IDENTIFIKAČNÍ PROBLÉM
v soustavě simultánních regresních rovnic

Problém identifikace, který je povahou algebraického, *nikoliv statistického charakteru*, **je okolnost, na kterou je třeba brát ohled při tvorbě ekonometrického modelu již ve fázi specifikace modelových rovnic - jeho případná přítomnost znamená pro kvantitativní analýzu modelu *nesnáz*, která *není překonatelná nasazením ani sebelepší odhadové metody*. Jinými slovy : Není-li model nebo jeho určitá část (rovnice) identifikovaná, je zbytečné se o odhad parametrů tohoto modelu (rovnice) pokoušet statistickými prostředky vůbec. Ilustrujme situaci na příkladě :**

<u>Původní nabídkově-poptávkový (dvourovnicový) model :</u>

Vezměme dvourovnicový model poptávky po určitém zboží déledobé spotřeby, např. po koupelnových vanách. Nechť první rovnice modelu představuje nabídkovou funkci ve tvaru

(1) $QS_v = a + bP_v + u$, **kde** $b > 0$ **(nabídka roste s cenou vany)**

zatímco druhá rovnice poptávkovou funkci ve tvaru :

(2) $QD_v = c + dP_v + v$ **kde** $d < 0$ **(poptávka klesá s cenou vany)**

V rovnicí (1) znamená QS_V ukazatel počtu prodaných van, P_V cenový index van v rovnicí (2) znamená QD_V ukazatel počtu koupených van, P_V cenový index van Obě modelové rovnice jsou zapsány symbolicky *bez uvažování indexu pozorování*, neboť, jak níže uvidíme, výběr vzorku pozorovaných dat není z hlediska vyšetřovaného problému identifikace vůbec podstatný.

Předpokládejme, že prodej van je v rovnováze, tedy, že platí rovnost (identita)

(3) $$QS_v = QD_v \ .$$

Nejdříve zapišme model ve strukturním tvaru. Dostaneme :

(4) $$\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 1 & -d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Qv \\ Pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} . (1) + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Model (po dosazení z identity $QD_V = QS_V = Q_V$) obsahuje dvě běžné endogenní proměnné Q_V, P_V, jedinou exogenní (predeterminovanou) proměnnou, kterou představuje jedničkový vektor a dvě náhodné složky u_t , v_t .

Přistupme k určení redukované formy tohoto modelu :

$\det(B) = b - d$ **(> 0) .** **Matici B^{-1} obdržíme snadno jako**

$B^{-1} = (b-d)^{-1} . \begin{pmatrix} -d & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **a po vynásobení pravé strany (4) dostaneme**

$$\begin{pmatrix} Q_v \\ P_v \end{pmatrix} = (b-d)^{-1}.\begin{pmatrix} -d & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}.(1) + (b-d)^{-1}.\begin{pmatrix} -d & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Redukovaná forma modelu má tedy tvar

(5) $$\begin{pmatrix} Q_v \\ P_v \end{pmatrix} = (b-d)^{-1}.\begin{pmatrix} bc-ad \\ c-a \end{pmatrix} + (b-d)^{-1}.\begin{pmatrix} bv-du \\ v-u \end{pmatrix}$$ **, kde**

$(b-d)^{-1}.(bc-ad) = \Pi_{11}$ **a** $(b-d)^{-1}.(c-a) = \Pi_{21}$**. Odtud je patrné, že:**

a) matice redukované formy sestává pouze ze dvou prvků Π_{11} , Π_{12} - jde tedy o (sloupcový) vektor.

b) výpočet strukturních parametrů a, b, c, d z (dvouprvkové) matice redukované formy nelze korektně provést, neboť kterákoliv dvojice parametrů bude moci být vyjádřena nejen pomocí Π_{11}, Π_{12} , ale (naneštěstí) **též pomocí dvou zbývajících přebývajících** (volných) **strukturních parametrů.**

c) náhodné složky redukovaného tvaru jsou lineární kombinací (obou) náhodných složek strukturního tvaru.

1.modifikace původního modelu :

Uvažujme nyní spolu s (1) místo rovnice poptávky (2) modifikovanou rovnici

(2´) $QD_v = c + dP_v + hY + v$ **kde Y je velikost příjmů spotřebitele, vzatá např. jako veličina průměrná čistá mzda.**

Je zřejmé, že zařazení veličiny Y do rovnice (2) má větší oprávnění než zařazení Y do rovnice (1). Strukturní tvar modelu nyní přejde do podoby :

