METODA MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI S OMEZENOU INFORMACÍ
LIML (*Limited Information Maximum Likelihood*)
v soustavě simultánních regresních rovnic
[Anderson, Rubin 1949[1]]

Metoda maximální věrohodnosti s omezenou informací je jednodušším ze dvou postupů založených na principu minimalizace věrohodnostní funkce užívaných v prostředí interdependentních soustav simultánních regresních rovnic. Poskytuje konzistentní a (v rámci metod s omezenou informací také vydatné) odhady strukturních parametrů.

Předpokladem pro oprávněné uplatnění této metody je (*aspoň přibližná*) normalita rozdělení náhodných odchylek jednotlivých regresních rovnic (uplatňuje se v ní sdružené normální rozdělení náhodných složek všech m rovnic ve všech T pozorováních). Získání odhadů parametrů je však zpravidla obtížné a pouze v případě samostatného odhadu parametrů jediné regresní rovnice se lze vyhnout nutnosti nasazení numerických iteračních metod (u metody FIML se tyto uplatňují vždy)

LIML je odhadová procedura, která poskytuje odhad parametrů individuální strukturní rovnice tak, že se bezprostředně využívají apriorní omezení kladená (jen) na tuto rovnici - restrikce vztažené k ostatním rovnicím soustavy se neuplatňují ve stejné míře. V průběhu LIML procedury se eliminují parametry ostatních rovnic tím, že se provádí maximalizace výchozí věrohodnostní funkce vzhledem k nim (*u sdružené hustoty normálního rozdělení je to možné, u jiných rozdělení to obecně možné není*). Takto se obdrží *věrohodnostní funkce v tzv. koncentrovaném tvaru* (v ní parametry ostatních rovnic již nevystupují jako neznámé). Následně se provádí maximalizace *koncentrované věrohodnostní funkce.* V případě, že odhadujeme parametry jen jediné rovnice, se zde již berou v úvahu pouze všechna apriorní omezení položená na parametry této rovnice.

Oproti LS-přístupu představují ML-techniky složitější postupy při kvantifikaci parametrů v simultánní soustavě regresních rovnic. Můžeme je přitom uplatnit jak na strukturní, tak na redukovaný tvar ekonometrického modelu. Zde se budeme nejdříve věnovat odhadu redukovaného tvaru. Úvodní část LIML-přístupu (*též pro strukturní tvar*) je přitom shodná s odvozením metody FIML (v podstatě až do fáze vyvození koncentrované věrohodnostní funkce). Teprve od okamžiku odděleného pohledu na parametry analyzované rovnice (popř. podsoustavy rovnic) a na parametry ostatních rovnic se uplatňuje specifický LIML-algoritmus.

Metody reprezentující přístup maximalizace věrohodnostní funkce přistupují k proměnným v rovnicích více „symetricky“ než LS-techniky. Se závisle proměnnou se zachází „téměř stejně“ jako s vysvětlujícími běžnými endogenními proměnnými, avšak důsledně se zachovává odlišení běžných endogenních a predeterminovaných proměnných. Proto se také – na rozdíl od častějšího vyjádření strukturního tvaru v zápisu

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y.B} + \boldsymbol{X.C} + \boldsymbol{E} \tag{1}$$

- uplatňuje spíše zápis

$$\boldsymbol{Y.B} + \boldsymbol{X.C} = \boldsymbol{E} \tag{2}$$

Připomeňme, že zatímco v případě (1) má redukovaný tvar zápis

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X.\Pi} * + \boldsymbol{V} \quad \text{, kde} \quad \boldsymbol{\Pi} * = \boldsymbol{C(I-B)^{-1}},\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{E(I-B)^{-1}} \quad , \tag{3}$$

má redukovaná forma pro model (2) podobu

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X.\Pi} * + \boldsymbol{V} \quad \text{, kde ale} \quad \boldsymbol{\Pi} * = -\boldsymbol{CB^{-1}},\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{EB^{-1}} \quad , \tag{4}$$

[1] Anderson T.W., Rubin, H. : Estimation of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations. Annals of Math.Statistics 20/1949

Tomu odpovídá i jiné normování diagonálních prvků matice B: Zatímco pro strukturní tvar (1) je přirozené normování $\beta_{ii} = 0$, je ekvivalentní normalizace pro tvar (2) dána podmínkou $\beta_{ii} = 1$; $i = 1,2,...,m.$ Z toho vyplývající rozdílnosti se přenášejí též na parametry redukovaných tvarů (3), resp. (4).
Další (méně zřetelnou) rozdílností oproti LS-přístupu je zacházení s omezeními kladenými na parametry (strukturního) tvaru. Zatímco v LS-přístupu se omezení položená na strukrturní parametry (tj. na vektory $\beta_{.i}, \gamma_{.i}$) berou v úvahu „od samého počátku", tzn. respektujeme specifikace jednotlivých rovnic (s přítomností/nepřítomností vysvětlujících proměnných) na počátku vyvozování jednotlivých estimátorů (*u 3SLS navíc i vztahy mezi náhodnými složkami rovnic*) , u ML-přístupů se tyto restrikce zavádějí až do výsledného tvaru (*koncentrované*) věrohodnostní funkce odvozeného estimátoru. Na samém počátku tedy do matic B,C nejsou zahrnuty žádné apriorní restrikce (*ohledně nepřítomnosti některých proměnných v některých rovnicích*).

Kromě standardních předpokladù (a) - (d) a doplňujících (e), (g) připojujeme předpoklad o normálním rozdilení náhodných složek

$\varepsilon_{t.} \approx N(0, \Sigma)$, který zesiluje předpoklady (f), (h).

Zapíšeme-li redukovaný tvar modelu např. ve tvaru (3), pak se položené restrikce přenášejí z matic B,C na Π^*. V případě ML technik však vyvození estimátoru pro redukovaný tvar probíhá na počátku opět bez uvažování těchto apriorních restrikcí..

<u>Poznámka</u> : Matice redukovaného tvaru (psaná s hvězdičkou) Π^* má zde rozměry [q,m] a je takto transpozicí matice $\Pi = (I-B)^{-1}C$. (Zápis Π^* je nutný právě v tomto tvaru, poněvadž *věrohodnostní funkce operuje s pozorováními* modelových proměnných) .

