# Početní základy finanční matematiky

*sylabus 5. přednášky*
(5.9)
24. 10. 2005

# 4 Úroková míra veličin, které nejsou v ustáleném stavu

## 4.1 Abstrakt

Ve finanční matematice se používají dva pojmy: *jednoduché* a *složené* úročení. Úroková míra za jednotku času je v obou případech rovna

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)},$$

kde $f$ je stavová funkce. Protože $f$ nemusí být v bodě $x+1$ vůbec definována (předpokládáme, že je definována na nějakém pravém okolí $\langle x, x+h\rangle$ bodu $x$), počítá se v prvním případě úroková míra za jednotku času takto

$$\xi = \left(1+\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} - 1$$

a ve druhém případě takto:

$$\eta = \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right)\cdot\frac{1}{h}$$

a říká se, že je $f$ úročena složeně, pokud $\xi$ nezávisí na $h$ a že je úročena jednoduše, pokud $\eta$ nezávisí na $h$. $f$ je úročena složeně, právě tehdy, když je v ustáleném stavu.

4.1.0.1 Pokud je $f$ v ustáleném stavu (tj. roste exponenciálně), nezávisí $\xi$ ani na $x$.

4.1.0.2 Pokud $\eta$ nezávisí na $x$, je $f$ nulová konstanta.

4.1.0.3 Proto je číslo $\xi$ mnohem vhodnější míra než číslo $\eta$ a v případech, které se dějí ze své a ne z naší vůle, jako je třeba inflace používáme číslo $\xi$.

4.1.0.4 Máme dvě různé míry růstu veličiny. Jejich nevýhodou je, že obě závisí nejen na bodě $x$, ve kterém růst měříme, ale i na délce času $h$.

4.1.0.5 V makroekonomii se jako míra růstu veličiny $f$ používá hodnota výrazu

$$\theta = \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\eta$$

4.1.0.6 Veličiny $f$, pro které je $\theta$ konstantní jsou v ustáleném stavu. za povšimnutí stojí fakt, že se nepočítá limita $\xi$, ale $\eta$.

4.1.0.7 Ve finanční matematice také se používá pojem spojité úročení namísto složené úročení a v tom případě je úroková míra jméno pro číslo $\theta$, ne pro číslo $\xi$. Tato neobratnost ve vyjařování (nejde o jiné úročení, stav kapitálu pokaždé roste exponenciálně, nebo tvoří geometrickou posloupnopst, je-li čas diskrétní, ale o jiné číslo, které je nazváno úrokovou mírou) je ve většině učebnic finanční matematiky znejasňována ještě tím, že se předvádějí různé početní hříčky, kdy se z čísla $\xi$ dostane $\theta$. (známá je například tak, kdy se za $h$ postupně dosazují prvky posloupnosti $(1/2^n)_{n=0}^{\infty}$, číslům $(1/2)^n$ se říká frekvence připisování úroků)

4.1.0.8 Cílem této poznámky je:

4.1.0.9 Najít limitní tvar (pro $h\to 0$) míry $\xi$, který lze použít namísto $\theta$

4.1.0.10 Najít vzorec pro budoucí hodnotu kapitálu, v němž bude mít pojem úroková míra tentýž význam, jaký má při složeném úročení, totiž vzorec, do kterého bude možno dosadit dostatečně obecnou funkci, která bude vyjadřovat závislost úrokové míry na čase a který přejde do známého tvaru $x_t = x_0(1+i)^t$, pokud bude úroková míra $i$ konstantní (poznamenejme, že vzorec $x_t = x_0 e^{\int it}$ používaný v učebnicích finanční matematiky tuto vlastnost nemá).

4.1.0.11 Na případech, jejichž chování je autonomní (nezávislé na naší vůli), jako je inflace, ukázat, že volba tohoto vzorce není libovolná, ale nutná: Totiž vzorec $x_t = x_0 e^{\int \ln(1+\xi)}$ je limitním případem vzorce $x_t = x_0(1+i)^t$ tomto smyslu: pokud funkcionál, který přiřazuje úrokové míře budoucí hodnotu kapitálu má být spojitý, je budoucí hodnota při úročení libovolnou úrokovou mírou vynucena známými budoucími hodnotami při úroočení (po částech) konstantní úrokovou mírou, protože množina po částech konstantních funkcí je hustá v množině všech přípustných funkcí.

## 4.2 Odvození hlavní formule

**1. Introduction:**

4.2.0.1 Nechť jsou aregované ceny nějaké funkce závislá na čase

$$F = \mathrm{CPI}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1}$$

Míra inflace za dobu $\langle t_1, t_2 \rangle$ je relativní hodnota jejich přírůstku:

$$\iota(t_1, t_2) = \iota(\langle t_1, t_2 \rangle) = \frac{F(t_2) - F(t_1)}{F(t_1)}. \tag{2}$$

