Ekonometrický model *(v nejužším slova smyslu)* ***je představován soustavou stochastických strukturních*** *(regresních)* ***rovnic a pomocných*** *(nestochastických)* ***rovnic, které vcelku představují zobrazení určitého výseku ekonomické reality.***

Proměnné ekonometrického dělíme *na :*

a) ***běžné (**tj.* ***nezpožděné) endogenní proměnné***
b) ***predeterminované (exogenní a zpožděné endogenní) proměnné***

Rozdílnost je dána tím, že ze statistického hlediska větší důležitost než rozdělení na exogenní/endogenní, je přisouzena korelovanosti vysvětlující proměnné s náhodnou složkou modelu (v téže rovnici). Zpožděné endogenní proměnné y_{t-1} ,..., y_{t-s} můžeme považovat za nekorelované s náhodnou složkou rovnice ε_t. Hodnoty y_{t-1} jsou v časovém okamžiku t již známé. Všechny predeterminované proměnné lze tedy považovat na nekorelované s náhodnou složkou modelu ε_t v čase t.

Rovnice ekonometrického modelu dělíme na

a) *rovnice chování (behaviorální) :*

představují vlastní jádro modelu a tvoří přepis ekonomických hypotéz o vztazích mezi proměnnými modelu formou regresních rovnic
Příkladem *může být* ***lineární makrospotřební funkce :***

$$C_t = b_0 + b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + b_3 C_{t-1} + b_4 C_{t-2} + \varepsilon_t$$

b) *rovnice bilanční, identity, distribuční normy apod. :*

vyjadřují relační vztahy mezi ekonomickými proměnnými, jsou vyvozeny z administrativních a účetních zákonitostí, neobsahují stochastické členy
Typickým příkladem *bilančního makroekonomického vztahu* ***je identita HDP :***

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + netExp_t + Ost_t$$

(rozklad HDP na spotřebu, investice, veřejné výdaje, čistý export a saldo mimořádných výnosů a ztrát). Jiným příkladem (distribuční norma) je např. členění HDP podle ekonomických sektorů/odvětví, kde se vytváří.

c) *technické/technologické rovnice*

popisují technologické zákonitosti : např. rovnice vyjadřující produkční nebo nákladovou funkci výroby benzínu v závislosti na objemu ropy

$$B_t = b_0 R_t . K_t^{\,b_1} . L_t^{\,b_2} . e^{\varepsilon_t}$$ resp. po zlogaritmování

$$\ln B_t = \ln b_o + \ln R_t + b_1 . \ln K_t + b_2 . \ln L_t + \varepsilon_t$$

Parametry ekonometrického modelu dělíme na :

a) ***strukturní*** *(jde o regresní koeficienty v regresních rovnicích)*
b) ***stochastické****(jde o prvky kovariančních matic náhodných složek)*

Jiné dělení parametrů modelu :

a) ***známé (s předepsanými hodnotami)***
b) ***s omezením (provázané navzájem nějakým vztahem)***
c) ***neznámé (jsou předmětem statistického odhadu)***

STRUKTURNÍ EKONOMETRICKÝ MODEL

*jako **obecná interdependentní soustava regresních rovnic***

STRUKTURNÍ TVAR ***modelu*** **je** *(základní)* **forma ekonometrického modelu, jejíž jednotlivé rovnice jsou přepisem vztahů vyvozených z ekonomické teorie (***konfirmatorní pojetí***) nebo verifikovaných hypotéz tvůrce modelu (***explorativní pojetí***) a která je charakteristická tím, že**

- **tvar matice B vztahů propojujících běžné endogenní proměnné je obecná matice m x m (mající však nulové diagonální prvky) .**
- **v kovarianční matici Σ náhodných složek mohou být korelovány náhodné složky různých rovnic v témže čase, ne však náhodné složky v různých časových okamžicích/pozorováních (ani téže rovnice).**

Strukturní tvar modelu se nejčastěji uvádí v zápisu (jde-li o zápis jen v proměnných) :

$$y = B.y + C.x + E \qquad (1)$$

$y_{[m;1]}$ **je vektor m běžných endogenních proměnných** soustavy m rovnic

$x_{[q;1]}$ **je vektor m predeterminovaných proměnných** soustavy m rovnic

$B_{[m;m]}$ **je matice koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným**

$C_{[m;q]}$ **je matice koeficientů příslušných predeterminovaným proměnným**

$\varepsilon_{[m;1]}$ **je vektor m náhodných složek (** ***poruch, disturbancí*** **) soustavy.**

