MATEMATIKA I

učební materiály:

DSO Matematika I

tutor: Markéta Matulová
(KAMI ESF, dveře 104,
tel.: 549495984)
e-mail: 8987@mail.muni.cz

Konzultační hodiny:
Víkendové termíny budou
oznámeny mailem,
po domluvě - čtvrtky 13:30-14:30

Podmínkou ke složení zkoušky
je odevzdání 3 POTů, zadá-
ní a termíny budou na
www.is.muni.cz

OKRUHY SŠ MATEMATIKY:

- ÚPRAVA VÝRAZŮ!
- ABSOLUTNÍ HODNOTA
- ELEMENTÁRNÍ FUNKCE, VLASTNOSTI, GRAFY
- ŘEŠENÍ
  - LINEÁRNÍCH ROVNIC A NEROVNC, JEJICH SOUSTAV
  - KVADRATICKÝCH ROVNIC
  - EXPONENCIÁLNÍCH, LOGARITMICKÝCH A GONIOMETRICKÝCH ROVNIC
- ANALYTICKÁ GEOMETRIE (ROVNICE PŘÍMKY, ROVINY, PRŮNIK A ODCHYLKA PŘÍMEK A ROVIN...)
- VARIACE, KOMBINACE, PERMUTACE

DOPORUČENÁ LITERATURA:

Polák J.: Přehled SŠ matematiky 6. vydání, Praha 1997

OPAKOVÁNÍ

ZÁKLADNÍ POJMY A ZNAČENÍ

množina

- příklady definování množiny:
  - výčtem prvků: $A = \{a, b, c\}$
  - pomocí výroků:

    $B = \{x \in \mathbb{R},\ x > 5\}$
- značíme:

  $\emptyset$ ... prázdná množina

  $x \in A$ ... x patří do množiny A

  $x \notin A$ ... x nepatří — " —

  $A \subseteq B$ ... A je podmnožinou B

  $A \subset B$ ... A je vlastní podmn. B

Př.: Označme tyto množiny:

$A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2\}$

platí tato tvrzení?

a) $B \subseteq A$ ✗

b) $C \in A$ ✗

c) $\emptyset \subseteq B$ ✓

d) $C \subset A$ ✓

e) $2 \subset B$ ✗ $\{2\} \subset B$

$2 \in \underbrace{\{0, 1, 2\}}_{A}$

MNOŽINOVÉ OPERACE

Uvažujme základní prostor Ω a jeho podmnožiny A, B.