Takto definováno je $\iota$ zobrazení

$$\iota\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3}$$

4.2.0.2 **1.1. Definition:** (see. [2]) Steady state is a situation in which the various quantities splňují následující rovnici:

$$\mathrm{D}(x)(t) = k \cdot x(t) \tag{4}$$

každá pro nějakou konstantu $k$. Tedy, každá funkce v ustáleném stavu závisí na dvou parametrech $A$ a $B$ a je tvaru

$$x \mapsto A \cdot e^{Bx}. \tag{5}$$

4.2.0.3 Jediná quantity, kterou se nyní zabýváme jsou agregované ceny.

4.2.0.4 **1.2. Lemma:** Nechť jsou v čase $\langle T_1, T_2 \rangle$ ceny v ustáleném stavu. Pak

$$\forall\kappa\colon \forall t_1\colon \forall t_2\colon \langle t_1, t_1 + \kappa \rangle \subset \langle T_1, T_2 \rangle \wedge \langle t_2, t_2 + \kappa \rangle \subset \langle T_1, T_2 \rangle \Longrightarrow \iota(\langle t_1, t_1 + \kappa \rangle) = \iota(\langle t_2, t_2 + \kappa \rangle) \tag{6}$$

i. e. $\iota(\langle t, t + \kappa \rangle)$ depends only on the length $\kappa$ of the interval ($\langle t, t + \kappa \rangle$ but not on its beginning $t$. In a steady state we can define

$$\hat{\iota}\colon \begin{cases} \langle 0, T_2 - T_1 \rangle & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \iota(\langle T_1, T_1 + x \rangle) \end{cases} \tag{7}$$

Při tom platí:

$$\hat{\iota}(\tau) = (1 + \iota(t))^{\frac{\tau}{t}} - 1 \tag{8}$$

takže známe-li hodnotu $\hat{\iota}$ v nějakém $t \in \mathbb{R}$ můžeme rozšířit definiční obor $\hat{\iota}$ na celé $\mathbb{R}$:

$$\hat{\iota}\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \tau & \longmapsto & \hat{\iota}(\tau) = (1 + \iota(t))^{\frac{\tau}{t}} - 1 \end{cases} \tag{9}$$

Takto definované je $\hat{\iota}$ míra inflace agregovaných cen, které jsou v ustáleném stavu na $\mathbb{R}$ a které vyhovující rovnici

$$F(\tau) = F(0) \cdot (1 + \hat{\iota}(t))^{\frac{\tau}{t}} \tag{10}$$

pro každé $t \in \langle T_0, T_0 + t \rangle$ Tedy zejména, pokud zvolíme hodnotu t za jednotku času, máme:

$$\hat{\iota}(\tau) = (1 + \hat{\iota}(1))^{\tau} - 1 = \frac{F(x + \tau) - F(x)}{F(x)} \tag{11}$$

a naopak

$$\hat{\iota}(1) = (1 + \hat{\iota}(\tau))^{\frac{1}{\tau}} - 1 = \left( \frac{F(x + \tau) - F(x)}{F(x)} \right)^{\frac{1}{\tau}}. \tag{12}$$

Takto můžeme definovat míru inflace za jednotku času pokud jsou agregované ceny v ustáleném stavu na nějakém, libovolně malém, pravém okolí bodu $x \in \mathbb{R}$.

4.2.0.5 V obecném případě, i pokud není stav ustálený, můžeme normovat míru inflace naměřenou na intervalu $\langle t, t + \kappa \rangle$ s použitím vztahu (12). Definujeme:

4.2.0.6 **1.3. Definition:** Míra inflace agregovaných cen $F$ na intervalu $\langle t, t+\kappa\rangle$ za jednotku času je:

$$\tilde{\iota}(t,\kappa) = \left(\frac{F(t+\kappa) - F(t)}{F(t)}\right)^{1/\kappa}. \tag{13}$$

4.2.0.7 **1.4. Note:** $\tilde{\iota}$ závisí jen na hodnotách $F$ v krajních bodech intervalu $\langle t, t+\kappa\rangle$ a je stejná, jako by byla hodnota inflace v ustáleném stavu, ve kterém by agregované ceny v čase $t$ byly $F(t)$ a v čase $t+\kappa$ by byly $F(t+\kappa)$ tj. podle (5) by byly splněny rovnice:

$$\begin{aligned} F(t) &= Ae^{Bt} \\ F(t+\kappa) &= Ae^{B(t+\kappa)} \end{aligned} \tag{14}$$

které jsou ekvivaklentní s rovnicemi

$$\begin{aligned} B &= \ln\left(\frac{F(t+\kappa)}{F(t)}\right)\kappa^{-1} \\ A &= \left(\frac{F(t+\kappa)}{F(t)}\right)^{-\frac{t}{\kappa}} F(t). \end{aligned} \tag{15}$$

4.2.0.8 Nás ovšem zajímá míra inflace $\bar{\iota} = \lim_{\kappa\to 0^+} \tilde{\iota}(-,\kappa)$. v jednom časovém okamžiku t. Pokud v tomto okamžiku mají agregované ceny nespojitost prvního druhu je míra inflace $\iota$ nenulová a je rovna

$$\iota(t) = \frac{\lim_{\tau\to t^+} F(\tau) - \lim_{\tau\to t^-} F(\tau)}{\lim_{\tau\to t^-} F(\tau)} \tag{16}$$

a míra inflace $\bar{\iota}$ za jednotku času bude rovna $\infty$.