Normování matice B **:**

abychom zajistili, že každá regresní rovnice vysvětluje právě jednu vysvětlovanou *(běžnou endogenní)* proměnnou, přisuzujeme diagonálním prvkům matice B nulové hodnoty (pokud by tomu tak nebylo, potom bychom vysvětlovaným proměnným přiřazovali zbytečně nejedničkové koeficienty)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{1m} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} & b_{3m} \\ .... & ...... & ..... & 0 & ..... \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{3q} \\ .... & ... & .... & .... & .... \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & c_{m4} & c_{mq} \end{pmatrix}$$

O matici B resp. I-B předpokládáme, že má plnou hodnost m *(dále budeme pracovat s inverzí matice **I-B**).* ***Matice C nebývá*** *zpravidla* ***nijak normována***

Z důvodů, které budou objasněny později (prevence proti vzniku identifikačního problému), však ***nesmí být ve všech rovnicích obsaženy všechny vysvětlující proměnné : proto musí být určitá část koeficientů v maticích B a C nulová****.*

Jiná častá **forma zápisu strukturního tvaru** (jde-li o zápis jen v proměnných) **je**

$$B.y + C.x = E \qquad (2)$$

kde význam všech veličin (proměnných i parametrů) **je shodný s předchozí specifikací (1), avšak normování matice B je odlišné :**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{1m} \\ b_{21} & 1 & b_{23} & b_{24} & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & 1 & b_{34} & b_{3m} \\ .... & ...... & ..... & 1 & ..... \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{3q} \\ .... & ... & .... & .... & .... \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & c_{m4} & c_{mq} \end{pmatrix}$$

Pracujeme-li s pozorovanými hodnotami, pak strukturní tvar (1) zapsat jako:

$$\boldsymbol{Y = Y.B' + X.C' + E} \qquad \textbf{(2a)}$$

$$y_{ti} = \sum_{j=1}^{m} y_{tj}\beta_{ji} + \sum_{k=1}^{q} x_{tk}\gamma_{ki} + \varepsilon_{ti} \qquad \textbf{(2b)}$$

$Y_{[T;m]}$ **je matice pozorování *m* vysvětlujících b.endog. proměnných soustavy**

$X_{[T;q]}$ **je matice pozorování *q* vysvětlujících predet. proměnných soustavy**

$B'_{[m;m]}$ **je matice koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným**

$C'_{[q;m]}$ **je matice koeficientů příslušných predeterminovaným proměnným**

$\varepsilon_{[T;m]}$ **je matice „pozorování“ *m* náhodných složek soustavy .**

Všimněme si rozdílů mezi oběma tvary zápisu strukturního tvaru v **(1)** a **(2)** :

- ***V (1) stojí matice parametrů B, C vůči vektorům*** *proměnných* ***y, x nalevo :*** **Matice *B* zde obsahuje regresní koeficienty u běžných endogenních proměnných *1. regresní rovnice* v 1. řádku až koeficienty m-té regresní rovnice v m-tém řádku. Matice *C* podobně obsahuje regresní koeficienty u predeterminovaných proměnných 1. regresní rovnice v 1. řádku .... až koeficienty u těchže proměnných m-té regresní rovnice v m-tém řádku.**
- ***V (2a) jsou*** *transponované* ***matice parametrů B’, C‘ vůči*** *maticím* ***Y,X napravo.***

První sloupec matice B‘ obsahuje regresní koeficienty u běžných endogenních proměnných 1. regresní rovnice.... až m-tý sloupec matice B‘ obsahuje regresní koeficienty u běžných endogenních proměnných m-té regresní rovnice. *Podobně :* **1. sloupec matice C’ obsahuje regresní koeficienty u predeterminov. proměnných první regresní rovnice ..... až m-tý sloupec C’ obsahuje regresní koeficienty u predeterminovaných proměnných m-té regresní rovnice.**

Obsah j-tého řádku matice B zapsané v (1) je tedy totožný s obsahem j-tého sloupce B’ v zápisu (2a) ; j = 1,2,...,m. Podobně, obsah k-tého řádku matice B zapsané v (1) je totožný s obsahem k-tého sloupce B’ v zápisu (2a); k = 1,2,...,q.

***<u>Normování matice B</u>*: abychom zajistili, že každá regresní rovnice vysvětluje právě jednu vysvětlovanou *(běžnou endogenní)* proměnnou, přisuzujeme diagonálním prvkům matice B nulové hodnoty** (pokud by tomu tak nebylo, potom bychom vysvětlovaným proměnným přiřazovali zbytečně nejedničkové koeficienty)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{1m} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} & b_{3m} \\ .... & ...... & ..... & 0 & ..... \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{3q} \\ .... & ... & .... & .... & .... \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & c_{m4} & c_{mq} \end{pmatrix}$$

O matici B resp. I-B předpokládáme, že má plnou hodnost m *(dále budeme pracovat s inverzí matice* ***I-B*** *).* ***Matice C nebývá*** *zpravidla* ***nijak normována.***

Z důvodů, které budou objasněny později (prevence proti vzniku identifikačního problému), však ***nesmí být ve všech rovnicích obsaženy všechny vysvětlující proměnné : proto musí být určitá část koeficientů v maticích B a C nulová****.*

Stochastické předpoklady modelu :

(a) $E(\varepsilon_{ti}) = 0 \qquad t = 1,2,..., T \; ; i = 1,2,..., m$

Náhodné složky jsou centrovány (u kterékoliv rovnice a v kterémkoliv čase) .

