MODELY s ROZLOŽENÝMI ZPOŽDĚNÍMI

V následující části popíšeme základní charakteristiky ekonomickomatematických modelů , jejichž základní vlastností je, že operují se zpožděnými hodnotami ekonomických veličin. Takové modely se vyskytují velmi frekventovaně v mnoha oblastech formalizovatelné ekonomické teorie, zpožděné veličiny se objevují zejména u spotřebních a investičních funkcí, dále u vztahů popisujících např. vývoj nezaměstnanosti, stavu zásob apod. Je tedy nesporně užitečné vyložit alespoň základní poznatky o tom, čím se přítomnost zpožděných proměnných vyznačuje a jaké specifické rysy s sebou přináší.

Omezíme se přitom jen na nejcharakterističtější specifikace vztahů obsahujících zpožděné proměnné, aniž si budeme všímat dopadů výskytu zpožděných proměnných na statistické vlastnosti (zejména při odhadu modelových parametrů). Ty jsou ostatně předmětem často velmi podrobných analýz prováděných ekonometrickými prostředky, kde, jak známo, přítomnost zejména zpožděných endogenních proměnných vyžaduje aplikaci specifických postupů (u vícerovnicových modelů např. nasazení metod simultánního odhadu modelových parametrů, jako 2SLS, 3SLS, LIML apod.)

V následujícím výkladu **budeme předpokládat obecný lineárně aditivní vztah** mezi závisle proměnnou skalární veličinou Y a nezávisle proměnnou (rovněž skalární veličinou) X, tj. vztah

(1) $$Y = a + bX.$$

K rozlišení toho, zda z hlediska vývoje ekonomických proměnných budeme považovat čas přiřazený průběhu obou veličin (shodně) za diskrétní či spojitý, budeme v prvém případě psát :

(1a) $$Y_t = a + bX_t$$, ve druhém pak

(1b) $$Y(t) = a + bX(t) \quad .$$

Pro oba tyto případy vyložíme níže základní poznatky vztahující se k přítomnosti zpožděných ekonomických veličin v lineárním kauzálním modelu.

V dalším se ukáže se účelným zavést pojem **potenciální hodnota závisle proměnné.** K tomu účelu zavedeme vztah

(2) $$Z_t = a + bX_t$$

jako veličinu, která popisuje lineární (nezpožděný) vztah mezi závisle proměnnou Y a nezávisle proměnnou X. **Na vztah tento lze pohlížet jako na určitou aproximaci vysvětlované veličiny Z pomocí lineární transformace založené na vysvětlující veličině X**..

1. Situace s diskrétním časem

1A - Případ odkladu o pevnou dobu r

Nejprve se zabývejme situací, kdy vliv působení nezávisle proměnné X na závisle proměnnou Y je jednorázový se zpožděním rovným pevné hodnotě **r**. Tento případ zapíšeme jako

(3) $$Y_t = a + bX_{t-r}$$, kde

r je pevná délka zpoždění (odkladu), s nímž veličina X ovlivňuje závisle proměnnou Y. Nejčastějším případem (v ekonomických aplikacích vycházejících rovněž z obvyklých hodnot zpoždění) **je zpoždění o 1 období** odpovídající vztahu $\mathbf{Y_t = a + b.X_{t-1}}$, tedy pro r = 1.

Ve vztahu k potenciální hodnotě závisle proměnné získáváme pro případ odkladu o pevnou dobu okamžitě vztah

(3a) $$Y_t = Z_{t-r} = a + bX_{t-r} \quad ,$$

1B - Případ obecného rozloženého zpoždění

Případ uvedený v 1A rozšíříme o možnost, že hodnota veličina Y v čase t nemusí záviset toliko na jediné zpožděné hodnotě veličiny X, nýbrž obecně na celé posloupnosti (třeba nekonečné) takových hodnot. Znamená to tedy připustit platnost vztahu

(4) $\mathbf{Y_t = a + b_1X_{t-1} + b_2X_{t-2} + b_3X_{t-3} + ... + b_rX_{t-r} ......}$ atd.

s tím, že pro případ nekonečné posloupnosti musíme doplnit předpoklad (aby závisle proměnná byla konečná veličina) , že **součet** $\mathbf{\sum\ b_1 + b_2 + b_3 + ...}$ **je konečný**.

Pokud bychom tímto vztahem popsali např. **závislost mezi spotřebou C a důchodem Y**, tzn.

(5) $\mathbf{C_t = a + b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + b_3 Y_{t-3} + ...}$

(zde důchod Y vystupuje v roli nezávisle proměnné)

mohli bychom přirozeně příslušným parametrům přisoudit ekonomicky interpretovatelný význam. Tak bychom parametry $\mathbf{b_i}$ mohli nazvat **parciálními mezními sklony ke spotřebě**, zatímco součtová hodnota **b** by vyjadřovala **celkový sklon ke spotřebě**.