1) Nejprve odvodíme výraz pro odhad parametrů redukovaného tvaru modelu :

Odhad parametrů redukovaného tvaru modelu metodou maximální věrohodnosti se odvodí na základě rozdělení vektorů $v_{t.}$ (náhodných složek redukovaného tvaru): Za přijatého předpokladu o rozdělení ε_t platí pro rozdělení náhodných složek redukovaného tvaru $v_{t.}$:

$$v_t \approx N(0, \Omega), \text{ kde } \Omega = (I-B)^{-1\prime}\Sigma(I-B)^{-1} \qquad t = 1,2,...,T \qquad (5)$$

Sdružené rozdělení vektorů $v_{t.}$ (všech prvků matice V realizací náhodných složek redukovaného tvaru) má pak tvar :

$$f(v_{1.}, v_{2.}, ..., v_{T.}) = \prod_{t=1}^{T}\left[(2\pi)^{-m/2}|\Omega|^{-1/2}.exp\left\{-\frac{1}{2}v_{t.}'.\Omega^{-1}v_{t.}\right\}.\right] \qquad (6)$$

Při maximalizaci této hustoty nejprve nahradíme prvky Π^* **a** $v_{t.}$ *pozorovanými* proměnnými obsaženými v maticích X,Y : Nejprve využijeme toho, že platí

$$v_{t.} = y_{t.} - x_{t.}\Pi^*$$

Formální tvar koncentrované věrohodnostní funkce (zapsané pro všech T pozorování všech m rovnic) , kdy příslušný Jakobián transformace při přechodu od $v_{t.}$ k y_t je roven 1, bude sdružená hustota (věrohodnostní funkce) rozdělení (počtem m) vektorů v_t rovna výrazu (7)

$$L(\Pi^*, \Omega ; Y,X) = (2\pi)^{-mT/2}|\Omega|^{-T/2}.exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{t.} - x_{t.}.\Pi^*\right)\Omega^{-1}\left(y_{t.} - x_{t.}.\Pi^*\right)'\right\}$$

Určit (metodou *ML*) parametry matice redukovaného tvaru $\boldsymbol{\Pi}^*$ znamená nalézt takové prvky této matice, při nichž sdružená hustota nabývá svého maxima (při pevně daných hodnotách matic pozorování $\boldsymbol{X,Y}$ a nějak odhadnuté kovarianční matici $\boldsymbol{\Omega}$). Sumaci v exponenciále lze zapsat jako stopu součinu tří matic

$$\left\{ \sum_{t=1}^{T} \left(\boldsymbol{y}_{t.} - \boldsymbol{x}_{t.}.\boldsymbol{\Pi}^* \right) \boldsymbol{\Omega}^{-1} \left(\boldsymbol{y}_{t.} - \boldsymbol{x}_{t.}.\boldsymbol{\Pi}^* \right) \right\} = \boldsymbol{tr} \left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\Pi}^* \right) \boldsymbol{\Omega}^{-1} \left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\Pi}^* \right) \qquad (8)$$

Poznamenejme, že (*při zavedených omezeních na rovnice*) se odhaduje celkem $\boldsymbol{mq}$ parametrů redukovaného tvaru z celkem $\sum \boldsymbol{m}_i + \boldsymbol{q}_i$ parametrů (omezeného) strukturního tvaru.

Úpravami operujícími s vlastností komutativity stopy matice lze dospět k vyjádření[2] (9)

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Pi}^*, \boldsymbol{\Omega}\,; \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) = -\frac{\boldsymbol{mT}}{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{2}\pi) - \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{ln}|\boldsymbol{\Omega}| - \tfrac{1}{2} \boldsymbol{tr} \left\{ \boldsymbol{\Omega}^{-1} \left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}.\boldsymbol{\Pi}^* \right) \left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}.\boldsymbol{\Pi}^* \right) \right\}$$

Odtud, parciálními derivacemi Λ podle všech prvků π^* (matice $\boldsymbol{\Pi}^*$) získáme podmínky

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial \boldsymbol{\Pi}^*} = -\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Pi}^*\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \boldsymbol{0}. \qquad (10)$$

a z nich vzhledem k regularitě matice $\boldsymbol{\Omega}$ dále odhad $\boldsymbol{\Pi}^*$ jako

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}^* = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \qquad \text{(tedy shodně jako o metody OLS) .}$$

<u>Poznámka</u>: všimněme si , že odhad $\boldsymbol{\Pi}^*$ nijak nezávisí na kovarianční matici $\boldsymbol{\Omega}$.

2) Nyní přistoupíme k podstatně obtížnější úloze, kterou je ***odvození LIML-odhadové funkce strukturních parametrů modelu***. Protože první úsek tohoto odvození je shodný též pro estimátor FIML, dostaneme v jisté fázi výraz i pro tuto odhadovou funkci (*jak se s ní naloží dále, nebudeme zde blíže rozebírat*).

Logaritmovaná věrohodnostní funkce, která je mj. východiskem pro odvození *LIML* i *FIML-estimátoru* obsahující všechny neznámé parametry (strukturní obsažené v maticích $\boldsymbol{B,C}$ a stochastické obsažené v matici $\boldsymbol{\Sigma}$) celého $\boldsymbol{m}$ -rovnicového modelu má tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{\Sigma};\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}) &= -\frac{\boldsymbol{m.T}}{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{2}\pi) - \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{ln}|\boldsymbol{\Sigma}| + \boldsymbol{T}.\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| \\ &- \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \sum_{t=1}^{T} \left[\boldsymbol{y}_{t.}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{x}_{t}.\boldsymbol{C} \right] \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left[\boldsymbol{y}_{t.}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{x}_{t}.\boldsymbol{C} \right] \end{aligned} \qquad (11)$$

Užijeme-li zkrácené notace, při níž sdružíme proměnné i parametry nerozlišujíce, zda jde o běžné endogenní nebo predeterminované veličiny, s označením

$$\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}) \qquad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{T}} \quad \text{tj} \ . \ \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{T}} & \frac{\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{T}} \\ \frac{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{T}} & \frac{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{T}} \end{pmatrix}$$

můžeme zapsat (11) v jednodušší notaci

[2] Věrohodnostní funkci zde značíme L, logaritmovanou věrohodnostní funkci pak Λ.

$$\Lambda(B,C,\Sigma;Y,X) = -\frac{m.T}{2} ln(2\pi) - \frac{T}{2} ln|\Sigma| + T.ln|I-B| - \frac{T}{2} tr\left(\Sigma^{-1} A' MA\right) \qquad (12)$$

Abychom maximalizovali tuto funkci ve vztahu k neznámým parametrů B,C a Σ , budeme postupovat ve dvou krocích : Nejdříve pořídíme estimátor pro Σ (třeba v závislosti na neznámých parametrech B,C) a poté takto získanou hodnotu Σ dosadíme do (12)[3] , abychom dále maximalizovali již jen ve vztahu k B,C . Věrohodnostní funkce, která již má *eliminováno* Σ (*resp. hodnoty této matice jsou nějak vhodně odhadnuty*) se nazývá ***koncentrovaná*** *(logaritmovaná)* ***věrohodnostní funkce*** (v ní jsou už hodnoty prvků dosazených v Σ vzaty jako známé a již jim dále pozornost nevěnujeme).

