4 & -1.9 & -3.2 \\
0.56 & 0.29 & 0.072 & 0 & -0.92 & -1.3 & -1.1 & -1.0 & -1.2 & -2.3 & -1.8 & -3.1 \\
1.5 & 1.2 & 1.0 & 0.93 & 0 & -0.38 & -0.21 & -0.075 & -0.27 & -1.4 & -0.91 & -2.2 \\
1.9 & 1.6 & 1.4 & 1.3 & 0.38 & 0 & 0.17 & 0.31 & 0.11 & -1.0 & -0.53 & -1.8 \\
1.7 & 1.4 & 1.2 & 1.1 & 0.21 & -0.17 & 0 & 0.14 & -0.061 & -1.2 & -0.70 & -2.0 \\
1.6 & 1.3 & 1.1 & 1.0 & 0.075 & -0.31 & -0.14 & 0 & -0.20 & -1.3 & -0.83 & -2.1 \\
1.8 & 1.5 & 1.3 & 1.2 & 0.28 & -0.11 & 0.061 & 0.20 & 0 & -1.1 & -0.64 & -1.9 \\
2.9 & 2.6 & 2.4 & 2.3 & 1.4 & 1.0 & 1.2 & 1.3 & 1.1 & 0 & 0.47 & -0.83 \\
2.4 & 2.1 & 1.9 & 1.9 & 0.92 & 0.53 & 0.70 & 0.84 & 0.64 & -0.47 & 0 & -1.3 \\
3.8 & 3.5 & 3.3 & 3.2 & 2.2 & 1.8 & 2.0 & 2.2 & 2.0 & 0.83 & 1.3 & 0
\end{array} \tag{26}$$

V i. řádku j. sloupci je napsáno, o kolik procent by byla vyšší celková naspořená částka, kdybychom místo do i. fondu investovali do j. fondu. A tedy při správné volobě fondu jsme za pět let mohli mít přibližně až o čtyři procenta naspořeno více, než při nesprávné volbě.

3.5.3.45 **3. Průměrná úrokova míra souběžných spořeni:**

3.5.3.46 Předpokládejme, že máme dvě konta, každé úročené jinou úrokovou mírou ξ_1 a ξ_2. Kapitál o objemu $x_1 + x_2$ mezi ně rozdělíme tak, že na jednom kontě budeme mít kapitál o objemu x_1 a na druhém kapitál o objemu x_2. Účelová funkce je funkce, jejíž hodnota je stav našeho kapitálu za dobu t. Je to funkce $\Psi_{x_1,x_2,t}\colon (\xi_1, \xi_2) \mapsto x_1(1+\xi_1)^t + x_2(1+\xi_2)^t$ a závisí na třech parametrech. Průměrná úroková míra vzhledem k této funkci je řešením ζ rovnice:

$$x_1(1+\xi_1)^t + x_2(1+\xi_2)^t = (x_1 + x_2)\,(1+\Xi)^t \tag{27}$$

tedy

$$\zeta = \left(\frac{x_1\,(1+\xi_1)^t + x_2\,(1+\xi_2)^t}{x_1 + x_2}\right)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \tag{28}$$

A je to zobecněný exponenciální průměr. Zajímavá je jeho závislost na t. Zejména limita $t \to \infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{x_1(1+\xi_1)^t + x_2(1+\xi_2)^t}{x_1+x_2}\right)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 &= \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\frac{x_1(1+\xi_1)^t + x_2(1+\xi_2)^t}{x_1+x_2}\right)^{\left(\frac{1}{t}\right)}} - 1 = \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln\left(x_1\,(1+\xi_1)^t + x_2\,(1+\xi_2)^t\right) - \ln(x_1+x_2)}{t}} - 1\end{aligned} \tag{29}$$

s použitím L'Hospitalova pravidla

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left(x_1\,(1+\xi_1)^t + x_2\,(1+\xi_2)^t\right) - \ln(x_1+x_2)}{t} &= \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{x_1\,(1+\xi_1)^t\,\ln(1+\xi_1) + x_2\,(1+\xi_2)^t\,\ln(1+\xi_2)}{x_1\,(1+\xi_1)^t + x_2\,(1+\xi_2)^t}\end{aligned} \tag{30}$$

a po vydělení čitatele i jmenovatele zlomku výrazem $(1+\xi_2)^t$dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x_1\ln(1+\xi_1)\left(\dfrac{1+\xi_1}{1+\xi_2}\right)^t + x_2\ln(1+\xi_2)}{x_1\left(\dfrac{1+\xi_1}{1+\xi_2}\right)^t + x_2} \tag{31}$$

za předpokladu: $\xi_1 < \xi_2$ je

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{x_1\,(1+\xi_1)^t + x_2\,(1+\xi_2)^t}{x_1+x_2}\right)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 = \xi_2 \tag{32}$$

3.5.3.47 Oproti tomu

$$\lim_{t\to 0}\zeta = t\,(1+\xi_1)^{\frac{x_1}{x_1+x_2}}\,(1+\xi_2)^{\frac{x_2}{x_1+x_2}} - 1 \tag{33}$$

což je zobecněný geometrický průměr.