(6) $$\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 1 & -d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} Qv \\ Pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & h \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

redukovaný tvar nabude tvaru

(7) $$\begin{pmatrix} Q_v \\ P_v \end{pmatrix} = (b-d)^{-1}.\begin{pmatrix} bc-ad & bh \\ c-a & h \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} + (b-d)^{-1}.\begin{pmatrix} bv-du \\ v-u \end{pmatrix}$$,

kde píšeme $\Pi_{11} = (b-d)^{-1}(bc-ad)$, $\Pi_{12} = (b-d)^{-1}bh$

$\Pi_{21} = (b-d)^{-1}(c-a)$, $\Pi_{22} = (b-d)^{-1}.h$

Zde si - na rozdíl od (5) **- všimněme, že strukturní parametry nabídkové rovnice, tj. a, b můžeme jednoznačně odvodit ze (**známých nebo odhadnutých**) parametrů redukovaného tvaru :**

- hodnota parametru b je přímo rovna podílu $b = \dfrac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}$

- hodnotu parametru a získáme jako $a = \Pi_{11} - \Pi_{12}.\Pi_{21}/\Pi_{22}$,

  což lze ověřit např. dosazením :

$$\Pi_{11} - \Pi_{12}.\Pi_{21}/\Pi_{22} = \frac{bc - ad}{b - d} - \frac{[bh(c-a)]/(b-d)^2}{h/(b-d)} = \frac{bc - ad - bc + ab}{b - d} = a$$

V případě poptávkové rovnice v ní příslušnou trojici parametrů c, d, h (bohužel) ze zmíněných čtyř parametrů redukovaného tvaru odvodit nelze.

Povšimněme si, že uvedeným rozšířením poptávkové rovnice o veličinu příjem Y došlo k tomu, že nabídková rovnice se stala identifikovanou, zatímco parametry (neidentifikované) poptávkové rovnice nebylo možno z parametrů redukovaného tvaru odvodit. Intuitivně bychom z toho mohli vyvodit, že (pokud jde o restrikce položené na parametry rovnic (dosazením 0 u nepřítomných vysvětlujích veličin) , právě zařazením restrikcí (v tomto případě dosazením 0 za veličinu Y nepřítomnou v nabídkové rovnici) činíme kroky k zajištění identifikovanosti (parametrů) rovnice.

2.modifikace původního modelu :

Uvažujme dále spolu s (2a) místo rovnice nabídky (1a) modifikovanou rovnici

2´) $QS_v = a + bP_v + gS + v$ kde S je rozsah sortimentu vyjádřený např. jako rozsah prodejních ploch v m² .

V tomto případě bude mít strukturní tvar maticovou formu

(8) $$\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 1 & -d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Qv \\ Pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & g & 0 \\ c & 0 & h \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ S \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

a z ní vyplývající redukovaný tvar

(9) $$\begin{pmatrix} Q_v \\ P_v \end{pmatrix} = (b-d)^{-1} . \begin{pmatrix} bc - ad & -dq & bh \\ c - a & -q & h \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ S \\ Y \end{pmatrix} + (b-d)^{-1} . \begin{pmatrix} bv - du \\ v - u \end{pmatrix} ,$$

kde máme

$$\Pi_{11} = (b-d)^{-1}(bc - ad) \ , \ \Pi_{12} = -(b-d)^{-1} dq \ , \ \Pi_{13} = (b-d)^{-1} bh$$
$$\Pi_{21} = (b-d)^{-1}(c - a) \ , \ \Pi_{22} = -(b-d)^{-1}.q \ , \ \Pi_{23} = (b-d)^{-1}.h$$

Vyšetřeme nyní, kolik (případně zda všechny) parametrů strukturního tvaru jsou odvoditelné z parametrů redukovaného tvaru ? Zřejmě můžeme ihned psát

$b = \dfrac{\Pi_{13}}{\Pi_{23}}$, $d = \dfrac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}$ **a tedy** $b - d = \dfrac{\Pi_{13}.\Pi_{22} - \Pi_{12}.\Pi_{23}}{\Pi_{22}.\Pi_{23}}$**, odtud dále**

$$q = -\Pi_{22}.(b-d) = \frac{\Pi_{12}.\Pi_{23} - \Pi_{13}.\Pi_{22}}{\Pi_{23}}$$

$h = \Pi_{23}.(b-d) = \dfrac{\Pi_{13}.\Pi_{22} - \Pi_{12}.\Pi_{23}}{\Pi_{22}}$ **a konečně ze vztahu pro** Π_{21}

dostaneme $c = \Pi_{21}(b-d) + a$ **a následně dosazením do vztahu pro** Π_{11} **získáme oba zbývající parametry strukturního vztahu** a, c**:**

$$a = \Pi_{11} - b.\Pi_{21} = \Pi_{11} - \frac{\Pi_{13}}{\Pi_{23}}.\Pi_{21}$$

$$c = \Pi_{11} - d.\Pi_{21} = \Pi_{11} - \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}.\Pi_{21}.$$

Při této druhé modifikaci tedy dojde k dosažení identifikovanosti u obou modelových rovnic.