Naznačený první krok maximalizace[4] vede k odhadu Σ tvaru

$$\hat{\Sigma} = A' MA \qquad (13)$$

Jeho dosazení do (12) vede ke ***koncentrované*** *(logaritmované)* ***věrohodnostní funkci***

$$\Lambda(B,C,Y,X) = -\frac{m.T}{2}\left[ln(2\pi)+1\right] + T.ln|I-B| - \frac{T}{2} ln|A' MA| \quad , \qquad (14)$$

která bude dále maximalizována (*již jen*) ve vztahu k neznámým parametrům B,C . Až sem je postup pro odvození LIML-estimátoru shodný s FIML- odhadovou funkcí. Z tvaru (14) je patrné, že parametry matic B,C obsažené ve druhém a třetím členu (*v logaritmovaných determinantech*) jsou přítomny v silně nelineárních tvarech. Výraz pro maximalizované hodnoty parametrů obsažených v B,C nemůže být zde uveden v explicitním tvaru. Jejich získání je tedy možné pouze pomocí algoritmu některé účinné numerické iterační techniky.

3) Získání odhadové funkce LIML pro nějaký ***subsystém (*** m^* ***> 1) rovnic*** je dosti složitá procedura, kterou dále popíšeme. Jejím účelem je odhad parametrů libovolné podsoustavy m^* z původních m strukturních rovnic. K odhadům parametrů se zde nepřistupuje symetricky (*jinak by se žádný rozdíl oproti FIML proceduře nemohl projevit*). Předmětem úlohy je koncentrace na odhadované parametry m^* rovnic (jež jsou předmětem zájmu), aniž by se ovšem zcela ignorovala informace obsažená ve zbývajících $m - m^*$ rovnicích. Formálně vzato, z ostatních rovnic přebíráme kauzální vztahy které jsou obsaženy v jejich specifikacích, avšak ignorujeme všechna omezení na parametry na těchto $m - m^*$ rovnic (např. ta, že určitá rovnice neobsahuje určité proměnné a zejména informace o závislosti náhodných složek jednotlivých rovnic, které jinak pořizujeme ze souhrnné kovarianční matice Σ modelu). Abychom rozlišili, které parametry jsou vlastním předmětem zájmu (nazvěme je pracovně „*interesantní*“) a které jsou mimo vlastní předmět zájmu („*neinteresantní*“), musíme množinu těchto parametrů rozdělit na části. U strukturních parametrů proto vybereme podskupiny : z matic B,C (resp. z výše uvedené matice A) vybereme vždy části, které dovolí rozlišit *interesantní* od *neinteresantních* parametrů :

skupina *interesantních parametrů* bude obsažena v maticích B_I, C_I, resp. v souhrnné matici A_I : *v m* sloupcích matice* B_I *budou parametry* β_I*, příslušné běžným endogenním proměnným prvních m* rovnic, v m* sloupcích matice* C_I *budou parametry* γ_I *příslušné predeterminovaným proměnným prvních m* rovnic.*

---

[3] Že je to možné, není obecně samozřejmé, ale umožňuje to tvar věrohodnostní funkce mj. právě pro normální rozdělení.

[4] Pouze druhý a čtvrtý člen v (12) obsahují Σ, důkaz platnosti (13) vyžaduje derivace (12) podle σ^{ij} .

skupina neinteresantních parametrů bude obsažena v maticích $\boldsymbol{B}_{II}$, $\boldsymbol{C}_{II}$, resp. v souhrnné matici $\boldsymbol{A}_{II}$. *v m-m* sloupcích matice* $\boldsymbol{B}_{II}$ *budou parametry* $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{I}}$ *příslušné běžným endogenním proměnným zbývajících m-m* rovnic, v m-m* sloupcích matice* $\boldsymbol{C}_{II}$ *budou parametry* $\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{I}}$ *příslušné predeterminovaným proměnným zbývajících m-m* rovnic.*

Množinu všech strukturních parametrů $\boldsymbol{A}$ tedy rozdělíme na bloky v závislosti na příslušnosti k prvním $\boldsymbol{m}^*$ rovnicím, resp. ke zbývajícím $\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}^*$ rovnicím :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{I}} & \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{I}} & \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{II}} \\ \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{I}} & \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{II}} \end{bmatrix}$$

Rozměry jednotlivých matic jsou :

$\boldsymbol{B}_I$: [m,m*] , $\boldsymbol{B}_{II}$: [m, m -m*], $\boldsymbol{C}_I$: [q,m*], $\boldsymbol{C}_{II}$: [q, m-m*], $\boldsymbol{A}_I$: [m+q, m*] $\boldsymbol{A}_{II}$: [m+q, m-m*]

u stochastických parametrů to provedeme rozdělením matice $\boldsymbol{\Sigma}$ na bloky

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{11}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{12}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{12}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{22}} \end{pmatrix}$$

Interesantní stochastické parametry jsou zde obsaženy v matici $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ prvního bloku matice $\boldsymbol{\Sigma}$, která definuje kovarianční strukturu mezi náhodnými složkami prvních m^* modelových rovnic. Rozměry ostatních čtvercových (*symetrických a pozitivně definitních matic*) jsou u matice $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$: [*m*, m-m**] a u matice $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$: [*m-m*, m-m**].

Dalším krokem je *eliminace neinteresantních parametrů* obsažených v $\boldsymbol{A}_{II}$ částečnou maximalizací (14) ve vztahu k nim a následné dosazení hodnot nalezených maximalizujících *neinteresantních* parametrů do (14). Při této maximalizaci se zanedbávají všechna apriorní omezení kladená na množinu *neinteresantních* parametrů což (*na rozdíl od FIMLu*) musí snižovat účinnost (vydatnost) této procedury. Kompenzací této ztráty je však přínos, že nadále můžeme operovat s menším a možná jednodušším systémem rovnic, z nichž se odvodí [5] estimátor pro prvky obsažené v $\boldsymbol{A}_I$. Zjednodušení (*i když ne na pohled*) výrazu (14) je možné v důsledku výpočtů některých jeho členů, při nichž se separuje vliv *interesantních a neinteresantních* parametrů (*již jsme řekli, že na každou skupinu pohlížíme odlišně*)

Přitom se zavádí transformační matice (značená zde $\boldsymbol{H}$),která musí splňovat dvě podmínky:

a) obě skupiny parametrů (na jedné straně *interesantních strukturních* $\boldsymbol{A}_I$ *a stochastických v* $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$, na druhé straně *neinteresantních strukturních* $\boldsymbol{A}_{II}$ *a stochastických v* $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$) jsou vzájemně nezávislé
b) při transformaci se žádným způsobem neporuší hodnoty *interesantních parametrů.*

Požadavek a) zajišťuje, že informace ztracená ignorováním omezení položených na *neinteresantní parametry* je minimalizována.
Požadavek b) zajišťuje, že estimátor bude formulován výlučně pro *interesantní parametry*

Transformující matice $\boldsymbol{H}$, která má vyhovět a) i b) , musí splňovat mj. toto :

$$\boldsymbol{A.H} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{(I-B)H} \\ \boldsymbol{-CH} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_I & \boldsymbol{B}_{II} \\ \boldsymbol{C}_I & \boldsymbol{B}_{II} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{H'\Sigma H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P} \end{bmatrix}$$, $\boldsymbol{P}$ libovolná (rozměry vhodná) matice

[5] podrobné odvození viz Dhrymes Ph.J.B. : Econometrics – Statistical Foundations and Applications str. 333 a násl.