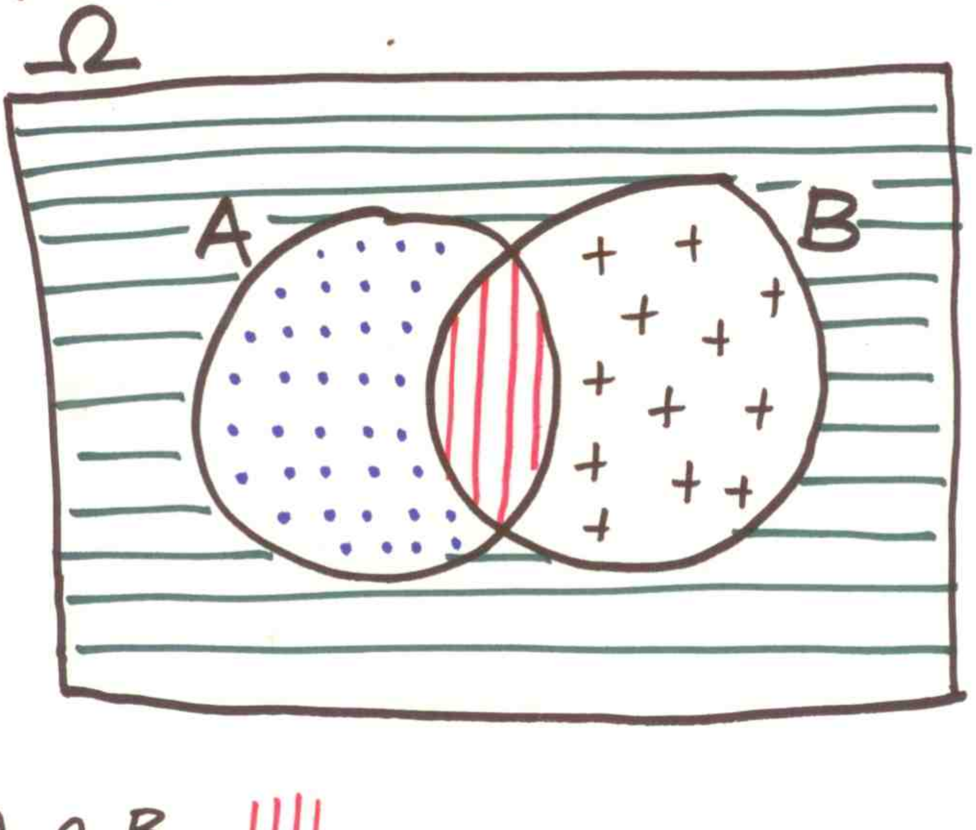
Značíme: $A \cap B$ ... průnik A a B

$A \cup B$ ... sjednocení A a B

$A - B$ ... rozdíl A a B

A' ... komplement (doplněk) množiny A

Grafické znázornění:



Př.: $A \cap B$ ... ||||

$A \cup B$ .... ⁙, ||||, + + +

$A - B$ ... ⁙

A' ... ≡, + + +

cvičení:

Je-li dáno $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$,
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,

určete:
a) $A - B$
b) $A \cap B'$
c) $(A \cup B)'$
d) $A' \cap B'$
e) $(A - B) \cup (B - A)$
f) $(A \cup B) - (A \cap B)$

řešení:

a) $A - B = \{1, 3, 5\}$

b) $B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$A \cap B' = \{1, 3, 5\}$

c) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$
$(A \cup B)' = \{7, 9\}$

d) $A' = \{6, 7, 8, 9, 10\}$
$A' \cap B' = \{7, 9\}$

e) $B - A = \{6, 8, 10\}$
$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$

f) $A \cap B = \{2, 4\}$
$(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$

a) = b) c) = d) e) = f)

cv.: pomocí grafického znázornění ověřte, že platí:

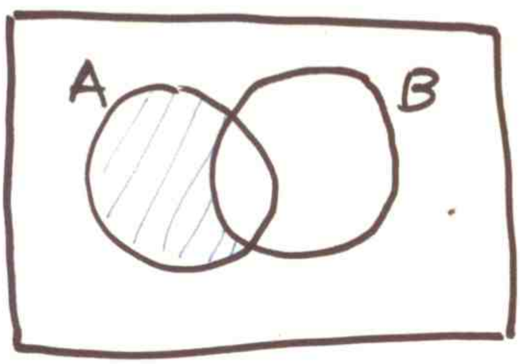
a) $A - B = A \cap B'$

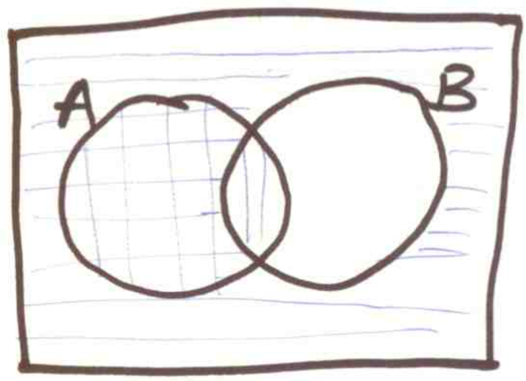
b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

c) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

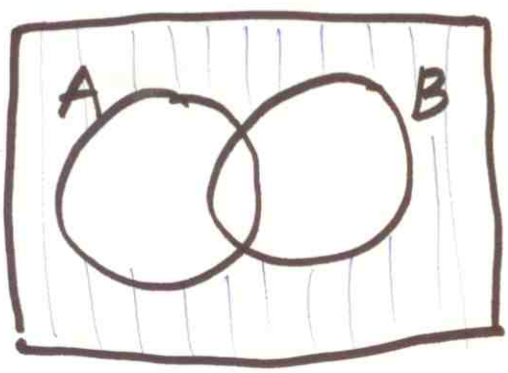
řešení:

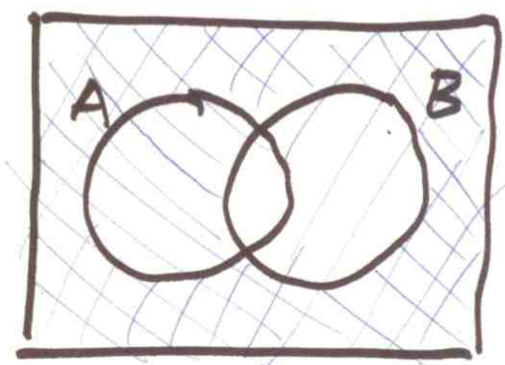
a)

L = 

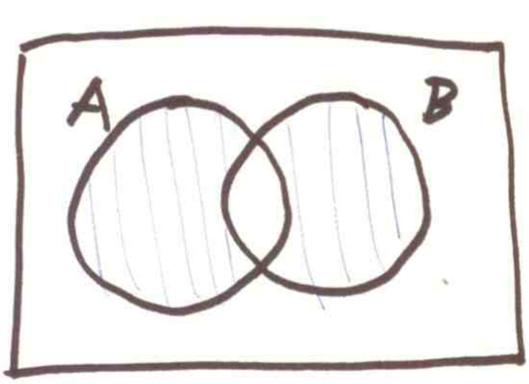
P = 

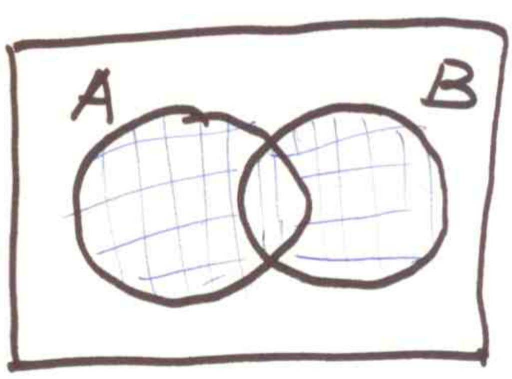
b)

L = 



c)

L 



VÝROKOVÝ POČET

Výrokem rozumíme tvrzení, o jehož pravdivosti (či nepravdivosti) má smysl uvažovat.

Př.: „Dobrý den" – není výrok

„číslo x je sudé" – výroková forma

„$3 + 3 = 7$"

Označme symboly p, q dva výroky. Pravdivému výroku přiřazujeme pravdivostní hodnotu 1, nepravdivému 0.

Př.: Nechť například $\neg p: 3 \leq 6$

výrok p … „číslo $3 > 6$"

výrok q … „číslo 3 je liché"

Pak píšeme $p \equiv 0$, $q \equiv 1$.

Negace výroku p: značíme $\neg p$, přiřazujeme opačnou pravdivostní hodnotu než má výrok p

Pokračování příkladu: $\neg p$ … „$3 \leq 6$"

$\neg p$ … „číslo 3 není větší než 6."

$\neg q$ … „číslo 3 není liché." $\neg q \equiv 0$

Složené výroky, logické spojky

Nechť p, q jsou výroky. Označujeme:

$\boxed{p \wedge q}$ ... konjunkce výroků "a"

Výrok $p \wedge q$ je pravdivý, jsou-li pravdivé oba výroky p, q.

$\boxed{p \vee q}$ ... disjunkce výroků "nebo"

Výrok $p \vee q$ je pravdivý, je-li pravdivý alespoň jeden z výroků p, q

$\boxed{p \Rightarrow q}$ ... implikace "z p plyne q"

výrok $p \Rightarrow q$ je nepravdivý pouze v případě, kdy p je pravdivý a q ne.

$\boxed{p \Leftrightarrow q}$ ... ekvivalence "p právě když q"

Výrok $p \Leftrightarrow q$ je pravdivý, pokud oba výroky p, q jsou současně pravdivé nebo pokud jsou oba nepravdivé.

Př.: Uvažujme opět výroky

p ... $3 > 6$ $\quad\quad$ $p \equiv 0$

q ... 3 je liché číslo. Pak $q \equiv 1$

$p \wedge q$ ... $3 > 6$ a zároveň 3 je liché.