3.5.3.48 Stejný výsledek dostaneme i pokud bude kont více. Budou-li úrokové míry (ξ_i) a počáteční stavy účtů (x_i) bude účelová funkce

$$(\xi_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i\,(1+\xi_i)^t \tag{34}$$

a průměrná hodnota (ξ_i) vzhledem k této funkci bude řešení ζ rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,(1+\xi_i)^t = \sum_{i=1}^{n} x_i\,(1+\zeta)^t = (1+\zeta)^t\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{35}$$

a tedy

$$\zeta = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \left(1 + \xi_i\right)^t}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \right)^{\frac{1}{t}} - 1 \tag{36}$$

a stejně můžeme ukázat, pokud $\xi_n = \max_i \left(\xi_i\right)$, že

$$\lim_{t \to \infty} \zeta = e^{\left(\lim_{t \to \infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \ln\left(1+\xi_i\right) \left(\frac{1+\xi_i}{1+\xi_n}\right)^t\right) + x_n \ln\left(1+\xi_n\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \left(\frac{1+\xi_i}{1+\xi_n}\right)^t\right) + x_n} \right)} - 1 = \xi_n = \max_i \left(\xi_i\right) \tag{37}$$

a

$$\lim_{t \to 0} \zeta = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \xi_i\right)^{\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j}} \tag{38}$$

3.5.3.49 **Princip konvergence k maximu:** Pokud máme uloženy různé částky na účtech s různými úrokovými mírami, je po dostatečné době součet stavu na našich účtech skoro stejný, jako bychom měli všechny peníze uloženy na účtu s nejvyšší úrokovou mírou.

3.5.3.50 Z toho plyne, že při dlouhodobých investcích je důležité diverzifikovat kapitál.

3.5.3.51 Podobně je tomu při spoření konstatních částek v ekvidistantních okamžicíc:

3.5.3.52 **4. Průměrná úroková míra spoření:**

3.5.3.53 Předpokládáme na trhu spoření o pravidelných úložkách velikosti x_i v okamžicích $t \in \mathbb{N}$ s konstantními úrokovými mírami ξ_i Účelová funkce je součet budoucích hodnot spoření s různými úrokovými mírami:

$$\Phi_{(x_i)_{i=1}^k, N} := \left((\xi_i)_{i=1}^k \right) \longmapsto \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{N-1} x_i \, \left(1 + \xi_i\right)^j \right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i \left(\left(1 + \xi_i\right)^N - 1 \right)}{\xi_i} \tag{39}$$

spořené částky, $(x_i)_{i=1}^k$ a počet spoření s různýmí úrokovými mírami k jsou parametry Φ.

3.5.3.54 Průměrná úroková míra spoření $\Xi = \Xi\left((x_i), N\right)$ vzhledem k funkci $\Phi_{(x_i)_{i=1}^k, N}$ je řešením rovnice:

$$xxx := \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right) \left(\left(1 + \Xi\right)^N - 1 \right)}{\Xi} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i \left(\left(1 + \xi_i\right)^N - 1 \right)}{\xi_i} \tag{40}$$

3.5.3.55 Budeme zkoumat závislost na parametru N, tj. na počtu úložek. Platí opět princip maxima:

$$\lim_{t \to \infty} = \max_i \left(\xi_i\right) \tag{41}$$

3.5.3.56 **4.5. Proof:** Buď

$$\eta = \eta\left(\xi_i, \, x_i, \, n, \, T\right) \tag{42}$$

průměrná úroková míra vzhledem k funkci

$$\Phi := \xi \to \sum_{\tau=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} x_j \, \left(1 + \xi_j\right)^{(T-\tau)} \right) \tag{43}$$

tj. řešení rovnice

$$\sum_{\tau=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} x_j \, \left(1 + \xi_j\right)^{(T-\tau)} \right) = \left(\sum_{j=1}^{k} x_j \right) \left(\sum_{\tau=1}^{n} \left(1 + \eta\right)^{(T-\tau)} \right) \tag{44}$$

a buď

$$\zeta\left(\xi_i, \, x_i, \, \tau, \, T\right) \tag{45}$$

průměrná úroková míra vzhledem k funkci

$$\Psi := \xi \to \sum_{j=1}^{k} x_j \; (1+\xi_j)^{(T-\tau)} \tag{46}$$

tj. řešení rovnice

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \; (1+\xi_j)^{(T-\tau)} = (1+\zeta)^{(T-\tau)} \left(\sum_{j=1}^{k} x_j \right) \tag{47}$$

3.5.3.57 Zřejmě platí (je zřejmé, že platí)

$$\min\left(\zeta\left(\xi_i,\, x_i,\, \tau,\, T\right)\right)_{\tau=1}^{n} \le \eta\left(\xi_i,\, x_i,\, n,\, T\right) \le \max\left(\zeta\left(\xi_i,\, x_i,\, \tau,\, T\right)_{\tau=1}^{n}\right) \tag{48}$$