Podrobná analýza[6] vyústí ve zkonkrétnění volby matice H jako

$$H = \begin{bmatrix} I & -\Sigma_{11}^{-1}.\Sigma_{12}H_{22} \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix}$$, kde H_{22} musí splňovat, že $H_{22}(\Sigma_{22} - \Sigma_{12}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})H_{22} = I_{m^*}$

Dále se využije vlastnosti transformační matice H k tomu, aby se získalo **vyjádření, které separuje** (tam, kde je to možné) ***interesantní parametry* od *neinteresantních.***

Logaritmovaná věrohodnostní funkce běžných endogenních proměnných (14) má v kontextu provedené transformace tento tvar :

$$\begin{aligned} \Lambda(A, H, \Sigma;\ Y, X) &= -\frac{m.T}{2} ln(2\pi) - \frac{T}{2} ln\left|H'\,\Sigma H\right| + T.ln\left|(I - B)H\right| \\ &- \frac{T}{2} \sum_{t=1}^{T} (z_t AH)'(H'\,\Sigma H)^{-1}(z_t AH)' \qquad z_{t.} = (y_{t.}, x_{t.}) \end{aligned} \tag{15}$$

a protože lze dále ukázat, že ve vztahu k poslednímu výrazu v (15) platí, že

$$tr(ZAH)(H'\,\Sigma H)^{-1}(ZAH)' = T.tr(\Sigma_{11}^{-1} A_I' MA_I) + T.tr(A_{II}' MA_{II}) \ ,$$

lze (15) dekomponovat do tvaru

$$\begin{aligned} \Lambda(A_I, \Sigma_{11}, A_{II};\ Y, X) &= -\frac{m.T}{2} ln(2\pi) - \frac{T}{2} ln\left|\Sigma_{11}\right| + T.ln\left|B_I, B_{II}\right| \\ &- \frac{T}{2} tr\left[\Sigma_{11}^{-1} A_I' MA_I\right] - \frac{T}{2} tr\left\{A_{II}' M A_{II}\right\} \end{aligned} \tag{16}$$

Zde jsou již *interesantní parametry* skoro zcela odděleny od *neinteresantních* (*platí to pro 2., 4. a 5. člen, není to však ještě plně pravda, protože ve třetím členu jsou v determinantu promíchány* B_I s B_{II}). Dalším krokem tedy bude vyloučení překážejících *neinteresantních parametrů* B_{II} tím, že se výraz (16) dílčím způsobem maximalizuje ve vztahu k nim (a pak se do něj nalezené maximalizující hodnoty opět dosadí) . Apriorní restrikce případně položené na parametry v B_{II} zanedbáváme.

Maximalizace (16) proběhne standardním způsobem tak, že se podle těchto členů derivuje a získané vztahy se položí rovny nule. S ohledem na to, že *neinteresantní parametry* jsou obsaženy jen ve 3. a 5.členu (16), jsou derivace ostatních tří členů v (16) podle nich nulové.

Proto nabudou podmínky 1. řádu jednoduššího tvaru

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial B_{II}} = T.\frac{\partial ln\left|B_I, B_{II}\right|}{\partial B_{II}} - \frac{T}{2}.\frac{\partial tr(A_{II}' MA_I)}{\partial B_{II}} = 0. \tag{17a}$$

Protože M je symetrická matice, platí

$$\frac{\partial tr(A_{II}' MA_I)}{\partial B_{II}} = 2MB_{II}\,. \tag{17b}$$

V průběhu derivování druhého členu a v následném nikoliv jednoduchém odvozování se využije skutečnosti, že hodnota výrazu $tr(A_{II}' MA_{II})$ je rovna *m–m**, mj. protože platí

[6] opět viz Dhrymes Ph.J.B. : Econometrics – Statistical Foundations and Applications str. 330-332.

$$A_{II}'MA_{II} = \begin{pmatrix} 0 & I_{m-m^*} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} B_I' \\ B_{II}' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} B_I' \\ B_{II}' \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 0 \\ I_{m-m^*} \end{pmatrix} = I_{m-m^*} \tag{17c}$$

Hodnota výrazu $ln\left|B_I, B_{II}\right|$ ve třetím členu (16) je zase rovna

$$ln\left| B_I, B_{II} \right| = \frac{1}{2}.ln\left| B_I'WB_I \right| - \frac{1}{2}.ln\left| W \right| \tag{17d}$$

Po těchto všech dosazeních do (16) dostaneme výraz pro maximalizovanou věrohodnostní funkci příslušnou LIML-estimátoru *pro libovolný subsystém* ***m**** rovnic ze soustavy všech ***m*** rovnic, Ta má tvar :

$$\Lambda(A_I, \Sigma_{11}; Y, X) = -\frac{m.T}{2}\left[ln(2\pi)+1\right] + \frac{T}{2}m^* - \frac{T}{2}ln|W| - \frac{T}{2}ln\left|\Sigma_{11}\right| + \frac{T}{2}.ln\left|B_I'WB_I\right|$$
$$-\frac{T}{2}.tr\left\{\Sigma_{11}^{-1}.A_I'.M.A_I\right\} \tag{18}$$

Zde, podobně jako u FIML procedury, maximalizujeme tento výraz při splnění všech apriorních omezení položených na (*neznámé*) parametry A_I a Σ_{11}. Stejně jako v předchozím případě však musíme užít některou z rejstříku numerických iteračních metod.

4) Výše uvedený ***postup v případě, že LIML-proceduru nasadíme k odhadu parametrů pouze jediné rovnice,*** lze zjednodušit následovně (zápis provedeme pro 1. modelovou rovnici) :

Pokud je sledovaný subsystém tvořen pouze jedinou rovnicí tzn. když $m^* = 1$, je předmětem odhadu toliko m_1 a q_1 interesantních parametrů. V tomto případě sice nelze pro odhad těchto parametrů odvodit explicitní výraz, ale není třeba už při výpočtu užívat iterační metody jako tomu bylo v předchozí „vícerovnicové“ verzi *LIML* nebo v metodě *FIML*.

Předmětem problému je zde nalezení pouze $m_1 + q_1 + 1$ neznámých parametrů, totiž

$$\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{1m_1}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1q_1}, \sigma_{11}$$

Jednodušší situace nám umožňuje zjednodušit značení : jako α_1 označíme $m_1 + q_1$ - členný vektor všech strukturních parametrů, matice Σ_{11} se redukuje na skalár zde označený σ_{11}.