V obecném případě **se součinitele $\mathbf{b_k}$ nazývají váhovými koeficienty** (bez ohledu na to, zda je jich konečný nebo nekonečný počet). Dosti často (ne však nutně) se předpokládá, že součet koeficientů u všech zpožděných nezávisle proměnných je jedničkový neboli, že tyto koeficienty jsou normované, tzn.

$\mathbf{\sum b_1 + b_2 + b_3 + ... = 1,}$ jindy pouze, že součet je konečný, tzn.

$\mathbf{\sum b_1 + b_2 + b_3 + ... = b.}$ Normování na lze ostatně snadno provést.

Váhové koeficienty však nemusí být nutně všechny kladné.

Učiňme nyní několik poznámek :

a) je zřejmé, že **případ zpoždění o pevnou dobu je speciálním případem modelu rozloženého zpoždění**, pro který platí $\mathbf{b_k = 1}$ **a současně** $\mathbf{b_j = 0}$ **pro všechna** $\mathbf{j \neq k}$.

b) pokud by všechny veličiny $\mathbf{X_{k-r} = c}$ (reálná konstanta), potom též $\mathbf{Y = c}$.

Pro obecné rozložené zpoždění pak dostaneme vztah

(6) $\mathbf{Y_t = \lambda_1 Z_{t-1} + \lambda_2 Z_{t-2} + \lambda_3 Z_{t-3} + ...}$,

kde součet koeficientů λ_i dává dohromady 1, tj. $\mathbf{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + ... = 1.}$

Ověření: Abychom to ukázali, dosaďme z transformace **(2)** $\mathbf{Z_t = a + bX_t}$

zpětně za $\mathbf{X_t} = (\mathbf{Z_t - a)/b}$ **.** Po dosazení za $\mathbf{X_1, X_2, X_3}$ v (4) atd. obdržíme **:**

(7) $\mathbf{Y_t = a + b_1(Z_{t-1} - a)/b + b_2(Z_{t-2} - a)/b + b_3(Z_{t-3} - a)/b + ...}$ atd.

neboli po přeskupení členů

(7*) $\mathbf{Y_t = b_1(Z_{t-1})/b + b_2(Z_{t-2})/b + b_3(Z_{t-3})/b + ... + a - b_1.a/b - b_2.a/b - b_3.a/b}$

nebo též jinak zapsáno

(8) $\mathbf{Y_t = \lambda_1 Z_{t-1} + \lambda_2 Z_{t-2} + \lambda_3 Z_{t-3} + ... + a.(1 - b_1/b - b_2/b - b_3/b + ...).,}$

kde - poněvadž $b_1 + b_2 + b_3 + ... = b$, je obsah závorky na pravé straně roven nule. □ .

1C - Případ geometricky rozloženého zpoždění

Zvláštním (a patrně i nejdůležitějším) typem rozloženého zpoždění je **případ, kdy koeficienty b_1, b_2, b_3 představují jednotlivé, po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti** (tj. podíl b_{k+1} / b_k je roven konstantní hodnotě-kvocientu) Potom lze závisle proměnnou zapsat jako

$$(9) \qquad Y_t = a + d\,(1-c)\,(X_{t-1} + c.X_{t-2} + c^2 X_{t-3} + \ldots),$$

kde váhové koeficienty příslušné jednotlivým zpožděným proměnným s rostoucí hodnotou zpoždění klesají. **Kvocient je představován hodnotou c s podmínkou $c<1$** nutnou pro konvergenci geometrické řady. Máme tedy zaručeno, že platí $\sum b_1+b_2+b_3+\ldots = d$, v případě d =1 pak jedničkový.
Konstanta **a** (pouze) ovlivňuje střední hodnotu závisle proměnné Y_t.

Součet koeficientů u zpožděných proměnných je totiž

$$d\,(1-c)\,(1 + c + c^2 + c^3 + \ldots) = d\,(1-c)\,\frac{1}{1-c} = d.$$

Konečně geometricky rozložené zpoždění můžeme charakterizovat podobnou závislostí mezi Y a Z :

$$(10) \qquad Y_t = (1-c)\,(Z_{t-1} + c\,Z_{t-2} + c^2 Z_{t-3} + \ldots)$$ atd., což opět můžeme ověřit takto :