Podle (37)

$$\lim_{T\to\infty} \min\left(\zeta\left(\ldots,\, \tau,\, T\right)_{\tau=1}^{n}\right) = \lim_{T\to\infty} \max\left(\zeta\left(\ldots,\, \tau,\, T\right)_{\tau=1}^{n}\right) = \max_i\left(\xi\right) \tag{49}$$

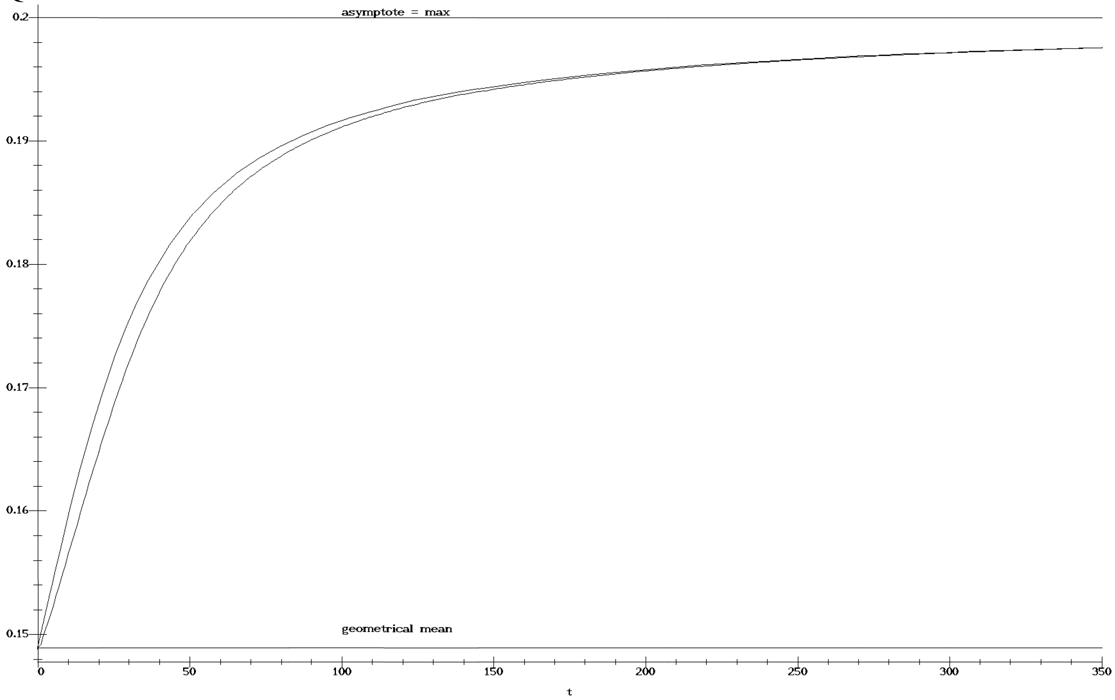
tedy i

$$\lim_{T\to\infty} \eta\left(\xi_i,\, x_i,\, n,\, T\right) \tag{50}$$

a proto

$$\lim_{T\to\infty} \eta\left(\xi_i,\, x_i,\, T,\, T\right) = \lim_{n\to\infty} \lim_{T\to\infty} \eta\left(\xi_i,\, x_i,\, n,\, T\right) = \lim_{n\to\infty} \max_i\left(\xi_i\right) = \max_i\left(\xi_i\right) \tag{51}$$

Q. e. d.



3.5.3.58 Průměrná úroková míra spoření v závislosti na čase t je menší, než průměrná úroková míra úročení, ale má stejnou limitu $t \to 0$ a $t \to \infty$. Na obrázku je graf závislosti průměrné úrokové míry spoření a úročení na čase, když úroková míra prvního spoření za jednotku času je 0.1 a úroková míra druhého spoření za jednotku času je 0.2. Limita obou průměrů v nule je $\sqrt{1.1 \cdot 1.2} = 1.148912529$ a v nekonečnu je $\max(0.1, 0.2) = 0.2$.

3.5.3.59 **4.6. Example:** Překlenovací úvěr. Obecně je problém tento: Všimněme si ještě na chvíli produktu, který nabízí například stavební spořitelny, jako ekvivalent obvyklého hypotéčního úvěru. Půjčíme si peníze a splácíme je anuitními splátkami při smluvené úrokové míře ξ_1. Současně spoříme při jiné úrokové míře ζ a část dluhu později splatíme naspořenou částkou. (U stavebních spořitelen jsou splátky stanoveny ve výši úroku z dluhu, platí se měsíčně.) Po naspoření 0.4 násobku půjčené částky se část dluhu zaplatí naspořenou částkou a zbytek dluhu se splácí při úrokové míře ξ_2, která je přibližně steně velká, jako byla ξ_1). Porovnáme tento produkt s běžnými hypotékami tak, že stanovíme průměrnouo úrokovou míru úrokových měr ζ a ξ_1 a ξ_2.

3.5.3.60 Zadány jsou úrokové míry ξ_1 a ξ_2 a ζ

3.5.3.61 $\vdots$

3.5.3.62 Zbytek je D. Ú.