Již jsme zmínili, že na rozdíl od odhadových funkcí *2SLS*, *IV* a *3SLS* , u kterých se ukazuje jako vhodnější formulace strukturní formy ekonometrického modelu v zápisu

$$y_{ti} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji} y_{tj} + \sum_{j=1}^{m} \gamma_{si} x_{sj} + \varepsilon_{ti} \tag{19}$$

je v případě *LIML* a *FIML estimátorů* výhodnější zápis

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_{ji} y_{tj} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{si} x_{sj} + \varepsilon_{ti} \tag{20}$$

Jak dále zdůvodníme, nejsme zde ani striktně omezeni na normalizaci $\beta_{jj} = 1$, odpovídající normalizaci $\beta_{jj} = 0$ u prvé zápisu (jako by tomu bylo u *2SLS*).Vzhledem k tomu, že v *LIML*-odhadové proceduře (*mj.při výpočtu asymptotické kovarianční matice*) se zachází místy odděleně se strukturami proměnných *přítomných* a *nepřítomných* v analyzované strukturní rovnici, rozdělíme v souladu s tímto momentové matice modelových proměnných.

Z toho důvodu rozdělíme momentové matice pozorovaných proměnných na bloky

$$M=\begin{pmatrix} M_{y_1y_1} & M_{y_1y_2} & M_{y_1x_1} & M_{y_1x_2} \\ M_{y_2y_1} & M_{y_2y_2} & M_{y_2x_1} & M_{y_2x_2} \\ M_{x_1y_1} & M_{x_1y_2} & M_{x_1x_1} & M_{x_1x_2} \\ M_{x_2y_1} & M_{x_2y_2} & M_{x_2x_1} & M_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{T}.\begin{pmatrix} Y_1'Y_1 & Y_1'Y_2 & Y_1'X_1 & Y_1'X_2 \\ Y_2'Y_1 & Y_2'Y_2 & Y_2'X_1 & Y_2'X_2 \\ X_1'Y_1 & X_1'Y_2 & X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'Y_1 & X_2'Y_2 & X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix}$$

Obdobně rozdělíme i matici reziduí W na 4 bloky

$$W=\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12} & W_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M_{y_1y_1}-M_{y_1x}M_{xx}^{-1}M_{xy_1} & M_{y_1y_2}-M_{y_1x}M_{xx}^{-1}M_{xy_2} \\ M_{y_2y_1}-M_{y_2x}M_{xx}^{-1}M_{xy_1} & M_{y_2y_2}-M_{y_2x}M_{xx}^{-1}M_{xy_2} \end{pmatrix}$$

V této notaci můžeme zapsat členy z předchozího zápisu (18) na

$$\alpha_0'M\alpha_0=\beta_{.1}^{0}.M_{y_1y_1}\beta_{.1}^{0}-2\gamma_{.1}'M_{y_1x_1}\beta_{.1}^{0}+\gamma_{.1}'M_{x_1x_1}\gamma_1 \tag{21a}$$

$$B_1'WB_1=\beta_{.1}^{0}{}'W_{11}\beta_{.1}^{0} \tag{21b}$$

a celý výraz (18) přejde po příslušných dosazeních do tvaru (22)

$$\Lambda^*(\alpha_{.1},\sigma_{11};\,Y,X)=-\frac{m.T}{2}\left[ln(2\pi)+1\right]-\frac{T}{2}ln\sigma_{11}+\frac{T}{2}tr\left[\beta_{.1}^{0}{}'.W_{11}\beta_{.1}^{0}\right]+\frac{T}{2}tr\left[1-ln|W|\right]$$
$$-\frac{T}{2}.\frac{1}{\sigma_{11}}\left\{\beta_{.1}^{0}{}'M_{y_1y_1}\beta_{.1}^{0}-2.\gamma_{.1}'M_{x_1y_1}\beta_{.1}^{0}+\gamma_{.1}'M_{x_1x_1}\gamma_{.1}\right\}$$

Dospět k hodnotám parametrů, při kterých je tato (logaritmovaná) věrohodnostní funkce maximalizována, znamená derivovat (současně nebo postupně s dosazováním) (22) podle jednotlivých parametrů $\beta_{.1}^{0}$, $\gamma_{.1}$ a σ_{11} a takto vzniklé výrazy položit rovné 0 :

Derivováním (22) podle $\gamma_{.1}$ a následným anulováním dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\gamma_{.1}}=-\frac{T}{2}.\frac{1}{\sigma_{11}}.\left(-2.M_{x_1y_1}\beta_{.1}^{0}+2M_{x_1x_1}\gamma_{.1}\right)=0\ . \tag{23a}$$

Podobně, položením parciálních derivací podle σ_{11} nule dostaneme soustavu rovnic (23b)

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\sigma_{11}}=-\frac{T}{2}.\frac{1}{\sigma_{11}}+\frac{T}{2}.\frac{1}{\sigma_{11}^{2}}\left[\beta_{.1}^{0}{}'M_{y_1y_1}\beta_{.1}^{0}-2.\gamma_{.1}'M_{x_1y_1}\beta_{.1}^{0}+\gamma_{.1}'M_{x_1x_1}\gamma_{.1}\right]=0$$

Konečně, derivováním podle vektoru parametrů $\beta_{.1}^{0}$ máme

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\beta_{.1}^{0}}=\frac{T}{2}.\frac{2.W_{11}\beta_{.1}^{0}}{\beta_{.1}^{0}{}'W_{11}\beta_{.1}^{0}}-\frac{T}{2}.\frac{1}{\sigma_{11}}\left[2M_{y_1y_1}\beta_{.1}^{0}-2.M_{x_1y_1}\gamma_{.1}\right]=0 \tag{23c}$$

Jednoduchými úpravami (24) dostaneme z obsahu závorky vztah mezi vektory parametrů u predeterminovaných a běžných endogenních proměnných :

$$\gamma_{.1} = M_{x_1 x_1}^{-1} M_{x_1 y_1} \beta_{.1}^{0} \tag{24}$$

a to nezávisle na hodnotách parametru σ_{11}. Máme-li tedy dáno σ_{11} a $\beta_{.1}^{0}$, pak z (24) obdržíme hodnotu $\gamma_{.1}$, která globálně maximalizuje (22). Všimněme si, že pokud takto nalezenou hodnotu (24) vložíme do (22), dostaneme pro ML- odhad σ_{11} vyjádření :

$$\tilde{\sigma}_{11} = \beta_{.1}^{0'} . \left(M_{y_1 y_1} - M_{y_1 x_1} M_{x_1 x_1}^{-1} M_{x_1 y_1} \right) \beta_{.1}^{0} \tag{25}$$