<u>Obecně:</u>

Abychom dosáhli identifikovanosti, je nutné, aby každá (i-tá) rovnice modelu splňovala podmínku

(10) $$\boldsymbol{m_i + q_i \le q} \quad ,$$

neboli, aby počet vysvětlujících proměnných $\boldsymbol{m_i + q_i}$ **i-té rovnice byl nanejvýš roven počtu všech predeterminovaných proměnných modelu** q**. Bude-li platit opačná nerovnost, budou (přinejmenším některé) parametry i-té rovnice neidentifikované. Rozlišíme přitom dva případy : pokud**

v (10) platí rovnost, nazveme *přesná identifikovanost*

v (10) platí rovnost, nazveme *přeidentifikovanost.* (Tento druhý případ je častější)

<u>Poznámka</u> : Někdy se vztah (8) formuluje nikoliv v počtech *vysvětlujících*, ale v počtech *všech* v i-té rovnici *přítomných* proměnných. Pokud tedy m_i^* **označuje počet všech přítomných proměnných rovnice, modifikuje se vztah (10) na**

(10*) $$\boldsymbol{m_i^* + q_i \le q + 1} \quad .$$

Podmínky (10) resp. (10*) jsou ve vztahu k identifikovanosti podmínkami nutnými, nikoliv však postačujícími. Nazývají se tzv. *řádové podmínky identifikace*. Postačující podmínky, nazývané též *hodnostní podmínky identifikace,* jsou založeny na vyšetření hodnosti submatice Π **matice redukované formy** Π**, která musí nabývat maximální možné hodnosti, tedy** $\boldsymbol{m_i + q_i}$**, nesmí tedy obsahovat lineárně závislé sloupce.**

<u>Identifikace v rekursívním ekonometrickém modelu :</u>

A) V *obecném interdependentním* modelu máme následující počty neznámých strukturních parametrů ***(uvažujeme situaci, do které nevkládáme restrikce vyplývající z omezení položených na strukturní parametry) :***

počet parametrů u běžných endogenních proměnných = počet prvků (obecné) matice B (s normovanou diagonálou) tj. m . (m-1)

počet parametrů u predeterminovaných proměnných = počet prvků (obecné) matice C = m.q.

počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek strukturního tvaru = počet prvků (symetrické) pozitivně definitní matice Σ = (m+1)*m/2.

<u>Dohromady má tedy strukturní tvar m.[m+q+(m-1)/2] neznámých parametrů.</u>

B) Naproti tomu redukovaný tvar modelu obsahuje tyto počty parametrů :
počet parametrů redukovaného tvaru = počet prvků (obecné) matice Π tj. m.q
počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek redukovaného tvaru = počet prvků (symetrické) pozitivně definitní matice Ω = (m+1)*m/2.

<u>Dohromady má tedy redukovaný tvar m . [q + (m+1)/2] neznámých parametrů.</u>

Informace obsažené v parametrech neomezeného redukovaného tvaru je tedy méně (o m-1 parametrů) než v parametrech neomezeného strukturního tvaru (vždy platí, že m > 1 u vícerovnicového modelu).

<u>Poznámka</u> : Odtud je mj. vidět, že omezení vkládaná na parametry strukturního tvaru mohou tuto disproporci snížit, popř. ji úplně odstranit. Tím dosáhneme identifikovanosti modelu nebo (aspoň) identifikovanosti některé **strukturní rovnice.**

C) V *rekursívním* ekonometrickém modelu máme následující počty neznámých strukturních parametrů :

počet parametrů u běžných endogenních proměnných = počet prvků matice B (s nulovými prvky v horním/dolním trojúhelníku a s normovanou diagonálou) tj. m . (m-1)/2

počet parametrů u predeterminovaných proměnných = počet prvků (obecné) matice C = m.q.

počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek redukovaného tvaru = počet prvků (symetrické) pozitivně definitní diagonální matice Σ = m.

<u>Dohromady má tedy strukturní tvar rekursívního modelu tvar m.[q+(m+1)/2] neznámých parametrů</u>, tedy tolik, kolik je parametrů redukovaného tvaru.

Počet parametrů redukovaného tvaru (i při respektování restrikcí přenesených z omezení na parametry strukturního tvaru) je nezměněný, tj. je roven počtu m x [q + (m+1)/2]

<u>Poznámka</u> : Počet parametrů (neomezeného) redukovaného tvaru je tedy u modelu rekursívního typu roven počtu parametrů (neomezeného) strukturního tvaru.

Celkem tedy je předmětem odhadu m x (m-1) + m.q + m = m(m/2 + q + 1/2) strukturních parametrů rekursívního modelu. Tento počet je přesně shodný s počtem parametrů redukovaného tvaru modelu. Nejsou-li tedy mezi parametry modelu zavedena další omezení, lze zpětně každý parametr strukturního tvaru určit jednoznačně z (odhadnutých) parametrů redukovaného tvaru.