NEPŘÍMÁ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCů
ILS (Indirect Least Squares method)

v soustavě simultánních regresních rovnic

Nepřímá metoda nejmenších čtverců je další z okruhu metod, které poskytují (*stejně jako 2SLS nebo IV*) **vždy** *(přinejmenším)* **konzistentní odhady strukturních parametrů regresních rovnic v interdependentních ekonometrických modelech.**

Metoda se od obou předchozích liší tím, že se k odhadu strukturních parametrů nepřistupuje přímo, ale přes parametry redukované formy modelu. V jejím algoritmu se místo transformací pozorovaných proměnných uplatňují transformace strukturních parametrů.

Smyslem těchto **transformací je převedení strukturních parametrů na zpravidla početnější množinu parametrů redukovaného tvaru** *(ty jsou jednodušeji a vždy odhadnutelné)* **a následně** *(lze-li to ovšem provést)* **zpětné určení strukturních parametrů pomocí parametrů redukovaného tvaru.**

Hlavní nesnází při tomto **postupu je obecná neproveditelnost zpětného převodu (tzn. z odhadnutých parametrů redukovaného tvaru nelze vždy získat parametry tvaru strukturního) – příčinou nesnáze je *tzv. identifikační problém.***

Formální popis metody pro i-tou strukturní rovnici :

V rovnici zapsané jako

$$\mathbf{y}_{.i} = \mathbf{Y}_i\boldsymbol{\beta}_{.i} + \mathbf{X}_{.i}\boldsymbol{\gamma}_{.i} + \boldsymbol{\varepsilon}_{.i}$$

vyjádříme nejprve redukovanou formu Π (celého modelu) **jako**

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}.\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{V} \quad , \text{ kde } \quad \boldsymbol{\Pi} = \mathbf{C}.(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} \quad \text{a} \quad \mathbf{V} = \mathbf{E}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}$$

Všimněme si blíže vztahu mezi parametry strukturního a redukovaného tvaru :

- **počet parametrů strukturního tvaru je** dán počtem prvků v maticích $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, kterých je dohromady $\mathbf{m.(m-1)+m.q}$ **(neuvažujeme-li jiná omezení než normovací pravidlo** $\beta_{ii} = 0$ **v matici B) . Zpravidla však je počet (nenulových parametrů) strukturního tvaru (tzn. s respektováním omezení kladených na některé z nich) výrazně menší, neboť v obou maticích** $\mathbf{B},\mathbf{C}$ **je přítomno mnoho nulových prvků v důsledku nepřítomnosti mnoha modelových proměnných v jednotlivých rovnicích (nerovnosti** $\mathbf{q_i < q, m_i < m}$ **platí u rozsáhlejších modelů u většiny rovnic). Vkládaná omezení jsou nutná i jako "prevence" proti výskytu problémů spojených s identifikací rovnic.**
- **počet parametrů redukovaného tvaru je dán rozměry (obecné) matice** Π**, tedy** $\mathbf{q.m}$**. Na rozdíl od strukturního tvaru je počet parametrů *omezeného* redukovaného tvaru** (kdy bereme v úvahu omezení kladená na strukturní parametry) **zpravidla jen o málo menší než** $\mathbf{q.m}$**.**

Parametry redukovaného tvaru obsažené v matici Π **jsou vždy odhadnutelné** (obyčejnou metodou nejmenších čtverců OLS)**. Odhadnutá matice** Π **je zřejmě**

(1) $$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{[q,m]} = (\mathbf{X'X})^{-1}{}_{[q,q]}.\mathbf{X'Y}_{[q,m]}$$

Důležitější otázkou je, zda a za jakých podmínek lze zpětně z odhadu Π odvodit původní parametry (obsažené v maticích $\mathbf{B},\mathbf{C}$), tzn. parametry námi uvažované **i-té rovnice $\boldsymbol{\beta}_{.i},\boldsymbol{\gamma}_{.i}$.**

Pro detailní analýzu uvažujme např. vztahy mezi parametry 1.regresní rovnice (uvažování 1.rovnice není újmou na obecnosti,pouze přispěje k přehlednému zápisu)

Zapišme nyní ze vztahu $\boldsymbol{\Pi}.(\mathbf{I}-\mathbf{B})=\mathbf{C}$ **jen ty prvky, které se bezprostředně vztahují ke strukturním parametrům *první* rovnice**. Dostaneme :

(2)
$$\boldsymbol{\Pi}_{[q,m]}.\begin{pmatrix} 1_{[1,1]} \\ -\boldsymbol{\beta}_{.1[m_1,1]} \\ 0_{[m-m_1-1,1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{.1[q_1,1]} \\ 0_{[q-q_1,1]} \end{pmatrix}$$

(U vektorů a matic jsou uvedeny pro větší názornost dimenze.)