$p \wedge q \equiv 0.$

$p \vee q$ ... $3 > 6$ nebo 3 je liché.

$p \vee q \equiv 1.$

$p \Rightarrow q$ ... Pokud $3 > 6$, pak je 3 liché

$p \Rightarrow q \equiv 1.$ $\quad$ $q \Rightarrow p \equiv 0$

$p \Leftrightarrow q$ ... 3 je větší než 6 ($\Leftrightarrow$) právě když je 3 liché.

$p \Leftrightarrow q \equiv 0.$

Více str. 18, tab. 1.1. a příklady.

Výrokové formy, kvantifikátory.

Označme $V(x)$ výrokovou formu závislou na proměnné x. Nechť množina M je oborem proměnné x

Píšeme: $\forall x \in M : V(x)$ ... pro všechna $x \in M$ platí $V(x)$.

$\exists x \in M : V(x)$ ... existuje $x \in M$, pro něž $V(x)$.

Př.: Nechť $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$V(x)$ ... číslo x je sudé.

Pak výrok $\forall x \in M : V(x)$ čteme

„Všechna čísla z množiny M jsou sudá." $\equiv 0$

Výrok $\exists x \in M : V(x)$ čteme

„V množině M je alespoň jedno sudé číslo." $\equiv 1$

Negací výroku $\forall x \in M : V(x)$ dostaneme výrok $\exists x \in M : \neg V(x)$.

Negací výroku $\exists x \in M : V(x)$ dostaneme výrok $\forall x \in M : \neg V(x)$

Potračování příkladu:

Výrok $\neg(\forall x \in M : V(x))$ můžeme zapsat takto:

„Existuje aspoň jedno číslo v množině M, které není sudé." $\equiv 1$

Výrok $\neg(\exists x \in M : V(x))$ můžeme zapsat:

„Žádné číslo z množiny M není sudé." $\equiv 0$

Př.: Zapište negace výroků a rozhodněte o jejich pravdivosti:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x < y \equiv 1$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y = x \equiv 1$

c) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x = y^2 \equiv 0$

d) $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} :$ číslo y je dělitelné číslem x $\equiv 1$

e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x > y \Rightarrow x^2 > y^2$ $\equiv 0$

řešení:

a) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x \geq y \equiv 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y \neq x$

c) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x \neq y^2 \equiv 1$

d) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :$ číslo y není dělitelné číslem x

e) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x > y \wedge x^2 \leq y^2$

LINEÁRNÍ ALGEBRA

úvod do maticového počtu:

Matica (def. 3.1.)

Matici typu (m,n) označujeme takto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$a_{i,j}$ … $\mathbb{R}$ číslo, ležící v i-tém řádku a j-tém sloupci.

Př.: $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je matica typu $(2,3)$ a např.

$a_{1,1} = 2$, $a_{1,2} = 3$, $a_{2,2} = 0$

$a_{2,3} = 1$.

Matici a typu $(1,n)$ nazýváme řádkovým vektorem, píšeme

$$a = (a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n),$$

matici b typu $(m,1)$ nazveme sloupcovým vektorem, píšeme

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Relace mezi maticemi

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jsou matice stejného typu (m, n).

Pak $\mathbb{A} < \mathbb{B}$, jestliže
$a_{ij} < b_{ij}$ pro $\forall i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots n.$

$\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$, jestliže
$a_{ij} \leq b_{ij}$ —— " ——

⋮

$\mathbb{A} = \mathbb{B}$, jestliže
$a_{ij} = b_{ij}$ —— " ——

Př.: a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Platí $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$? NE!

b) $\underset{(2,3)}{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\underset{(3,2)}{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

Platí $\mathbb{B} = \mathbb{A}$? NE!

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ Platí $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$?

OPERACE S MATICEMI

Součet matic (def 3.2.)

Př.: Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ jsou matice stejného typu, např.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Součet matic $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2+0 & 0+4 & 1+2 \\ -1+5 & 3-2 & 5+2 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Násobení matice číslem (def. 3.3)

Př.: Nechť $\mathbb{A}$ je matice z min. příkladu a $c \in \mathbb{R}$, např. $c = 3$.