Že jde skutečně o maximum, se lze přesvědčit vypočtením druhé derivace

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_{11}^{2}} = \frac{T}{2} . \frac{1}{\sigma_{11}^{2}} - \frac{T}{2} \frac{2.\sigma_{11}}{\sigma_{11}^{3}} = -\frac{T}{2\sigma_{11}^{2}} < 0$$

Nyní zbývá již jen dosadit předchozí výrazy (24) a (25) do (22) a provést závěrečnou maximalizaci k poslednímu vektoru, totiž $\beta_{.1}^{0}$. Dostaneme

$$\Lambda^{*}(\beta_{.1}; Y, X) = c_0 - \frac{T}{2} - \frac{T}{2} ln \left[\frac{\beta_{.1}^{0'} W_{11}^{*} \beta_{.1}^{0}}{\beta_{.1}^{'0'} W_{11} \beta_{.1}^{0}} \right] \quad , \tag{26}$$

kde

$$c_0 = -\frac{mT}{2} \left[ln(2\pi) + 1 \right] + \frac{T}{2} . \left(1 - ln \left| W \right| \right)$$

Odtud je zřejmé, že řešení spočívá v nalezení takového vektoru $\beta_{.1}^{0}$, který minimalizuje skalární hodnotu

$$\left[\frac{\beta_{.1}^{0'} W_{11}^{*} \beta_{.1}^{0}}{\beta_{.1}^{0'} W_{11} \beta_{.1}^{0}} \right] \tag{27}$$

Všimněme si, že tento výraz je homogenní stupně 0 v $\beta_{.1}^{0}$; *jinými slovy*: po násobení vektoru $\beta_{.1}^{0}$ jakýmkoliv kladným číslem se platnost výrazu (27) zachovává.Vektor $\beta_{.1}^{0}$ tedy nemůže být určen jednoznačně.

Jednoznačnosti lze ovšem dosáhnout, pokud nějakým způsobem složky $\beta_{.1}^{0}$ normujeme . Jedna možná cesta k této normalizaci, směřující k přiblížení k normování použitém u 2SLS odhadové procedury, by bylo normování $\beta_{11}^{0} = 1$, jinou možností pak např. $\beta_{11}^{0'} \beta_{11}^{0} = 1$ nebo obecněji $\beta_{11}^{0'} W_{11} \beta_{11}^{0} = 1$.

Při snaze minimalizovat výraz (27) lze dekompozicí pozitivně definitních matic W_{11} a W_{11}^{*} na tvar $W_{11} = F'F$, $W_{11}^{*} = F' \Lambda F$, kde F je regulární matice a Λ je diagonální matice vlastních čísel W_{11}^{*} v metrice matice W_{11} ukázat, že minimální hodnoty (27) bude dosaženo právě tehdy, jestliže zvolíme za $\beta_{.1}^{0}$ vlastní (*charakteristický*) vektor matice W_{11}^{*} v metrice matice W_{11} .tj. vektor, který splňuje rovnici

$$W_{11}^{*}.\beta^{0}{}_{.1} = \lambda^{*}.W_{11}.\beta^{0}{}_{.1} \tag{28}$$

(Vynásobením obou stran (28) vektorem $\beta_{.1}^{0}$ zleva získáme totiž právě vyjádření

$$\lambda = \frac{\beta_{.1}^{0}{}' W_{11}{}^{*} \beta_{.1}^{0}}{\beta_{.1}^{0}{}' W_{11} \beta_{.1}^{0}} \quad , \tag{29}$$

z něhož je zřejmé, že musí jít právě o *nejmenší charakteristické číslo* zmíněné matice)

5) Vyšetříme ještě situaci, ***jak se zjednoduší LIML-estimátor v případě, když analyzovaná rovnice neobsahuje žádné vysvětlující běžné endogenní proměnné****, tj. když* $m_1 = 1$. Na rozdíl od metod *2SLS, ILS* či *IV*, kde lze odpověď vyvodit prakticky okamžitě z výrazů definujících tyto estimátory (*ve všech případech dojde ke ztotožnění s prostým OLS estimátorem*) , to nemusí být na první pohled zřejmé. Ukážeme, že i zde bude výslednou odhadovou funkcí *prostá OLS* :

Ukázali jsme výše, že v průběhu LIML procedury došlo k postupné eliminaci parametrů ostatních rovnic tím, že se provedla dílčí maximalizace výchozí věrohodnostní funkce (18) vzhledem k nim. Tímto jsme obdrželi *koncentrovanou věrohodnostní funkci*, ze které se již přímo vyvozují hledané parametry analyzované rovnice (s respektováním všech omezení na ně položených). Tvar této *koncentrované věrohodnostní funkce* pro LIML estimátor je tedy :

$$\Lambda^{*}(\alpha_{.1},\sigma_{11};\, Y,X) = -\frac{m.T}{2}\left[ln(2\pi)+1\right] - \frac{T}{2} ln\sigma_{11} + \frac{T}{2} tr\left[\beta_{.1}^{0}{}'.W_{11}\beta_{.1}^{0}\right] + \frac{T}{2} tr\left[1 - ln|W|\right]$$
$$-\frac{T}{2}.\frac{1}{\sigma_{11}}\left\{\beta_{.1}^{0}{}' M_{y_1 y_1} \beta_{.1}^{0} - 2.\gamma_{.1}{}' M_{x_1 y_1} \beta_{.1}^{0} + \gamma_{.1}{}' M_{x_1 x_1} \gamma_{.1}\right\} \tag{30}$$

Připomeňme použitou symboliku :

$$W = \frac{Y'Y}{T} - \frac{Y'X}{T}.\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}.\frac{X'Y}{T}$$

$$W_{11} = \frac{Y_1{}'Y_1}{T} - \frac{Y_1{}'X}{T}.\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}.\frac{X'Y_1}{T}$$

Matici W lze interpretovat jako matici druhých momentů reziduí v regresi všech běžných endogenních proměnných Y na všechny predeterminované proměnné soustavy X .
Matice W_{11} naproti tomu představuje matici druhých momentů reziduí v regresi běžných endogenních proměnných přítomných v první rovnici soustavy Y_1 na všechny predeterminované proměnné soustavy X . Dále jsme již dříve označili jako

$$M_{y_1 y_1} = \frac{Y_1{}'Y_1}{T} \qquad M_{x_1 y_1} = \frac{X_1{}'Y_1}{T} \qquad M_{x_1 x_1} = \frac{X_1{}'X_1}{T}$$

Jde o momentové matice běžných endogenních a predeterminovaných proměnných obsažených v 1. strukturní rovnici (resp. o „křížovou“ momentovou matici). Vektory parametrů $\boldsymbol{\beta}_{.1}^{0}$ délky $\boldsymbol{m_1+1}$ a $\boldsymbol{\alpha}_{.1}$ délky $\boldsymbol{m+q}$ jsou sloupcové vektory s obsahem :

$$\boldsymbol{\beta}_{.1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & -\boldsymbol{\beta}_{.1}^{0} \end{pmatrix}' \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\alpha}_{.1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}^{0}{}_{.1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\gamma}_{.1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}' \quad \text{, kde}$$

$\boldsymbol{\gamma}_{.1}$ je vektor délky $\boldsymbol{q_1}$ první 0 vektor délky $\boldsymbol{m-m_1-1}$, druhý 0 vektor délky $\boldsymbol{q-q_1}$

Nepřítomnost běžných endogenních proměnných v 1. rovnici znamená, že se vektor $\boldsymbol{\beta}_{.1}$ redukuje pouze na jediný prvek (při zvoleném normování jde o 1 na prvém místě), tj. skalár.