(b) $E(\varepsilon_{ti}, \varepsilon_{sj}) = \partial_{ts}.\sigma_{ij} \qquad t, s = 1,2,..., T \; ; i, j = 1,2,..., m$,

kde symbol ∂_{ts} **se nazývá** ***„Kroneckerovo delta“*** **a nabývá pouze dvou hodnot**

$\partial_{ts} = 1$ **pro** $t = s$

$\partial_{ts} = 0$ **pro** $t \neq s$

Náhodné složky v rovnicích jsou nekorelovány v různých obdobích, ale mohou být korelovány v témže čase (mezi různými rovnicemi).

(c) $E(x_{ti}, \varepsilon_{tj}) = 0 \qquad t = 1,2,..., T \; ; \; i, j = 1,2,..., m$

Náhodné složky v rovnicích jsou nekorelované s predeterminovanými proměnnými kterékoliv jiné rovnice v kterémkoliv časovém okamžiku.

(d) $hodnost(I_m - B) = m$

Podmínka (d) má ten důsledek, že v modelu jsou hodnoty vysvětlovaných běžných endogenních jednoznačně určeny pomocí predeterminovaných proměnných a náhodných složek modelu (je možno odvodit tzv. ***redukovanou*** **formu modelu).**

Kovarianční matice celé soustavy rovnic $\Phi_{[Tm;Tm]}$ **má následující tvar :**

$$\Phi = Cov(\varepsilon) = E(\varepsilon.\varepsilon') = \begin{pmatrix} \sigma_{11}.I_T & \sigma_{12}.I_T & .... & \sigma_{1m}.I_T \\ \sigma_{21}.I_T & \sigma_{22}.I_T & .... & \sigma_{2m}.I_T \\ .... & .... & .... & .... \\ \sigma_{m1}.I_T & \sigma_{mm}.I_T & .... & \sigma_{mm}.I_T \end{pmatrix} = \Sigma \otimes I_T$$

K odhadu modelu tvaru (1) nelze korektně použít *obyčejnou metoda nejmenších čtverců OLS* *ani* ***zobecněnou metodu nejmenších čtverců GLS,*** **neboť tyto *neposkytují konzistentní odhady.* Konzistentní odhady získáme složitějšími odhadovými technikami, které byly za tímto účelem vyvinuty.**

Počet vysvětlujících proměnných modelu $m+q$ **(a tedy i počet vysvětlujících proměnných každé rovnice** $m_i + q_i$ **) nesmí být větší než počet pozorování** ***T***.

Další užitečný **zápis strukturního tvaru** ***interdependentního modelu*** **lze provést tak, že v každé rovnici vyjádříme datové struktury (** přes ***T*** pozorování **) jen ve vztahu k proměnným** ***skutečně přítomným v této rovnici*** **:**

Libovolnou pevně zvolenou (***i – tou*** **) rovnici zapíšeme jako**

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{Y}_i \boldsymbol{\beta}_{.i} + \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \qquad (4)$$

, kde

$\boldsymbol{y}_{.i}$ **... T-složkový vektor běžné endogenní proměnné** vysvětlované i-tou rovnicí

$\boldsymbol{Y}_{.i}$ **.... Txm_i matice složená z m_i vektorů pozorování běžných endogenních proměnných skutečně přítomných jako vysvětlující v i-té rovnici.**
Očíslování těchto vektorů je takové, že
první rovnice se závisle proměnnou $y_{.1}$ **obsahuje** jako vysvětlující
vektory $y_{.2}, y_{.3}, \ldots, y_{.m_1+1}$,
druhá rovnice se závisle proměnnou $y_{.2}$ **obsahuje** jako vysvětlující
případně navíc vektory $y_{.m_1+2}, y_{.m_1+3}, \ldots, y_{m_2}$ **atd.**
Množiny těchto vysvětlujících proměnných zpravidla nebudou disjunktní.