K získání explicitnějších vztahů mezi uvažovanými parametry je třeba navíc rozdělit matici parametrů redukovaného tvaru Π tak, aby bylo patrné, které její submatice se vztahují k veličinám vystupujícím v 1. regresní rovnici [1]:

$$\boldsymbol{\Pi}_{[q,m]} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_{[q_1,1]} & \boldsymbol{\Pi}_{[q_1,m_1]} & \boldsymbol{\Pi}_{[q_1,m-m_1-1]} \\ \boldsymbol{\pi}_{[q-q_1,1]} & \boldsymbol{\Pi}_{[q-q_1,m_1]} & \boldsymbol{\Pi}_{[q-q_1,m-m_1-1]} \end{pmatrix},$$

pro subvektory jsme použili značení $\boldsymbol{\pi}_{[.,.]}$, pro submatice $\Pi_{[.,.]}$ **. Vztahy, které se přímo vztahují k parametrům první regresní rovnice, lze zapsat takto** :

(3A)
$$\boldsymbol{\Pi}_{[q_1,m_1]}.\boldsymbol{\beta}_{.1[m_1,1]} + \boldsymbol{\gamma}_{.1[q_1,1]} = \boldsymbol{\pi}_{[q_1,1]}$$

(3B)
$$\boldsymbol{\Pi}_{[q-q_1,m_1]}.\boldsymbol{\beta}_{.1[m_1,1]} = \boldsymbol{\pi}_{[q-q_1,1]}$$

První "řádek" (3A) **představuje soustavu $\mathbf{m_1}$ rovnic o $\mathbf{m_1}+\mathbf{q_1}$ neznámých $\boldsymbol{\beta}_{.1},\boldsymbol{\gamma}_1$, druhý "řádek"** (3B) **vyjadřuje soustavu $\mathbf{q}-\mathbf{q_1}$ rovnic o $\mathbf{m_1}$ neznámých $\boldsymbol{\beta}_{.1}$[2].** Celá **soustava q rovnic je jednoznačně řešitelná právě tehdy, jestliže existuje jednoznačné řešení části** (3B) **pro strukturní parametry $\boldsymbol{\beta}_{.1}$.** (Část **(3A)** má charakter *rekursívní* podsoustavy, která je vždy řešitelná).

Existence řešení podsoustavy (3B) **–** které nemusí být nutně jediné - **je** klíčově **závislé na tom, v jakém poměru jsou rozměry matice $\Pi_{[q-q1,m1]}$** (nejsou-li jinak řádky nebo sloupce této matice lineárně závislé). V úvahu přicházejí tři možnosti**:**

---

[1] Jak je patrné, dvě submatice, jmenovitě $\Pi_{[q_1,m-m_1-1]}$ **a** $\Pi_{[q-q_{11},m-m_1-1]}$, se nijak nepodílejí na vztazích mezi parametry 1.strukturní rovnice. (Mají však přirozeně vliv na vztahy mezi strukturními parametry ostatních rovnic).

[2] *v předchozím i v dalším textu znamená vždy :*
q_1 .... počet vysvětlujících predeterminovaných proměnných i-té rovnice (*včetně vektoru "1"*)
m_1 .... počet *vysvětlujících* běž. endogenních proměnných i-té rovnice (pokud je v jiné literatuře uváděn pod m_1 počet *všech* běžných endogenních proměnných i-té rovnice, je nutno podmínky identifikace formulovat jako q + 1 = $m_1 + q_1$) .

možnost (A) Bude-li platit $q - q_1 < m_1$,

bude mít podsoustava **(3B)** sice nekonečně mnoho algebraických řešení, ale **nebude možno vyvodit žádné řešení statistického problému** odhadu parametrů $\beta_{.1}$ (a následně ani $\gamma_{.1}$), protože nebude možné vyjádřit zbývající odhadované parametry jen pomocí známých veličin (prvků $\Pi_{[q-q1,m1]}$, $\pi_{[q-q1,1]}$). Zůstane totiž neurčených "přebytečných" m_1 parametrů δ_{q1+1} .... δ_{q1+m1} .