Maximalizace výrazu (30) se při nepřítomnosti běžných endogenních proměnných podstatně zjednoduší, což je patrné, vyšetříme-li postupně jeho jednotlivé členy :

Poznámky k výrazu (30) ve vztahu k jeho minimalizaci již jen podle $\boldsymbol{\gamma}_{.1}$:

1) Člen $-\frac{\boldsymbol{m.T}}{\boldsymbol{2}}\left[\boldsymbol{ln(2\pi)+1}\right]$ neobsahuje žádné parametry (*ani pozorované veličiny*)

2) Člen $-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{ln\,\sigma}_{11}$ obsahuje jen parametr $\boldsymbol{\sigma_{11}}$ neovlivňující odhad $\boldsymbol{\beta}_{.1}$ ani $\boldsymbol{\gamma}_{.1}$

3) Člen $-\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}.\left[\boldsymbol{\beta}_{.1}^{0}\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{\beta}_{.1}^{0}\right]$ obsahuje jen parametry u běžných endogenních proměnných

4) Člen $\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{ln(1-ln|\,W|)}$ neobsahuje parametry (jen pozorovaná data v maticích $\boldsymbol{X,Y}$)

Znamená to tedy, že maximalizace věrohodnostní funkce vzhledem k parametrům vektoru $\boldsymbol{\gamma}_{.1}$ u predeterminovaných proměnných se týká toliko posledního výrazu

$$\boldsymbol{Z(\gamma_{.1},X_1,y_{.1})=-\frac{T}{2\sigma_{11}}\left[\frac{y_1'y_1}{T}-2.\gamma_{.1}'\frac{X_1'y_1}{T}+.\gamma_{.1}'\frac{X_1'X_1}{T}\gamma_{.1}\right]} \tag{31}$$

který bude maximální, jestliže obsah hranaté závorky, *před níž je záporné znaménko, kladná* $\boldsymbol{T}$ *a* $\boldsymbol{\sigma_{11}}$, bude minimální. Minimalizaci provedeme derivacemi podle prvků vektoru $\boldsymbol{\gamma}_{.1}$.

$$\boldsymbol{\frac{\partial Z(\gamma_{.1},X_1,y_1)}{\partial\gamma_{.1}}=\left[0-2.\frac{X_1'y_1}{T}+2.\frac{X_1'X_1}{T}.\gamma_{.1}\right]=0}\text{., Odtud tedy}$$

$$\boldsymbol{-\frac{X_1'y_1}{T}+\frac{X_1'X_1}{T}.\gamma_{.1}=0}$$ neboli po vynásobení $\boldsymbol{T}$ a osamostatnění $\boldsymbol{\gamma}_{.1}$

máme
$$\boldsymbol{\tilde{\gamma}_{.1}=(X_1'X_1)^{-1}(X_1'y_1)}\,, \tag{32}$$

což znamená, že odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\gamma}_{.1}$ metodou *LIML* je totožný s odhadem pomocí *OLS*. (*Lze v tom vidět obdobu shody ML a LS u parametrů jednorovnicového regresního modelu)*

6) Výpočetní postup pro určení strukturních parametrů metodou LIML

Nyní shrneme výpočetní postup, kterým se naleznou odhady parametrů jediné regresní rovnice zasazené do simultánní soustavy rovnic. Opět se omezíme na zápis pro 1. strukturní rovnici modelu.

6a) Výpočet parametrů $\tilde{\beta}_{.1}$ příslušných běžným endogenním proměnným se uskuteční na základě vzorce (28)

$$W_{11}^{*}.\tilde{\beta}^{0}{}_{.1} = \lambda^{*}.W_{11}.\tilde{\beta}^{0}{}_{.1}$$

v němž $\tilde{\beta}^{0}{}_{.1}$ je *charakteristický vektor* příslušný ***nejmenšímu*** *charakteristickému číslu* λ^{*} matice W_{11}^{*} v metrice matice W_{11}, přičemž obě tyto matice jsou určeny jako

$$W^{*}{}_{11} = \frac{Y_1'Y_1}{T} - \frac{Y_1'X_1}{T}.\left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}.\frac{X_1'Y_1}{T}$$

$$W_{11} = \frac{Y_1'Y_1}{T} - \frac{Y_1'X}{T}.\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}.\frac{X'Y_1}{T}$$

Pro konkrétní vyčíslení k tomu užijeme některou z procedur určených k výpočtům vlastních čísel a vlastních vektorů v matematických softwarových produktech (obvykle pojmenované *EIGEN* nebo *EIG*). V prostředí MATLAB k tomu např. slouží procedura ***eig***, pomocí které lze určit vlastní čísla a vlastní vektory čtvercové symetrické matice (*u symetrické matice jsou všechna vlastní čísla reálná*). V našem případě je nejvhodnější volba

$$[V, D] = eig(A, B) \quad , \qquad \text{kde}$$

za A dosadíme matici W_{11}^{*} **a** za B dosadíme matici W_{11} .

Hledaný vektor vlastních čísel bude obsažen v 1. sloupci matice V, k němu příslušné vlastní číslo pak je prvním prvkem (*levým, horním*) diagonální matice D. Řazení je „od nejmenšího k největšímu“, ve starších verzích MATLABu tomu však bylo naopak) .

Vlastní vektory nejsou určeny jednoznačně (hodnoty jejich složek jsou určeny pouze ve vzájemných poměrech) : rovnici (28) vyhovuje též jakýkoliv vektor $c.\beta_{.1}{}^{0}$, kde $c > 0$. Proto není odhad parametrů metodou LIML stanoven jednoznačně. Jednoznačnosti lze však dosáhnout např. normováním $\beta^{0}{}_{11} = 1$, tzn. tak, aby jeho první složka (*příslušná vysvětlované proměnné*) byla rovna 1. Po tomto normování dostaneme hledaný vektor $\tilde{\beta}_{.1}$ jako

$$\tilde{\beta}_{.1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\tilde{\beta}^{0}{}_{.1}}{\tilde{\beta}^{0}{}_{11}} \end{pmatrix} \tag{33}$$

6b) *Máme-li určen vektor parametrů $\tilde{\beta}_{.1}$, pak již snadno **určíme vektor parametrů $\tilde{\gamma}_{.1}$*** ***příslušných predeterminovaným proměnným***. Příslušný výraz je dán ve shodě s (24) jako

$$\tilde{\gamma}_{.1} = \left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1}.\left(\frac{X_1'Y_1}{T}\right).\tilde{\beta}_{.1} \tag{34}$$

Poznámka : Někdy bývá uváděn výraz (34) pro $\widetilde{\gamma}_{.1}$ se záporným znaménkem. Nejde o chybu, nýbrž to pramení z rozdílného normování první složky vektoru $\widetilde{\beta}_{.1}$: pokud deklarujeme $\beta_{11} = -1$, tedy opačně, než v (33), pak je nutné vzít (34) se znaménkem „-„ .