Vyjdeme ze zápisu (9), v němž dosadíme za $X_t = (Z_t - a) / d$ a obdobně za zpožděné hodnoty
$X_{t-1} = (Z_{t-1} - a) / d$, $X_{t-2} = (Z_{t-2} - a) / d$ atd. Dostaneme

$$Y_t = a + d.(1-c)\,[(Z_{t-1} - a) / d + c\,(Z_{t-2} - a) / d + c^2 (Z_{t-3} - a) / d + \ldots],$$

neboli po vykrácení všech výrazů v hranaté závorce konstantou d

$$(11) \qquad Y_t = a + (1-c)\,(Z_{t-1} - a + c.Z_{t-2} - c.a + c.Z_{t-3} - c^2.a + \ldots),$$

až konečně po přeskupení členů

$$Y_t = (1-c).(Z_{t-1} + c.Z_{t-2} + c^2.Z_{t-3} + \ldots) + a\,[1 - (1-c) - c.(1-c) - c^2.(1-c) - \ldots],$$

Součet prvků v hranaté závorce je však nulový, neboť součet všech záporných členů uvnitř závorky je roven 1. Odtud tedy obdržíme hledaný vztah

$$(10) \qquad Y_t = (1-c)\,(Z_{t-1} + c.Z_{t-2} + c^2.Z_{t-3} + \ldots)$$

Tento poslední případ můžeme dále upravit do vztahu popisujícího přírůstkovou relaci pro Y_t :
Zaveďme nejprve změnu veličiny Y jako první diferenci $\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t$ a uplatněme výraz (10)

$$(11) \qquad \frac{\Delta Y_t}{1-c} = (Z_t + c\,Z_{t-1} + c^2 Z_{t-2} + \ldots) - (Z_{t-1} + c\,Z_{t-2} + c^2 Z_{t-3} + \ldots) =$$

$$= Z_t - (1-c)\,(Z_{t-1} + c\,Z_{t-2} + c^2 Z_{t-3} + \ldots) = Z_t - Y_t .$$

Položme nyní $\lambda = 1-c$, kde $0 < \lambda < 1$. Potom zřejmě platí

$$(12) \qquad \Delta Y_t = -\lambda\,(Y_t - Z_t) \quad , \text{ kde } \quad Z_t = a + b\,X_t$$

Jestliže si dále uvědomíme, že jsme tento vztah odvodili pro pevnou délku období $\Delta_t = 1$, nebrání nám nic v tom, abychom uvažovali libovolnou hodnotu Δ_t místo jedničky. Vyplývá to z toho, že bychom mohli definovat jako $\mathbf{\Delta Y_t = Y_{t+\Delta t} - Y_t}$ a následně uvažovat průměrnou změnu $\mathbf{Y_t}$ mezi časovými okamžiky **t a t + Δt .** Potom platí

(13) $$\frac{\Delta Y_t}{\Delta_t} = -\lambda (Y_t - Z_t)$$

s následující věcnou interpretací : Marginální rychlost růstu (nebo průměrná za období Δ_t) je úměrná záporně vzatému rozdílu skutečné a potenciální hodnoty závisle proměnné. Koeficient této úměrnosti λ se nazývá rychlost reakce (a je přirozeně ovlivněn hodnotou parametru c)

Uvedený vztah tedy popisuje adaptaci /přizpůsobování závisle proměnné k její potenciální hodnotě, přičemž (při pevné rychlosti reakce) je přizpůsobení úměrné rozdílu mezi skutečnou a potenciální hodnotou této veličiny.

2. Situace se spojitým časem

Zde předpokládáme, že veličina **X**, která je funkcí času t, ovlivňuje jinou veličinu **Y** (jež je také funkcí času) prostřednictvím vztahu

(14) $\mathbf{Y(t) = f(X(t))}$, kde f je funkce vhodných vlastností (např. spojitá).

V dalším budeme předpokládat, že funkce f je lineární , takže vztah mezi oběma veličinami **X,Y** lze zapsat jako **Y(t) = a + b.X (t)**, kde **a, b jsou koeficienty lineární funkce** (a úrovňová konstanta, b parametr sklonu). Pokud bude v tomto vztahu existovat zpoždění, označíme "aproximovanou" hodnotu veličiny Y pomocí veličiny X jako **Z(t) = a + b.X(t)** , kde **Z** opět hraje roli potenciální hodnoty veličiny **Y**. Skutečná hodnota **Y** se tedy bude opožďovat za svou potenciální hodnotou **Z** , hodnota zpoždění je r.

2A - Případ odkladu o pevnou dobu r

Obdobně výše uvedenému diskrétnímu případu zapíšeme pro lineární vztah veličin **X,Y** a pro hodnotu zpoždění **r** vztah

(15) $$Y(t) = Z(t-r) = a + b.X(t-r)$$

pro pevnou délku odkladu r, s nímž veličina X ovlivňuje závisle proměnnou Y.

