

Příklady z počtu pravděpodobnosti

Příklad 1.: Technická kontrola provádí třídění produkce závodu. Pravděpodobnost vyrobení zmetku je 0,05. Zmetek je kontrolou odhalen s pravděpodobností 0,97, kvalitní výrobek je mylně označen za zmetek s pravděpodobností 0,02. Výrobky, které byly kontrolou označeny za zmetky, se vyřazují. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, který

- byl vyřazen, je zmetek
- nebyl vyřazen, je zmetek
- byl vyřazen, je kvalitní
- nebyl vyřazen, je kvalitní?

Návod: Příklad 5 z POTu, příklad 6.8., příklady 10 a 11 z Kontrolních otázek a úkolů v 6. kapitole

Řešení:

H_1 ... výrobek je zmetek, $P(H_1) = 0,05$

H_2 ... výrobek je kvalitní, $P(H_2) = 0,95$

A ... kontrola označí výrobek za zmetek, $P(A/H_1) = 0,97$, $P(A/H_2) = 0,02$

$P(A) = P(H_1) P(A/H_1) + P(H_2) P(A/H_2) = 0,05 \cdot 0,97 + 0,95 \cdot 0,02 = 0,0675$

$$\text{ad a) } P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0,05 \cdot 0,97}{0,0675} = 0,7185$$

$$\text{ad b) } P(H_1 / \bar{A}) = \frac{P(H_1)P(\bar{A} / H_1)}{1 - P(A)} = \frac{0,05 \cdot (1 - 0,97)}{1 - 0,0675} = 0,0016$$

$$\text{ad c) } P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{0,95 \cdot 0,02}{0,0675} = 0,2815$$

$$\text{ad d) } P(H_2 / \bar{A}) = \frac{P(H_2)P(\bar{A} / H_2)}{1 - P(A)} = \frac{0,95 \cdot (1 - 0,02)}{1 - 0,0675} = 0,9984$$

Příklad 2.: Provedeme tři nezávislé pokusy, v nichž sledujeme nastoupení úspěchu. V prvním pokusu nastává úspěch s pravděpodobností 0,5, ve druhém pokusu s pravděpodobností 0,2 a ve třetím pokusu s pravděpodobností 0,1.

- Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X , která udává počet úspěchů v těchto třech pokusech a nakreslete její graf.
- Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X .
- Vypočtěte rozptyl náhodné veličiny X .
- Jaká je pravděpodobnost, že nastane aspoň jeden úspěch?

Řešení:

ad a) Označme X_i počet úspěchů v i -tém pokusu, $i = 1, 2, 3$. X_i nabývá hodnot 0,1.

X nabývá hodnot 0, 1, 2, 3.

$$\begin{aligned} \pi(0) &= P(X = 0) = P((X_1 = 0 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 0)) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 0) = \\ &= 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,36 \end{aligned}$$

$$\pi(1) = P(X = 1) =$$

$$= P((X_1 = 1 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 0) \vee (X_1 = 0 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 0) \vee (X_1 = 0 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 1)) =$$

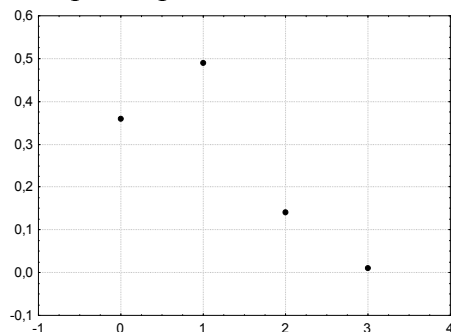
$$= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 0) + P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 0) +$$

$$+ P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 1) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,36 + 0,09 + 0,04 = 0,49$$

$$\begin{aligned}
\pi(2) &= P(X = 2) = \\
&= P((X_1 = 1 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 0) \vee (X_1 = 1 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 1) \vee (X_1 = 0 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 1)) = \\
&= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 0) + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 1) + \\
&+ P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 1) = \\
&= 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,09 + 0,04 + 0,01 = 0,14 \\
\pi(3) &= P(X = 3) = \\
&= P(X_1 = 1 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 1) = 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,01
\end{aligned}$$

Graf pravděpodobnostní funkce



$$\begin{aligned}
\text{ad b) } E(X) &= 0 \cdot 0,36 + 1 \cdot 0,49 + 2 \cdot 0,14 + 3 \cdot 0,01 = 0,8 \\
D(X) &= 0^2 \cdot 0,36 + 1^2 \cdot 0,49 + 2^2 \cdot 0,14 + 3^2 \cdot 0,01 - 0,8^2 = 1,14 - 0,64 = 0,5
\end{aligned}$$

$$\text{ad c) } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \pi(0) = 1 - 0,36 = 0,64$$

Příklad 3.: Firma investovala do tří nezávislých projektů. Pravděpodobnost zisku z těchto projektů je 0,4, 0,5 a 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že firma bude mít zisk