Odhady parametrů (první) strukturní rovnice není možné tedy statistickým způsobem nijak získat. Jde o ***případ podidentifikovanosti** (první) **regresní rovnice***. .

možnost (B) Bude-li platit $q - q_1 = m_1$

je vidět, že **soustava (3B) bude mít právě jediné řešení *za předpokladu, že submatice*** odhadů koeficientů redukovaného tvaru $\Pi_{[q-q1,m1]}$ ***je regulární***, což nastane tehdy, bude-li navíc splněna hodnostní podmínka

(4) $$h\left(\Pi_{[q-q_1,m_1]}\right) = m_1$$

Pokud hodnostní podmínka splněna nabude, nastane obdobný problém jako v situaci **(A)**. Pokud tedy současně s **(B)** nastane (4), **lze odhady parametrů získat *jednoznačně*** jako

(5)
$$\hat{\beta}_{.1[m_1,1]} = (\hat{\Pi}_{[q-q_1,m_1]})^{-1}.\hat{\pi}_{[q-q_1,1]}$$
$$\hat{\gamma}_{.1[q_1,1]} = \hat{\pi}_{[q_1,1]} - \hat{\Pi}_{[q_1,m_1]}(\hat{\Pi}_{[q-q_1,m_1]})^{-1}.\hat{\pi}_{[q-q_1,1]}$$

Tato situace odpovídá ***případ**u **přesné identifikovanosti** (první) **regresní rovnice***.

možnost (C) Bude-li platit $q - q_1 > m_1$

Submatice $\Pi_{[q-q1,m1]}$ je nyní singulární. K tomu, **aby existovalo nějaké řešení statistického problému** odhadu, **je** nutné, **aby zůstala v platnosti podmínka (3)**. Jinak by nastal stejný problém jako v situaci **(B)** : při hodnosti m_1-1 by existovala regulární submatice $\Pi_{[q-q1,m1]}$ řádu i hodnosti m_1-1, z které bychom mohli odvodit nanejvýš m_1-1 parametrů (avšak v závislosti na 1 neurčitelném (přebytečném) parametru. Statisticky bychom tedy (všechny) parametry odvodit nemohli.

Pokud zůstane v platnosti podmínka **(C)**, je však patrné, že odhadované strukturní parametry $\beta_{.1}$ nebudou vyhovovat všem rovnicím soustavy **(3B)** – rovnic je jen q-q_1 . Zatímco v algebraickém smyslu nebude soustava řešitelná (počet neznámých parametrů $\beta_{.1}$ je menší než počet rovnic) , **lze se při řešení statistického problému omezit pouze na (libovolných) m_1** těchto **rovnic** (jsou-li lineárně nezávislé).

Dostaneme tak až $\binom{q-q_1}{m_1}$ různých statistických řešení, tedy různých odhadů, které se uplatní ve druhém kroku -řešení podsoustavy **(3A)**.

Tento poslední ***případ** odpovídá **přeidentifikovanosti** (první) **regresní rovnice***, kdy lze **odhady strukturních parametrů** nalézt, ale ty **nejsou určeny jednoznačně**.