4.2.0.9 Pokud jsou v tomto okamžiku agregované ceny spojitě závislé na čase je míra inflace v tomto okamžiku $0$. Pokud jsou navíc v tomto okamžiku agregované ceny diferencovatelné podle času, existuje limita (15) $\kappa \to 0$ a platí:

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa\to 0} A &= e^{-\frac{\mathrm{D}(F)(t)t}{F(t)}} F(t) \\ \lim_{\kappa\to 0} B &= \frac{\mathrm{D}(F)(t)}{F(t)} \end{aligned} \tag{17}$$

a míra inflace za jednotku času je

$$\bar{\iota}(t) = \hat{\iota}(1)\frac{Ae^{B(t+1)} - Ae^{Bt}}{Ae^{Bt}} = e^B - 1 = e^{\frac{\mathrm{D}(F)(t)}{F(t)}} - 1 = e^{\mathrm{D}(\ln\circ F)(t)} \tag{18}$$

a máme

$$\ln(\bar{\iota}(t) + 1) = \mathrm{D}(\ln\circ F)(t) \tag{19}$$

This is the main result of this part. Poslední rovnici můžeme psát také ve tvaru:

$$\mathrm{D}(F)(t) = \ln(\bar{\iota}(t) + 1)\cdot F(t) \tag{20}$$

4.2.0.10 One can compare it with a equation

$$\mathrm{D}(F)(t) = \xi(t)\cdot F(t) \tag{21}$$

která se obvykle používá k definici míry růstu of different quantities v makroekonomii a jejíž speciálním případem je (5). Podle toho, co jsme odvodili, by měla být makroekonomická míra růstu $\xi$ rovna $\ln(1+\bar{\iota})$.

4.2.0.11 Podotkněme ještě, že taylorův polynom stupmně 1 v bodě 0 funkce $x \mapsto \ln(1+x)$ je stejný jako taylorův polynom identity, že tedy obě funkce mají dotyk řádu 1 (first order contact) a proto pro dostatečně malé hodnoty míry růstu ($\xi$ nebo $\bar{\iota}$) vychází obě míry ($\xi$ a $\ln(1+\bar{\iota})$) přibližně stejně.

4.2.0.12 **2. Inverzní problém:**

4.2.0.13 Nyní naopak předpokládejme, že známe míru inflace za jednotku času v každém bodě $t \in \mathbb{R}$.

4.2.0.14 (21) is differential equation for the state function $f$. The solution is

$$f(x) = e^{\left(\int_0^x \ln(\bar{\iota}(s)+1)\mathrm{d}s\right)}\cdot C \tag{22}$$

We determine the value of $C$ substituting constant function for $\bar{\iota}: t \mapsto \Xi$. It have to be fulfilled that:

$$f(x) = (\Xi + 1)^x \cdot f(0) \tag{23}$$

but

$$f(x) = e^{\left(\int_0^x \ln(\Xi+1)\mathrm{d}s\right)} \cdot C = C \cdot (\Xi + 1)^x \tag{24}$$

then:

$$C = f(0) \tag{25}$$

And the state function has the form:

$$f: x \mapsto e^{\left(\int_0^x \ln(\bar{\iota}(s)+1)\mathrm{d}s\right)} f(0) \tag{26}$$

where an $\bar{\iota}(t)$ is interest rate per unit of time in time $t$.

4.2.0.15 **2.5. Example**

4.2.0.16 Let us suppose, that we can check the rate of inflation per unit of time in every moment (it can be the result of measuring and some general theory). We know, that in time $0$ the rate of unit time inflation was $0.1$ and in time $1$ the rate of unit time inflation was $0.2$.

4.2.0.17 Předpokládejme, že uvnitř intervalu $(0, 1)$ se hodnoty inflace za jednotku času měnily podle jedné z následujících možností (skokem v jednom y obou krajních bodů, lineárně, kvadraticky): in this four following ways:

$$\bar{\iota}_1(u) := \begin{cases} 0.1, & \text{if } u < 1 \\ 0.2, & \text{if } u \geq 1 \end{cases}, \quad \bar{\iota}_2(u) := \frac{u^2}{10} + 0.1, \quad \bar{\iota}_3(u) := \frac{u}{10} + 0.1, \quad \bar{\iota}_4(u) := \begin{cases} 0.1, & \text{if } u \leq 0 \\ 0.2, & \text{if } u > 0 \end{cases} \tag{27}$$

Míra inflace za dobu $(0, 1)$ byla v každém z těcto čtyř případů jiná. In general, we have

$$\iota(\langle 0, 1\rangle) = \mathrm{e}^{\left(\int_0^1 (\ln(1+\bar{\iota}(u)\,\mathrm{d}\,u\right)} - 1 \tag{28}$$

So, in our four cases we obtain:

$$\bar{\iota} = \bar{\iota}_1 = 0.1: X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1.1)\ \mathrm{d}\,u\right)} - 1 = 0.1 \tag{29}$$

$$\bar{\iota} = \bar{\iota}_2 = u \mapsto \frac{1}{10}u^2 + 0.1: X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1.1+u^2/10)\ \mathrm{d}\,u\right)} - 1 = 0.132945354\ldots \tag{30}$$

$$\bar{\iota} = \bar{\iota}_3 = u \mapsto \frac{1}{10}u + 0.1: X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1.1+u/10)\ \mathrm{d}\,u\right)} - 1 = 0.149637533\ldots \tag{31}$$

$$\bar{\iota} = \bar{\iota}_4 = 0.2: X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1.2)\ \mathrm{d}\,u\right)} - 1 = 0.2 \tag{32}$$

4.2.0.18 **3. Interest rate:** Předpokládejme, že v každém okamžiku času $t$ známe nominální hodnotu kapitálu $f(t)$, jehož množství roste nebo klesá pouze úročením. Potom v souladu s obvyklou terminologií nazýváme relative increment of the capital during the time the interest rate $xi$:

$$\xi(\langle t_1, t_2\rangle) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{x(t_1)} \tag{33}$$

a tento vztah je stejný jako vztah (2), protože míra inflace je úroková míra, kterou se úročí ceny.