6c) Aby bylo možno testovat statistickou významnost regresních parametrů (*a posuzovat jejich případné vzájemné závislosti*), je nutno znát ***tvar (asymptotické) kovarianční matice LIML estimátoru***. Uvedeme (*bez jinak složitého odvození*) její tvar v zápisu

$$Cov({}_{LIML}\widetilde{\delta}_{.i}) = \sigma_{ii} \cdot \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} , \qquad (35)$$

kde matice v jednotlivých blocích mají tento význam :

$$P_{11} = \left[\Pi'_{q^* i} (X_2' X_2 - X_2 X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \Pi_{q^* i} \right]^{-1}$$

$$P_{12} = -P_{11} \left[\Pi'_{q_i i} + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \Pi_{q^* i} \right] \qquad P_{12} = P_{21}'$$

$$P_{22} = \left[\Pi_{q_i i} + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \Pi_{q^* i} \right] P_{11} \left[\Pi_{q_i i} + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \Pi_{q^* i} \right] + \left(X_1' X_1 \right)^{-1}$$

V těchto vzorcích vystupující matice X_1, X_2 představují submatice matice všech predeterminovaných proměnných X, přičemž X_1 přísluší proměnným, které se skutečně vyskytují (jako vysvětlující) v $i-$té strukturní rovnici a X_2 je tvořena zbývajícími predeterminovanými proměnnými (nepřítomnými v $i-$té rovnici), tj. rozložíme $X = (X_1, X_2)$. Symboly $\Pi_{q_i i}$, resp. $\Pi_{q^* i}$ jsou označeny submatice Π redukované formy modelu ($\hat{\Pi} = (X'X)^{-1} XY$) rozměrů $[q_i ; m_i]$, resp. $[q - q_i ; m_i]$, které lze odvodit z rozkladu Π ve tvaru

$$\Pi = \begin{pmatrix} & \Pi_{q_i, i} & \\ \pi_{.i} & & \Pi^* \\ & \Pi_{q^*, i} & \end{pmatrix} ,$$

kde $\pi_{.i}$ tvoří první sloupec matice Π, Π^* posledních $m - m_i - 1$ sloupců Π (vektor $\pi_{.i}$ a submatice Π^* se pro výpočet asymptotické kovarianční matice bezprostředně nevyužívají) . Předpokládá se přitom takové seřazení endogenních a predeterminovaných proměnných, že ty, které jsou přítomny v $i-$té strukturní rovnici (v počtu $m_i + 1$ endogenních a q_i predeterminovaných) , jsou obsaženy v prvních $m_i + 1$ sloupcích matice Y (s vysvětlovanou proměnnou na prvním místě) a v prvních q_i sloupcích matice X.

Vlastnosti LIML-odhadové funkce :

Lze ukázat, že LIML -estimátor strukturních parametrů modelu má tyto vlastnosti :

1) ***Odhady parametrů*** $\tilde{\delta}_{.i}$ ***(tj.*** $\tilde{\beta}_{.i}, \tilde{\gamma}_{.i}$ ***) jsou konzistentní,*** neboť platí

$$plim_{T \to \infty} \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_{.i} \\ \tilde{\gamma}_{.i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{.i} \\ \gamma_{.i} \end{pmatrix}$$

2) ***Odhady parametrů*** $\tilde{\beta}_{.i}, \tilde{\gamma}_{.i}$ ***nejsou obecně nestranné,*** protože

$$E \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_{.i} \\ \tilde{\gamma}_{.i} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \beta_{.i} \\ \tilde{\gamma}_{.i} \end{pmatrix}$$

3) ***Odhady parametrů*** $\tilde{\delta}_{.i}$ ***(tj.*** $\tilde{\beta}_{.i}, \tilde{\gamma}_{.i}$ ***) jsou*** *obecně* ***vydatné*** (v rámci metod s omezenou informací). Často se dosáhne dokonce dolní *Rao-Cramérovy* dolní *hranice* pro asymptotický rozptyl, resp. asymptotickou kovarianční matici.

$$m_i + q_i \leq q$$

4) ***Odhady parametrů*** $\tilde{\beta}_{.i}, \tilde{\gamma}_{.i}$ ***jsou*** (za stejných předpokladů (e), (f), (g), (h) jako u 2SLS) vždy ***asymptoticky normální*** , výraz pro asymptotickou kovarianční matici je dán výrazem (35) .

Konzistentní odhad prvků σ_{ij} pro jednotlivé rovnice získáme tentokrát z výrazu :

$$_{LIML}\tilde{\sigma}_{ii} = \beta_{.i}^{0} . W_{11} * . \beta_{.i}^{0}$$, kde

$\beta_{.i}^{0}$ je vektor definovaný v (28) a W_{11}^{*} je matice definovaná na str.8 nahoře.

__Poznámka 1__ Jestliže se zvolí normalizace $\beta_{ii}^{0} = 1$, dá se ukázat, že při této normalizaci existuje – ve vztahu k metodě *2SLS* - totožnost asymptotických rozdělení obou těchto estimátorů. Odpovídající vlastnosti (konzistence) se tedy přenášejí též na LIML-estimátor. Znamená to aplikovatelnost testů (původně navržených pro 2SLS) též pro LIML-estimátor.

__Poznámka 2__ Přístup uplatněný v metodě *LIML* se dá rozšířit rovněž na určení ML-odhadů strukturních parametrů libovolné podsoustavy původní soustavy rovnic. Respektují se přitom veškerá omezení na parametry vybrané podsoustavy, nikoliv však omezení kladená na parametry ostatních rovnic. Nelze však již dosáhnout přímého výpočtu odhadovaných parametrů, nýbrž je nutno uplatnit vhodnou

Konzistentní odhad prvků σ_{ij} pro jednotlivé rovnice získáme obvyklým způsobem :

$$s_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{e_{.i} . e_{.j}}{T}$$, kde za

rezidua $e_{.i}, e_{.j}$ vezmeme odhady náhodných složek $\varepsilon_{.i}, \varepsilon_{.j}$ získané dvoustupňovou metodou nejmenších čtverců *2SLS*. Testy statistických rozdělení budou tedy založeny na normálním $N(0,1)$ - rozdělení.