Formální odvození ILS-odhadové funkce

Abychom získali tvar *ILS-odhadové funkce*, musíme vyjít z (úplné) **odhadnuté matice parametrů redukovaného tvaru**

$$\hat{\Pi}_{[q,m]} = (X'X)^{-1}{}_{[q,q]}.X'Y_{[q,m]}$$

Podotkněme, že pouze prvních m_1+1 sloupců matice $\hat{\Pi}$ vyjadřuje vztahy mezi parametry první strukturní rovnice. Je to nejlépe vidět z rozpisu (odhadnutých) **prvků této matice, které získáme jako**[3]

(6) $$\hat{\Pi}_{[q,m]} = (X'X)^{-1}.\begin{pmatrix} X_1'y_{1[q_1,1]} & X_1'Y_{1[q_1,m_1]} & X_1'Y^{(1)}{}_{[q_1,m-m_1-1]} \\ X^{(1)}{}'y_{1[q-q_1,1]} & X^{(1)}{}'Y_{1[q-q_1,m_1]} & X^{(1)}{}'Y^{(1)}{}_{[q-q_1,m-m_1-1]} \end{pmatrix}$$

neboli - sloučíme-li v zápisu (6) horních q_1 a dolních $q-q_1$ řádků jedním vyjádřením[4] -

$$\hat{\Pi}_{[q,m]} = (X'X)^{-1}\left(X'y_{1[q,1]} \quad X'Y_{1[q,m_1]} \quad X'Y^{(1)}{}_{[q,m-m_1-1]}\right) .$$

Soustavy (3A), (3B) lze zapsat (při takovém vyjádření, kde parametry redukovaného tvaru, resp. jejich odhady považujeme za známé) **ve tvaru**

(7) $$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_{[q_1,m_1]} & I_{[q_1,q_1]} \\ \hat{\Pi}_{[q-q_1,m_1]} & 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{.1[m_1,1]} \\ \hat{\gamma}_{.1[q_1,1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{[q_1,1]} \\ \hat{\pi}_{[q-q_1,1]} \end{pmatrix}$$

Přitom matici levé strany (7) lze zapsat (*v pozorovaných v proměnných*) **jako**

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_{[q_1,m_1]} & I_{[q_1,q_1]} \\ \hat{\Pi}_{[q-q_1,m_1]} & 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} = \left[(X'X)^{-1}X'Y_1; \begin{pmatrix} I_{[q_1,q_1]} \\ 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} \right] = (X'X)^{-1}[X'Y_1; X'X_1]$$

Všimněme si zde, že skutečně platí $(X'X)^{-1}X'X_1 = (X'X)^{-1}X'X.\begin{pmatrix} I_{[q_1,q_1]} \\ 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{[q_1,q_1]} \\ 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix}$,

pokud je q_1 predeterminovaných proměnných tvořících (po sloupcích) matici X_1 posazeno právě v prvních q_1 sloupcích matice X.

Vektor na pravé straně (7) lze podobně zapsat (*v pozorovaných proměnných*) **jako**

$$\begin{pmatrix} \hat{\pi}_{[q_1,1]} \\ \hat{\pi}_{[q-q_1,1]} \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'y_{.1}$$

Pokud obě strany (7) zapíšeme s vyjádřením vektoru parametrů $\delta_{.1}$, dostaneme

(8) $$(X'X)^{-1}[X'Y_1, X'X_1] = \delta_{.1}.(X'X)^{-1}X'y_{.1}$$

S ohledem na to, že momentová matice $X'X$ je regulární, lze vztah (8) zjednodušit na

(9) $$[X'Y_1, X'X_1] = \delta_{.1}.X'y_{.1}$$

---

3 Veličiny $X^{(1)}, Y^{(1)}$ vyjadřují pozorování těch proměnných, které nejsou obsaženy v první regresní rovnici (u $X^{(1)}$ jde o predeterminované proměnné nepřítomné v X_1 , u $Y^{(1)}$ jde o běžné endogenní proměnné nepřítomné v Y_1).

4 Uváděné dimenze se zde vztahuji vždy k součinům matic v závorce.

Odtud je zřejmé, že odhad parametrů *nepřímou metodou nejmenších čtverců* bude založen na řešení rovnice tvaru

(10) $\left[X'W_1\right]\hat{\delta}_{.1} = X'y_{.1}$ **čili** $\left[X'(Y_1,X_1)\right]\hat{\delta}_{.1} = X'y_{.1}$ **, kde** $W_1 = (Y_1,X_1)$

(zapsáno v dimenzích: $\left[X'_{[q,T]}W_{1[T,m_1+q_1]}\right]\hat{\delta}_{.1[m_1+q_1,1]} = X'_{[q,T]}y_{.1[T,1]}$)