4.2.0.19 Je celkem obvyklé, že banka vyhlašuje úrokovou sazbu p. a., i když ji mění častěji, než jednou za rok. Je obvyklé, že střadatelé uloží peníze a chtějí je vybrat podle svých potřeb jindy, než po nějaké předem stanovené periodě času a banky jim to umožní. Ve všech těchto případech se stanovuje úrok jako odměna za dočasné přenechání práva disponovat s penězy zpravidla takto: Jsou-li $I_i$ úrokové sazby p. a. konstantní na intervalech $I_i = (t_i, t_{i+1})$ ; $i = 0 \ldots n$.

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1 + I_i)^{(t_{i+1}-t_i)} \tag{34}$$

(a úrok s touto mírou je připsán v okamžiku $t_n$). Poznamenejme ještě, že jednotkou měření času je časový interval na který je normovaná úroková míra (v našem případě je p. a., tedy jednotkou času je rok) a že banky obvykle zaokrouhlují časové údaje na celé dny, což může být jev pouze dočasný.

4.2.0.20 V obchodních vztazích je obvyklé, že se úroková míra stanovuje jako po částech konstantní funkce a její hodnota se normuje, ale v obecných makroekonomických a ekonometrických úvahách, pokud například půjde o agregátní úrokovou sazbu, to již po částech konstantní funkce být nemusí.

4.2.0.21 V učebnicích finanční matematiky bývá definováno tzv. spojité úročení, kde je hodnota stavové funkce $x$ v závislosti na úrokové míře $\xi$ dána vztahem:

$$x(t) = x(0)e^{\int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}\,s} \tag{35}$$

namísto vztahu

$$x(t) = x(0)e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s))\,\mathrm{d}\,s} \tag{36}$$

jako v (22). Funkce 35 je řešením rovnice

$$D(x)(t) = \xi(t) \cdot x(t) \tag{37}$$

namísto rovnice

$$D(x)(t) = \ln(1+\xi(t)) \cdot x(t)$$

jako v (21). Funkce (35) ale není zobecněním složeného úročení (33) protože v ustáleném stavu nedává výsledek

$$x(t) = x(0) \cdot (1+\xi)^t, \tag{38}$$

proto je například nelze použít pro kvantitativní výpočty na datech v případě inflace a v příkladě (29) by nám vyšlo

$$e^{\int_0^1 0.1du} - 1 = 0.105170918,$$

v příkladě (30) by nám vyšlo

$$e^{\int_0^1 1/10\,u^2+0.1du} - 1 = 0.142630812,$$

v příkladě (31) by nám vyšlo

$$e^{\int_0^1 1/10\,u+0.1du} - 1 = 0.161834243$$

a v příkladě (32) by nám vyšlo

$$e^{\int_0^1 0.2du} - 1 = 0.221402758$$

a první a poslední výsledek jsou očividně nesprávné. Lze tedy říci, že inflace se nechová jako tzv spojité úročení.

4.2.0.22 **3.6. Theorem:** The formula (38) je speciálním případem formule (22) pro konstantní úrokovou míru a formule (34) je speciálním případem formule (22) pro po částech konstantní úrokovou míru.

4.2.0.23 *Proof:* Let us suppose, that $\iota(t) = I$ is constant:

$$e^{\left(\int_0^t \ln(1+I)\,\mathrm{d}\,u\right)} = e^{(t\cdot\ln(1+I))} = e^{\left(\ln(1+I)^t\right)} = (1+I)^t \tag{39}$$

q. e. d.

4.2.0.24 Now let us suppose, that $\iota$ is piecewise constant and that it has value $I_i$ in every point of the interval $I_i = (t_i,\, t_{i+1})$ ; $i = 0 \ldots n$. Let $\chi_A$ be the characteristic function of the set A, then $\iota(t) = \sum \chi_{(t_i,t_{i+1})} \cdot I_i$

$$= e^{\left(\int_0^t \ln(1+\chi_{(t_i,t_{i+1})}\cdot I_i\,\mathrm{d}\,u\right)} = e^{\left(\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}\ln(1+I_i) - t_i\ln(1+I_i))\right)} =$$
$$= \prod_{i=0}^{n-1} e^{(t_{i+1}-t_i)\ln(1+I_i)} = \prod_{i=0}^{n-1} e^{\ln(1+I_i)^{(t_{i+1}-t_i)}} = \prod_{i=0}^{n-1} (1+I_i)^{(t_{i+1}-t_i)} \tag{40}$$

q. e. d.