- právě jedenkrát (jev A)
- alespoň jedenkrát (jev B)
- právě dvakrát (jev C)
- aspoň dvakrát (jev D)
- ze všech tří projektů (jev E)
- ze žádného projektu? (jev F)

Řešení:

Označme A_i jev, že firma bude mít zisk z i -tého projektu, $i = 1, 2, 3$.

ad a)

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = \\
&= 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 10^{-3} (60 + 90 + 210) = 0,36
\end{aligned}$$

ad b)

$$P(B) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 1 - 0,09 = 0,91$$

ad c)

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \\
&= 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 10^{-3} (60 + 140 + 210) = 0,41
\end{aligned}$$

ad d)

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(C) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(C) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,41 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = \\
&= 0,41 + 0,14 = 0,55
\end{aligned}$$

ad e)

$$P(E) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14$$

ad f)

$$P(F) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09$$

Příklad 4.: V jedné dílně pracují nezávisle na sobě tři dělníci. Náhodná veličina X_i udává počet zmetků, které vyrobí i -tý dělník za jednu směnu, $i = 1, 2, 3$. Dlouhodobým pozorováním byly zjištěny hodnoty pravděpodobnostní funkce $\pi_i(x_i)$, $i = 1, 2, 3$.

1. dělník		2. dělník		3. dělník	
x_1	$\pi_1(x_1)$	x_2	$\pi_2(x_2)$	x_3	$\pi_3(x_3)$
0	0,01	0	0,09	0	0,00
1	0,52	1	0,63	1	0,41
2	0,36	2	0,28	2	0,52
3	0,11	3	0,00	3	0,07

- Pomocí střední hodnoty počtu zmetků posuďte, který z dělníků podává nejlepší výkon.
- Pomocí rozptylu počtu zmetků posuďte, který z dělníků podává nejvyrovnanější výkon.
- Jaká je střední hodnota a rozptyl počtu zmetků vyrobených v této dílně za jednu pracovní směnu?

Řešení:

ad a) $E(X_1) = 1,57$, $E(X_2) = 1,19$, $E(X_3) = 1,66$. Znamená to, že nejlepší výkon podává druhý dělník.

ad b) $D(X_1) = 0,4851$, $D(X_2) = 0,3339$, $D(X_3) = 0,3644$. Znamená to, že nejvyrovnanější výkon podává druhý dělník.

ad c) $E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 1,57 + 1,19 + 1,66 = 4,42$,

$D(X_1 + X_2 + X_3) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) = 0,4851 + 0,3339 + 0,3644 = 1,1834$

Příklad 5.:

a) Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě do terče. Pravděpodobnosti zásahů při prvním, druhém a třetím výstřelu jsou 0,7, 0,8 a 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že střelec zasáhne terč aspoň jedenkrát? Návod: Příklad 6 b) z POTu.

b) Nechť náhodná veličina X má rozložení $F(5,20)$. Najděte kvantil $F_{0,025}(2,10)$. Návod: Příklad 9.4. d).

c) Náhodná veličina X se řídí rozložením $N(12, 16)$. Jaká je pravděpodobnost, že tato náhodná veličina se bude realizovat v intervalu $(8,16)$? Návod: Příklad 8.9., věta 7.5. a), 4. vlastnost.

Řešení:

ad a) Jev A_i znamená zásah terče při i -tém výstřelu, $i = 1, 2, 3$. Počítáme

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 1 - 0,006 = 0,994$$

$$\text{ad b) } F_{0,025}(2,10) = \frac{1}{F_{0,975}(10,2)} = \frac{1}{39,398} = 0,02538$$

ad c)

$$P(8 < X \leq 16) = P\left(\frac{8-12}{\sqrt{16}} < \frac{X-12}{\sqrt{16}} \leq \frac{16-12}{\sqrt{16}}\right) = P(-1 < U \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0,84134 - 1 = 0,68268$$

Příklad 6.: Potřebu smrkových sazenic kryje lesní závod produkcí dvou školky. První školka kryje 75% výsadby, přičemž ze 100 sazenic je 80 první jakosti. Druhá školka kryje výsadbu z 25%, přičemž na 100 sazenic připadá 60 první jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že

- náhodně vybraná sazenice je první jakosti; (věta 6.7. (a), příklad 6.8. (a))
- náhodně vybraná sazenice první jakosti pochází z produkce první školky; (věta 6.7. (b), příklad 6.8. (b))
- náhodně vybraná sazenice první jakosti pochází z produkce druhé školky? (věta 6.7. (b), příklad 6.8. (b))

Řešení:

H_1 ... sazenice pochází z 1. školky, $P(H_1) = 0,75$

H_2 ... sazenice pochází z 2. školky, $P(H_2) = 0,25$

A ... sazenice je 1. jakosti, $P(A/H_1) = 0,8$, $P(A/H_2) = 0,6$

ad a) $P(A) = P(H_1) P(A/H_1) + P(H_2) P(A/H_2) = 0,75 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,6 = 0,75$

ad b) $P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0,75 \cdot 0,8}{0,75} = 0,8$

ad c) $P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,6}{0,75} = 0,2$