$\boldsymbol{X}_{.i}$ **... Txq_i matice složená z q_i vektorů pozorování predeterminovaných proměnných skutečně přítomných** jako vysvětlující **v i-té rovnici.**
Očíslování těchto vektorů je takové, že :
první rovnice obsahuje jako vysvětlující **vektory** $x_{.1}, x_{.2}, x_{.3}, \ldots, x_{.q_1}$,
druhá rovnice obsahuje případně navíc **vektory** $x_{.q_1+1}, x_{.q_1+2}, \ldots, x_{.q_2}$ **atd.**
Množiny těchto vysvětlujících proměnných opět zpravidla nebudou disjunktní.

$\boldsymbol{\varepsilon}_{.i}$ **... T-složkový vektor náhodných složek i-té regresní rovnice**

$\boldsymbol{\beta}^*_{.i}$ **... m_i- složkový vektor strukturních parametrů příslušných běžným endogenním proměnným** skutečně přítomným **v i-té rovnici**

$\boldsymbol{\gamma}^*_{.i}$ **... q_i- složkový vektor strukturních parametrů příslušných predeterminovaným proměnným** skutečně přítomným **v i-té rovnici.**

Vektor $\boldsymbol{\beta}^*_{.i}$ **je tedy subvektorem** $\boldsymbol{\beta}_{.i}$ **, pokud z něj odstraníme nulové koeficienty u běžných endogenních proměnných, podobně vektor** $\boldsymbol{\gamma}^*_{.i}$ **je subvektorem** $\boldsymbol{\gamma}_{.i}$ **, když z** $\boldsymbol{\gamma}_{.i}$ **odstraníme nulové koeficienty u nepřítomných predeterminovaných proměnných.**

Zápis (4) na rozdíl od předchozích představuje takový strukturní model, do kterého jsou zahrnuta omezení daná nulovými hodnotami parametrů u vysvětlujících proměnných modelu, pokud se tyto nevyskytují v dané rovnici. Počet vysvětlujících proměnných tedy nebude maximální možný, tj. $m(m-1)+m.q$ ***nýbrž „jen“*** $\sum m_i + q_i$.

Model tvaru (2) resp. (3) je nejkomplikovanější možný lineární ekonometrický model.

Nejjednodušší vícerovnicový model je tzv. *soustava zdánlivě nezávislých lineárních regresních rovnic („seemingly unrelated regressions“* neboli *SUR)*, v níž nejsou přítomné žádné běžné endogenní proměnné jako vysvětlující :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}.\boldsymbol{C}' + \boldsymbol{E} \qquad \textbf{(3a)}$$

$$y_{ti} = \sum_{k=1}^{q} x_{tk}\gamma_{ki} + \varepsilon_{ti} \qquad \textbf{(3b)}$$

K odhadu modelu tvaru (3) postačuje *obyčejná metoda nejmenších čtverců OLS* nebo *zobecněná metoda nejmenších čtverců GLS* uplatněná samostatně na každou rovnici zvlášť nebo souhrnně na všechny modelové rovnice. Metoda poskytne odhady s vlastnostmi rovnocenně jako u jednorovnicového modelu

Vedle obou krajních situací (*soustava zdánlivě nezávislých regresních rovnic* a *interdependentní model*) jsou typické ještě dvě další zvláštní formy, u kterých sice mohou být běžné endogenní proměnné přítomny na pravé straně, ale jen v určité přesně zadané podobě (jde o *rekursívní* resp. *blokově rekursívní* tvar ekonometrického modelu)

Různé formy specifikace *(lineárního)* ***strukturního modelu***

verze 1

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \textbf{(1A)}$$

normování matice B: $\beta_{ii} = 0 \quad pro\ všechna \quad i = 1,2,\ldots,m$

příslušný redukovaný tvar : $\boldsymbol{y} = (I - B)^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + (I - B)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$

verze 2

$$\widehat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{y} = \widehat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x} + \varepsilon \qquad \textbf{(1B)}$$

normování matice B: $\beta_{ii} = 1 \quad pro\ všechna \quad i = 1,2,\ldots,m$

příslušný redukovaný tvar : $\boldsymbol{y} = \widehat{B}^{-1}\widehat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x} + \widehat{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$

verze 3

$$\breve{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{y} + \breve{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x} = \varepsilon \qquad \textbf{(1C)}$$

normování matice B: $\beta_{ii} = 1 \quad pro\ všechna \quad i = 1,2,\ldots,m$

příslušný redukovaný tvar : $\boldsymbol{y} = -\breve{B}^{-1}\breve{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x} + \breve{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$

verze 4

$$\breve{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{y} + \breve{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x} + \varepsilon = 0 \qquad \textbf{(1D)}$$

normování matice B: $\beta_{ii} = 1 \quad pro\ všechna \quad i = 1,2,\ldots,m$

příslušný redukovaný tvar : $\boldsymbol{y} = -\breve{B}^{-1}\breve{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x} - \breve{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$