Je ale také zřejmé, že s ohledem na výše řečené není zajištěno, že matice $X'W_1$ **bude čtvercová, regulární a že tedy bude existovat matice k ní inverzní. Pokud tomu tak bude** (k čemuž je nutné, aby platilo $m_1 + q_1 = q$), **pak lze odhad psát jako**

(11) $${}_{ILS}\hat{\delta}_{.1} = \left[X'(Y_1;X_1)\right]^{-1}.X'y_{.1}\ ,$$

Pokud bude platit $m_1 + q_1 < q$**, pak bude vyjádření odhadnutých parametry** neurčitější:

(12) $${}_{ILS}\hat{\delta}_{.1} = \left[X'(Y_1;X_1)\right]^{-}.X'y_{.1}\ ,$$ **kde**

symbol „-" znamená označení pseudoinverzní matice. Jak známo, pseudoinverzní matice není určena jednoznačně a tedy také odhad parametrů nebude jednoznačný.

Vlastnosti ILS-odhadové funkce

Lze ukázat, že ILS-estimátor strukturních parametrů modelu má tyto vlastnosti (v obecném zápise pro i-tou rovnici soustavy)

1) **Odhady parametrů** $\beta_{.i},\gamma_{.i}$ **jsou konzistentní, neboť platí**

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}\,{}_{ILS}\hat{\delta}_{.i} - \delta_{.i} = \underset{T\to\infty}{p\lim}\left[(X'W_i)^{-}X'(W_i\delta_{.i} + \varepsilon_{.i})\right] - \delta_{.i} =$$

$$= \underset{T\to\infty}{p\lim}'(X'W_i)^{-}X'W_i\delta_{.i} + .\underset{T\to\infty}{p\lim}((X'W_i)^{-}X'\varepsilon_{.i}) - \delta_{.i} =$$

$$= \delta_{.i} + \underset{T\to\infty}{p\lim}\,X'(Y_i;X_i)^{-}.\underset{T\to\infty}{p\lim}\,X'\varepsilon_{.i} - \delta_{.i} = \underset{T\to\infty}{p\lim}\,X'(Y_i;X_i)^{-}.\underset{T\to\infty}{p\lim}\,X'\varepsilon_{.i} = 0$$

2) **Odhady parametrů** $\beta_{.i},\gamma_{.i}$ **nejsou nestranné,** protože

$$E_{ILS}\hat{\delta}_{.i} = E\left[(X'(Y_i,X_i))^{-}.X'y_{.i}\right] \neq E\left[(X'(Y_i,X_i))^{-}.E(X'y_{.i})\right] = \delta_{.i}$$

vzhledem k možné korelovanosti proměnných v Y_i **a** $y_{.i}$ **(** přes $\varepsilon_{.i}$ **)**

3) **Odhady parametrů** $\beta_{.i},\gamma_{.i}$ **nejsou vydatné** (a to ani v rámci metod s omezenou informací).

4) **Odhady parametrů** $\beta_{.i},\gamma_{.i}$ **jsou** (za stejných předpokladů (e), (f), (g), (h) jako u *2SLS*) **asymptoticky normální ,** tedy platí

$$\sqrt{T}.({}_{ILS}\hat{\delta}_{.i} - \delta_{.i}) \approx N[0,\sigma_{ii}.\underset{T\to\infty}{\text{plim}}[(\frac{X'W_i}{T})^{-}.(\frac{X'X}{T}).(\frac{W_i'X}{T})^{-}]$$

Konzistentní odhad kovariancí ${}_{ILS}\sigma_{ij}$ pro jednotlivé rovnice získáme standardně:

$$ {}_{ILS}\hat{\sigma}_{ij} = \frac{{}_{ILS}\mathbf{e}_{.i}{}'\,{}_{ILS}\mathbf{e}_{.j}}{T} = \frac{\sum_{t=1}^{T} e_{ti}\,.e_{tj}}{T} , $$

kde za rezidua $\mathbf{e}_{.i}, \mathbf{e}_{.j}$ vezmeme odhady náhodných složek $\boldsymbol{\varepsilon}_{.i}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{.j}$ získané metodou *ILS*.