4.2.0.25 Funkcionál

$$\iota \mapsto e^{\int_0^t \ln(1+\iota(s))\mathrm{d}s}$$

je spojitý v topologii stejnoměrné konvergence. Důležitos věty 38 plyne z následujícího lemmatu:

4.2.0.26 **3.7. Lemma:** pro každou spojitou funkci $\iota$ definovanou na uzavřeném intervalu existuje posloupnost piecewise konstant funkcí $\xi_i$ takových, že $\xi_i \to \iota$

4.2.0.27 *Proof:* Předpokládejme, že $f$ je spojitá. Podle předpokladu je $\mathrm{Dom}(f)$ kompaktní. Zvolíme nějaké $\epsilon$ kladné. Pro každé $x \in \mathrm{Dom}(f)$ najdeme okolí $O(x)$ takové, aby $F(O(x)) \subset O_{\epsilon/2}(f(x))$. $O(x)$ tvoří pokrytí $\mathrm{Dom}(f)$ vybereme konečné podpokrytí $\Omega$. Definujeme $\delta = \min_{U\in\Omega}(\mathrm{Diam}(U))$, kde $(\mathrm{Diam}(U))$ je průměr množiny $U$. Rozdělíme $\mathrm{Dom}(f)$ na $n$ disjunktních podintervalů $(J_i^\epsilon)_i = 1^n$ délky $\delta$. Pro každý interval $J_i^\epsilon$ vybereme nějaký bod $x_i$, který leží uvnitř něj a označíme $y_i = f(x_i)$. Definujeme: $x \in J_i^\epsilon \implies \zeta_\epsilon(x) = y_i$. Potom $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$: $|f(x) - \zeta_\epsilon(x)| \leq \epsilon$. A pro $\xi_n = \zeta_{\frac{1}{2^n}}$ jsou splněny předpoklady lemma.

4.2.0.28 **3.8. Corollary:** (38) říká, že vzorec (34) je speciálním případem vorce (22). Pro funkci, která má jen konečně mnho bodů nespojitosti můžeme provést aproximaci na každém intervalu, na kterém je spojitá jako v lemmatu (40). A tedy vzorec (22) je limitním případem vzorce (34).

4.2.0.29 Následuje několik aplikací vzorce (22):

4.2.0.30 **4. Boundary interest rate:** If the interest rate is constant and positive, the state function is increasing and constant. If it is positive, but very quickly decreasing, the state function will be concave. What interest rate makes the state function afine (polynomial of degree 1)?

4.2.0.31 State function is

$$t \mapsto x(0)e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s))ds} \tag{41}$$

its derivative is

$$t \mapsto x(0)\ln(1+\xi(t))e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s))ds} \tag{42}$$

and the second derivative is

$$t \mapsto \frac{x(0)e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s))ds}\left(\frac{d}{dt}\xi(t) + (\ln(1+\xi(t)))^2 + (\ln(1+\xi(t)))^2\,\xi(t)\right)}{1+\xi(t)} \tag{43}$$

We are looking for the interest rate, which makes the second derivative equal to zero. If $x(0) \neq 0$ and $\xi > 0$, second derivative is equal to zero for such a $\xi$, which are the solutions of differential equation

$$\frac{d}{dt}\xi(t) + (\ln(1+\xi(t)))^2 + (\ln(1+\xi(t)))^2\,\xi(t) = 0 \tag{44}$$

i. e. we solve the differential equation

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = -((\ln(1+\xi(t)))^2\,(1+\xi(t)). \tag{45}$$

Its solution fulfilled the algebraical equation

$$-\left(\ln(1+\xi(t))\right)^{-1} + t = C \tag{46}$$

hence it is any of the functions

$$t \mapsto \xi(t) = e^{\left(\frac{1}{t-C}\right)} - 1 \tag{47}$$

for all constant $C$. We express $C$ using the initial condition

$$C = -\frac{1}{\ln(1+\xi(0))}$$

and we have

$$\xi(t) = e^{\left(\frac{1}{t+\frac{1}{\ln(1+\xi(0))}}\right)} - 1 = (1+\xi(0))^{\left(\frac{1}{t\ln(1+\xi(0))+1}\right)} - 1 \tag{48}$$

If we put this interest rate into the rule for interesting () we obtain:

$$x(t) = x(0)\,e^{\left(\int_0^t \ln\left((1+\xi(0))^{\left(\frac{1}{s\ln(1+\xi(0))+1}\right)}\right)ds\right)} = x(0)\,(t\ln(1+\xi(0))+1) \tag{49}$$

and this really is an affine function. We can conclude: If the interest rate has in the time 0 value $\xi(0)$ and if on the dependence on the time grows more quickly (decrease slowly) than function

$$t \mapsto (1+\xi(0))^{\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln(1+\xi(0))+1}\right)} - 1 \tag{50}$$

the state function is convex. If it decreases more quickly, the state function is concave.

4.2.0.32 **5. Example with the real data of index of prices of non-regulated prices in Czech republic:**.