Potenciální hodnotu závisle proměnné Z(t) zavedeme analogicky jako v diskrétním případě

(16) $$Z(t) = a + b.X(t)$$

2B - Případ obecného spojitého rozloženého zpoždění

Místo nekonečné posloupnosti koeficientů b_1, b_2, ..., b_3, se kterou jsme pracovali v nespojitém případě, budeme uvažovat spojitou množinu hodnot nějaké funkce **f(τ)** spojitě se měnícího argumentu τ. Součet (konečný nebo nekonečný) se podobně nahradí integrálem . Dostaneme tedy

(17) $$Y(t) = a + b \int_0^\infty f(\tau)\, X(t-\tau)\, d\tau,$$ přičemž funkce f musí splňovat

podmínku (obdobnou jako u hustoty spojitého pravděpodobnostního rozdělení definovaného na celém oboru nezáporných hodnot)

$$\int_0^\infty f(\tau)\, d\tau = 1.$$

Omezení se na nezáporný definiční obor vyplývá z toho, že zpoždění uvažujeme jako kladné (v případě záporné hodnoty by šlo o předstih). Konkrétní tvar funkce **f(τ)** udává (spojitě vyjádřené) časové rozložení zpoždění, jinými slovy závislost hodnoty proměnné Y v libovolném čase t na hodnotě proměnné X v čase **(t-τ)**, tj. o dobu τ dříve. Přejdeme-li od proměnné **Y** k její potenciální hodnotě **Z**, nabude výraz (17) tvaru

(18) $$Y(t) = a + b \int_0^\infty f(\tau)\, Z(t-\tau)\, d\tau$$ se stejnými vlastnostmi funkce f jako dříve.

Poznámka : Odklad o pevnou dobu **r** by byl jistým speciálním případem vztahů (17), resp. (18), pokud bychom za **f(τ)** vzali "degenerovanou" váhovou funkci tvaru **f(τ) = 1 pro τ = r a f(τ) = 0** v jiných případech. (Jde o obdobu situace, kdy "náhodná veličina" s nulovým rozptylem přechází s jednotkovou pravděpodobností v nenáhodnou-konstantní veličinu a kdy je její hustota degenerována do jediného bodu s jedničkovou hodnotou). Další, matematický problém ovšem vyvstává v tom, že příslušná "distribuční" funkce F(τ) jako primitivní funkce k f(τ) není v bodě τ = r spojitá a že tedy by bylo místo **f(τ) dτ** nutno psát **d F(τ)** a užít *(místo Newtonova)* Stieltjesova integrálu.

2C - Případ exponenciálně rozloženého zpoždění

Jde o významný případ spojitého zpoždění analogický geometricky rozděleného zpoždění u nespojité situace. V tomto případě je váhová funkce představována hustotou exponenciálního rozdělení, která má tvar

(19) $$f(\tau) = \lambda . \exp(-\lambda\tau),$$ kde λ je kladná konstanta.

Lze snadno ověřit, že jde skutečně o hustotu , neboť integrál přes kladný obor hodnot je roven 1.

Ověření: Zavedeme-li do vzorce (18) , v němž je **Z = a + bX** , hustotu exponenciálně rozděleného zpoždění, dostaneme

(20) $$Y(t) = \lambda \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau)\, Z(t-\tau)\, d\tau$$

Při použití jednoduché substituce integrační proměnné **x = t - τ** , obdržíme

(21) $$Y(t) = \lambda \int_{-\infty}^{t} \exp(-\lambda(t-x))\, Z(x)\, dx = \lambda \exp(-\lambda t) \int_{-\infty}^{t} \exp(\lambda x).Z(x)\, dx$$

Platí tedy

(22) $$Y(t) \exp(\lambda t) = \lambda \int_{-\infty}^{t} \exp(\lambda x)\, Z(x)\, dx$$

a derivujeme-li obě strany podle času t (mj. horní meze integrálu), dostaneme

$$\lambda.Y(t).\exp(\lambda t) + \frac{dY(t)}{dt} \exp(\lambda t) = \lambda . \left\{ \int_{-\infty}^{t} \exp(-\lambda x)\, Z(x)\, dx \right\} = \lambda .\exp(\lambda t).\, Z(t)$$

Zkrátíme-li nyní obě strany výrazem **exp(λt)**, dostaneme

(23) $$\frac{dY(t)}{dt} = -\lambda.(Y(t) - Z(t))$$

což je tvar akcelerátoru při exponenciálně rozděleném zpoždění. □ .

Výsledný výraz je analogický vztahu (12) pro případ exponenciálně rozděleného zpoždění. Rychlost změny veličiny Z je vždy úměrná hodnotě **-λ.[Y(t) - Z(t)]** , tj. záporně vzatému rozdílu mezi skutečnou a potenciální hodnotou proměnné Y. **Koeficient úměrnosti λ je rychlost reakce** (akcelerátoru), jeho **převrácená hodnota T = 1/λ se nazývá časová konstanta zpoždění.**

Pojmenování lze vztáhnout jak k exponenciálně, tak k geometricky rozloženým zpožděním.