Ukážeme dále , že

Odhadová funkce *ILS* je speciálním případem *IV*-odhadové funkce pro volbu matice instrumentálních proměnných $\mathbf{P} = \mathbf{X}$ (neboli jinak $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ **)**

ověření: (v zápise pro první strukturní rovnici)

Již víme, že soustavy (3A), (3B) lze zapsat jako:

(7) $$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_{[q_1,m_1]} & \mathbf{I}_{[q_1,q_1]} \\ \hat{\Pi}_{[q-q_1,m_1]} & \mathbf{0}_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{.1[m_1,1]} \\ \hat{\gamma}_{.1[q_1,1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{[q_1,1]} \\ \hat{\pi}_{[q-q_1,1]} \end{pmatrix}$$

Při vyjádření levé strany (7) jako

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_{[q_1,m_1]} & \mathbf{I}_{[q_1,q_1]} \\ \hat{\Pi}_{[q-q_1,m_1]} & \mathbf{0}_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} = [\ (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}_1; \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{[q_1,q_1]} \\ \mathbf{0}_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix}] = (\mathbf{X'X})^{-1}[\mathbf{X'Y}_1; \mathbf{X'X}_1]$$

a pravé strany (7) pomocí výrazu $$\begin{pmatrix} \hat{\pi}_{[q_1,1]} \\ \hat{\pi}_{[q-q_1,1]} \end{pmatrix} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}_{.1}$$

je *ILS- odhadová funkce* dána vztahy

(11) ${}_{ILS}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{.1} = \left[\mathbf{X'}(\mathbf{Y}_1;\mathbf{X}_1)\right]^{-1}.\mathbf{X'y}_{.1}$, pokud je **první rovnice přesně identifikovaná,** resp.

(12) ${}_{ILS}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{.1} = \left[\mathbf{X'}(\mathbf{Y}_1;\mathbf{X}_1)\right]^{-}.\mathbf{X'y}_{.1}$, pokud je **první rovnice přeidentifikovaná.**

IV- odhadová funkce *(téže rovnice)* ***je naproti tomu určena jako***

(13) ${}_{IV}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{.1} = (\mathbf{P'W}_1)^{-1}\mathbf{P'y}_{.1}$, kde $\mathbf{P} = \mathbf{X'A}$

Odtud je patrné, že **volbou** $\mathbf{P} = \mathbf{X}$ (rovnocenně definováním matice instrumentů $\mathbf{A} = \mathbf{I_q}$)

dostaneme ${}_{IV}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{.1} = (\boldsymbol{X}'\mathbf{W}_1)^{-1}\boldsymbol{X}'\mathbf{y}_{.1}$ čili **výraz (11), pokud** $\mathbf{m_1} + \mathbf{q_1} = \mathbf{q}$

případně ${}_{IV}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{.1} = (\boldsymbol{X}'\mathbf{W}_1)^{-}\boldsymbol{X}'\mathbf{y}_{.1}$ čili **výraz (12), pokud** $\mathbf{m_1} + \mathbf{q_1} < \mathbf{q}$.

V těchto případech tedy můžeme psát ${}_{IV}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{.1} = (\mathbf{P'W}_1)^{-1}\mathbf{P'y}_{.1} = {}_{ILS}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{.1}$

Znamená to tedy, že:

1) ***ILS*-odhadová funkce je speciálním případem *IV*-odhadové funkce při volbě matice instrumentů jako $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.**

2) *ILS*-odhadová funkce není *na rozdíl od jiných estimátorů* **určena jednoznačně a její existence resp. počet získaných řešení závisí na řešitelnosti soustavy (3B).**

Vztah mezi *nepřímou metodou nejmenších čtverců* (jako užší třídou) **a *metodou instrumentálních proměnných*** (jako obecnější třídou) **lze charakterizovat asi tak, že v ILS se omezujeme jen na *instrumentální proměnné představované prostým výběrem z predeterminovaných proměnných*. Výběr těchto proměnných musí být dostatečný (počtem aspoň $m_i + q_i$), přičemž pokud je příslušná rovnice přeidentifikovaná, musíme se rozhodnout pro vzetí určitých $m_i + q_i$ predeterminovaných proměnných ze všech q disponibilních.**