4.2.0.33 We choose the year as a unit of time. We measured the index of non-regulated prices in every moment $P = \left\{1993 + \frac{i}{12}\right\}$, where $i$ is a natural number less or equal to 120. The values are relative. As a result of the measurement, CPI is a function cutting the points: $(1993+\frac{1}{12}; 91.76)$, $(1993+\frac{1}{6}; 92.97)$, $(1993+\frac{1}{4}; 93.54)$, $(1993+\frac{1}{3}; 93.94)$, $(1993+\frac{5}{12}; 94.32)$, $(1993+\frac{1}{2}; 94.62)$, $(1993+\frac{7}{12}; 95.42)$, $(1993+\frac{2}{3}; 96.10)$, $(1993+\frac{3}{4}; 97.53)$, $(1993+\frac{5}{6}; 98.62)$, $(1993+\frac{11}{12}; 99.17)$, $(1994; 100.0)$, $(1994+\frac{1}{12}; 100.76)$, $(1994+\frac{1}{6}; 101.12)$, $(1994+\frac{1}{4}; 101.40)$, $(1994+\frac{1}{3}; 101.88)$, $(1994+\frac{5}{12}; 102.27)$, $(1994+\frac{1}{2}; 103.45)$, $(1994+\frac{7}{12}; 103.81)$, $(1994+\frac{2}{3}; 104.62)$, $(1994+\frac{3}{4}; 106.13)$, $(1994+\frac{5}{6}; 107.45)$, $(1994+\frac{11}{12}; 108.46)$, $(1995; 109.23)$, $(1995+\frac{1}{12}; 110.57)$, $(1995+\frac{1}{6}; 111.62)$, $(1995+\frac{1}{4}; 111.97)$, $(1995+\frac{1}{3}; 112.72)$, $(1995+\frac{5}{12}; 113.26)$, $(1995+\frac{1}{2}; 114.13)$, $(1995+\frac{7}{12}; 113.47)$, $(1995+\frac{2}{3}; 113.41)$, $(1995+\frac{3}{4}; 114.41)$, $(1995+\frac{5}{6}; 115.20)$, $(1995+\frac{11}{12}; 116.09)$, $(1996; 116.82)$, $(1996+\frac{1}{12}; 118.97)$, $(1996+\frac{1}{6}; 119.62)$, $(1996+\frac{1}{4}; 120.43)$, $(1996+\frac{1}{3}; 121.15)$, $(1996+\frac{5}{12}; 121.96)$, $(1996+\frac{1}{2}; 123.06)$, $(1996+\frac{7}{12}; 123.18)$, $(1996+\frac{2}{3}; 122.67)$, $(1996+\frac{3}{4}; 123.04)$, $(1996+\frac{5}{6}; 123.76)$, $(1996+\frac{11}{12}; 124.44)$, $(1997; 125.23)$, $(1997+\frac{1}{12}; 126.28)$, $(1997+\frac{1}{6}; 126.71)$, $(1997+\frac{1}{4}; 126.85)$, $(1997+\frac{1}{3}; 127.45)$, $(1997+\frac{5}{12}; 127.60)$, $(1997+\frac{1}{2}; 129.42)$, $(1997+\frac{7}{12}; 129.67)$, $(1997+\frac{2}{3}; 130.77)$, $(1997+\frac{3}{4}; 131.58)$, $(1997+\frac{5}{6}; 132.33)$, $(1997+\frac{11}{12}; 133.01)$, $(1998; 133.75)$, $(1998+\frac{1}{12}; 135.76)$, $(1998+\frac{1}{6}; 136.71)$, $(1998+\frac{1}{4}; 136.85)$, $(1998+\frac{1}{3}; 137.12)$, $(1998+\frac{5}{12}; 137.26)$, $(1998+\frac{1}{2}; 137.81)$, $(1998+\frac{7}{12}; 137.53)$, $(1998+\frac{2}{3}; 137.12)$, $(1998+\frac{3}{4}; 137.25)$, $(1998+\frac{5}{6}; 136.84)$, $(1998+\frac{11}{12}; 136.43)$, $(1999; 136.02)$, $(1999+\frac{1}{12}; 136.70)$, $(1999+\frac{1}{6}; 136.57)$, $(1999+\frac{1}{4}; 136.29)$, $(1999+\frac{1}{3}; 136.84)$, $(1999+\frac{5}{12}; 136.70)$, $(1999+\frac{1}{2}; 136.98)$, $(1999+\frac{7}{12}; 136.98)$, $(1999+\frac{2}{3}; 137.11)$, $(1999+\frac{3}{4}; 136.98)$, $(1999+\frac{5}{6}; 136.98)$, $(1999+\frac{11}{12}; 137.39)$, $(2000; 138.21)$, $(2000+\frac{1}{12}; 139.04)$, $(2000+\frac{1}{6}; 139.32)$, $(2000+\frac{1}{4}; 139.32)$, $(2000+\frac{1}{3}; 139.32)$, $(2000+\frac{5}{12}; 139.74)$, $(2000+\frac{1}{2}; 140.71)$, $(2000+\frac{7}{12}; 141.42)$, $(2000+\frac{2}{3}; 141.70)$, $(2000+\frac{3}{4}; 141.56)$, $(2000+\frac{5}{6}; 141.98)$, $(2000+\frac{11}{12}; 142.13)$, $(2001; 142.41)$, $(2001+\frac{1}{12}; 143.26)$, $(2001+\frac{1}{6}; 143.26)$, $(2001+\frac{1}{4}; 143.26)$, $(2001+\frac{1}{3}; 143.84)$, $(2001+\frac{5}{12}; 144.99)$, $(2001+\frac{1}{2}; 146.87)$, $(2001+\frac{7}{12}; 147.90)$, $(2001+\frac{2}{3}; 147.46)$, $(2001+\frac{3}{4}; 145.98)$, $(2001+\frac{5}{6}; 145.84)$, $(2001+\frac{11}{12}; 145.69)$, $(2002; 145.98)$, $(2002+\frac{1}{12}; 147.30)$, $(2002+\frac{1}{6}; 147.30)$, $(2002+\frac{1}{4}; 147.0)$, $(2002+\frac{1}{3}; 147.30)$, $(2002+\frac{5}{12}; 147.15)$, $(2002+\frac{1}{2}; 146.71)$, $(2002+\frac{7}{12}; 147.15)$, $(2002+\frac{2}{3}; 146.85)$, $(2002+\frac{3}{4}; 145.82)$, $(2002+\frac{5}{6}; 145.82)$, $(2002+\frac{11}{12}; 145.68)$, $(2003; 147.97)$. Now we are going to approximate the values of CPI with the function. There are a lot of ways of how to do it. We shall measure the accuracy of approximation as the sum of squares of differences between values of function and measured values in points where the measurement is made. Trivial approximation is to put together points by abscissas. We obtain piecewise affine function: and the accuracy is equal to 0. In this case the rate of the year inflation $\iota$ is the function:

$$\iota(t) = \begin{cases}
e^{14.52058082\,(14.52058082\,t-28847.75831)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.00000, 1993.08333\rangle \\
e^{6.840273611\,(6.840273611\,t-13540.26521)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.08333, 1993.16666\rangle \\
e^{4.799616031\,(4.799616031\,t-9472.894168)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.16666, 1993.25000\rangle \\
e^{4.560182407\,(4.560182407\,t-8995.643826)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.25000, 1993.33333\rangle \\
e^{3.600144006\,(3.600144006\,t-7081.966879)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.33333, 1993.41666\rangle \\
e^{9.599232061\,(9.599232061\,t-19040.64915)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.41666, 1993.50000\rangle \\
e^{8.160326413\,(8.160326413\,t-16172.19129)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.50000, 1993.58333\rangle \\
e^{17.16068643\,(17.16068643\,t-34115.15901)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.58333, 1993.66666\rangle \\
e^{13.07895368\,(13.07895368\,t-25977.54380)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.66666, 1993.75000\rangle \\
e^{6.600264011\,(6.600264011\,t-13060.65643)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.75000, 1993.83333\rangle \\
e^{9.960398416\,(9.960398416\,t-19760.20401)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.83333, 1993.91666\rangle \\
e^{9.120364815\,(9.120364815\,t-18085.24781)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.91666, 1993.99999\rangle \\
e^{4.320172807\,(4.320172807\,t-8513.664947)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1993.99999, 1994.08332\rangle \\
e^{3.359731222\,(3.359731222\,t-6598.464123)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1994.08332, 1994.16666\rangle \\
e^{5.760230409\,(5.760230409\,t-11385.45902)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1994.16666, 1994.24999\rangle \\
e^{4.680187207\,(4.680187207\,t-9231.582863)^{-1}} - 1 & t \in \langle 1994.24999, 1994.33332\rangle \\
\vdots
\end{cases}$$

and the rate of inflation per the time interval $\langle 1993.5, 1994\rangle$ equals

$$\frac{\mathrm{CPI}(1994)}{\mathrm{CPI}(1993.5)} - 1 = e^{\int_{1993.5}^{1994} \ln(1+\iota(z))\,\mathrm{d}\,z} = 0.05596 \tag{51}$$

4.2.0.34 We can use more sophisticated approximation, for instance: let us approximate a trend by function $151.558469453+53.8746490595\cdot(5/12)^{(x-1992)}-108.487078769\cdot(3/4)^{(x-1992)}$ which is the best approximation of the measured values by means of pair of functions out of the set $\left\{(i/12)^{(x-1992)};\ (i/12)^{(x-1993)};\ (x-1992)^{(i/12)};\ (x-1993)^{(i/12)};\ \ln(x-1992);\ \ln(x-1991)\right\}_{i=1}^{24}$ and constant (accuracy (the sum of squares of distances between values of the functions and the measured values) equal 237.324366060) Then let us approximate the rest by linear combination of functions

$$\{\sin(\pi x/i);\cos(\pi x/i);x\sin(\pi x/i);x\cos(\pi x/i)\}_{i=1}^{5} \tag{52}$$

Let us omit 15 of the functions from this set of functions, the absence of which brings the least loss of accuracy. We obtain the following approximation of CPI: $\mathrm{CPI}(t)=151.558469453+53.8746490595\cdot(5/12)^{(x-1992)}-108.487078769\cdot(3/4)^{(x-1992)}-0.08688205539+438.678532386\cdot\sin(1/5\cdot x\cdot\pi)-0.219746118617\cdot x\cdot\sin(1/5\cdot x\cdot\pi)-0.392448110715\cdot x\cdot\cos(1/2\cdot x\cdot\pi)+0.000156347532197\cdot x\cdot\sin(x\cdot\pi)+782.647022069\cdot\cos(1/2\cdot x\cdot\pi)$ (accuracy (the sum of squares of distances between values of the functions and the measured values) equals 84.8709833772) Then the rate of inflation per year has in the time $x$ the value

$$e^{53.8746490595\,\frac{A}{B}}$$

$$\begin{aligned}
A=\left(\frac{5}{12}\right)^{x-1992}&\ln(\frac{5}{12})-108.487078769\ (3/4)^{x-1992}\ln(3/4)+87.73570648\ \cos(1/5\,x\pi)\pi\\
&-0.219746118617\ \sin(1/5\,x\pi)-0.04394922372\,x\cos(1/5\,x\pi)\pi\\
&-0.392448110715\ \cos(1/2\,x\pi)+0.1962240554\,x\sin(1/2\,x\pi)\pi\\
&+0.000156347532197\ \sin(x\pi)+0.000156347532197\,x\cos(x\pi)\pi\\
&-391.3235111\ \sin(1/2\,x\pi)\pi\\
B=151.4715874+53.8746490595&\left(\frac{5}{12}\right)^{x-1992}-108.487078769\ (3/4)^{x-1992}+438.678532386\ \sin(1/5\,x\pi)\\
&-0.219746118617\,x\sin(1/5\,x\pi)-0.392448110715\,x\cos(1/2\,x\pi)\\
&+0.000156347532197\,x\sin(x\pi)+782.647022069\ \cos(1/2\,x\pi)^{-1}
\end{aligned}$$

and

$$\frac{\mathrm{CPI}(1994)}{\mathrm{CPI}(1993.5)}-1=e^{\int_{1993.5}^{1994}\ln(1+\iota(z))\,\mathrm{d}\,z}=0.04737 \tag{53}$$

4.2.0.35 But we can approximate the rate of inflation directly. If $(t_{n_i})_{i\in J}$, $i<j\Rightarrow t_i<t_j$ are the moments, where CPI is measured, then we have to fulfil the equation:

$$\forall i\in J\colon \int_{t_i}^{t_{i+1}}\ln\left(1+\iota(t)\right)\mathrm{d}\,t=\ln\circ\mathrm{CPI}(t_{n+1})-\ln\circ\mathrm{CPI}(t_n) \tag{54}$$

and the accuracy of approximation should be measured as the measure of unreliableness of the equation.

4.2.0.36 More precisely: Let us choose the function:

$$\begin{aligned}
\iota\colon x\longmapsto\ &0.04944210+0.009094682\ \cos\left(x\pi\right)+0.01215932\ \sin\left(2\,x\pi\right)+\\
&+0.01823419\ \sin\left(4\,x\pi\right)+0.05263253\ \sin\left(1/3\,x\pi\right)-\\
&-0.009667420\ \cos\left(1/3\,x\pi\right)-0.07212055\ \cos\left(1/4\,x\pi\right)+0.02834145\ \sin\left(1/2\,x\pi\right).
\end{aligned} \tag{55}$$

The question is, how accurately this function corresponds to the measured values. The interesting thing is, that the function does not approximate the measured values, but some other values, which depend on the measured ones. And the attitude towards this two values is given by (54). So if we can compare the exactness of approximation with the same measure as we did in the previous cases, we have to compute the number

$$\sum_{i=1}^{120}\left(e^{\int_{t_i}^{t_{i+1}}\ln(1+\iota(t))\,\mathrm{d}\,t}-\frac{\mathrm{CPI}(t_{n+1})}{\mathrm{CPI}(t_n)}\right)^2 \tag{56}$$

and this is the only relevant measure. In our case we obtain: 4.9914 We used the simplest function for the approximation of rate of inflation we considered yet, and it gives us far the best approximation we have obtained!

4.2.0.37 **References:**
[1] Aczél, J.: Lectures on functional Equations and Their Applications, New York, Academic Press 1966
[2] Barro, Robert J., Sala-i-martin, Xavier: Economic Growth, MIT Press Cambridgr, Massachusetts, London, England 1999, ISBN 0-262-02459-4
[3] Dieudonné, J.: Treatise on analysis, Vol. III, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-III, Academic Press. New York – London, 1972
[4] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: Stochastic Modeling in economics and Finance, Kluwert Academic Publishers, 2002, ISBN 1-4020-0840-6.
[5] Studený V.: Functional Equation of the Rate of Inflation, e-print archive of Coronell University, 2003, www.arxiv.org

[6] **6. Conclusion:**

[7] Our sketch brings an open problem: what does the space of solution of (54) look like and what is the space of functions, the rate of inflation lies in. How can it help us to understand what kind of measure is this one which we called rate (of interest or inflation. . . ). It shows us the possibility to approximate the measure of inflation except of the index of prices and it suggests, that the solution should be better.

[8] **7. Apendix:** Maple programs for computation. Let us suppose that in iota we have the function for approximation, in our case:

```
[9] > iota:=.4944210e-1 + .9094682e-2 * cos(x*Pi) + .1215932e-1 * sin(2*x*Pi) + .1823419e-
1 * sin(4*x*Pi)+ .5263253e-1 * sin(1/3*x*Pi) - .9667420e-2 * cos(1/3*x*Pi) - .7212055e-
1 * cos(1/4*x*Pi)+ .2834145e-1 * sin(1/2*x*Pi);
```

[9] Let us suppose, that the values of CPI are in the file Values and the corresponding moments of time, in which the values are measured, are in file Points. Then we can compute the preciseness of approximation using the following program:

```
[10] > Mistake := 0;
[11] > for i to NumberOfPoints do
[12] > A := evalf(int(ln(1+iota),x = Points[1] .. Points[i+1]));
[13] > A := Values[1]*exp(A);
[14] > Mistake := Mistake+(A-Values[i+1])^2
[15] > end do:
[16] > print(Sum('Delta'^2,i)=Mistake);
```

**[1] References:**
[1] Aczél, J.: Lectures on functional Equations and Their Applications, New York, Academic Press 1966
[2] Dieudonné, J.: Treatise on analysis, Vol. III, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-III, Academic Press. New York – London, 1972
[3] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: Stochastic Modeling in economics and Finance, Kluwert Academic Publishers, 2002, ISBN 1-4020-0840-6.
[4] Studený V.: Functional Equation of the Rate of Inflation, e-print archive of Coronell University, 2003, www.arxiv.org