Matice $c.\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3.2 & 3.0 & 3.1 \\ 3.(-1) & 3.3 & 3.5 \end{pmatrix}$

$$c.\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Pozn.: Jsou-li $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ stejného typu, definujeme $\mathbb{A} - \mathbb{B}$ jako $\mathbb{A} + (-1).\mathbb{B}$.

Př.: $\mathbb{A} - \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2-0 & 0-4 & 1-2 \\ -1-5 & 3+2 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Násobení matic (def. 3.5.)

Př.: Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu (m,k) a $\mathbb{B}$ matice typu (k,n). (Typy matic „navazují" na sebe),

např.: $\underset{(2,3)}{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\underset{(3,2)}{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pak součin matic $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} =$

$$= \begin{pmatrix} 1.1 + 0.5 + 2.1 & 1.2 + 0.4 + 2.0 \\ -2.1 + 1.5 + 3.1 & -2.2 + 1.4 + 3.0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Typ matice $\mathbb{A}$ je $(2,3)$, $\mathbb{B}$ $(3,2)$ a $\mathbb{A}.\mathbb{B}$ je typu $(2,2)$.

Pozor! $\mathbb{A}.\mathbb{B}$ není totéž jako $\mathbb{B}.\mathbb{A}$!

Pokračování př.:

$$\mathbb{B}.\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1-4 & 0+2 & 2+6 \\ 5-8 & 0+4 & 10+12 \\ 1+0 & 0+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 22 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Platí-li pro matice $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ rovnost $\mathbb{A}.\mathbb{B} = \mathbb{B}.\mathbb{A}$, nazýváme je ZAMĚNITELNÉ

Matice transponovaná (def 3.6)

Pokr. příkladu: „Výměna úlohy řádků a sloupců"

Matice $\mathbb{A}^T$ transponovaná k $\mathbb{A}$:

$$\underset{(3,2)}{\mathbb{A}^T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

matice $\mathbb{B}^T$ transponovaná k $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Zkusme spočítat $\mathbb{A}^T . \mathbb{B}^T$ a $\mathbb{B}^T . \mathbb{A}^T$:

$$\mathbb{A}^T . \mathbb{B}^T = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 8 & 22 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{B}^T . \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{A}^T . \mathbb{B}^T &= (\mathbb{B} . \mathbb{A})^T \\ \mathbb{B}^T . \mathbb{A}^T &= (\mathbb{A} . \mathbb{B})^T \end{aligned}}$$

Platí pro každé dvě matice vhodných typů, viz věta 3.1.

Počítání s maticemi, speciální matice

Čtvercová matice:
Matici $\mathbb{A}$ typu (n,n) nazveme čtvercovou maticí řádu n.

Nulová matice:
Matici $\mathbb{O}$ typu (m,n), jejíž všechny prvky jsou rovny 0, nazveme nulovou maticí.

$\mathbb{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Jednotková matice:
Matici $\mathbb{E}$ řádu n, jejíž (diagonální) prvky a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou rovny 1 a všechny ostatní jsou nulové, nazveme jednotkovou.

Počítání s maticemi (věty 3.2., 3.3.)

Př.: Nechť $\alpha = 3$, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ověřte vztahy:

(3.26) $\alpha \cdot (\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \alpha \cdot \mathbb{A} + \alpha \cdot \mathbb{B}$, $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

(3.29) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{E}_2 = \mathbb{A}$,

(3.30) $(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \cdot \mathbb{C} = \mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \cdot \mathbb{C})$ $= \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ (3.32) $\mathbb{C} \cdot (\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{A} + \mathbb{C} \cdot \mathbb{B}$.

Řešení: (3.26):

$$\alpha\cdot(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = 3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 6 & 6\end{pmatrix}}$$

$$\alpha\cdot\mathbb{A}+\alpha\cdot\mathbb{B} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 6 & -3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6 & 6\\ 0 & 9\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 6 & 6\end{pmatrix}}$$

(3.29):

$$\underline{\mathbb{A}\cdot\mathbb{E}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \underline{\mathbb{A}}.$$

(3.30):

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \begin{pmatrix}-2 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix},\quad (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\cdot\mathbb{C} = \underline{\begin{pmatrix}-4 & -6\\ -2 & -12\end{pmatrix}}$$

$$\mathbb{B}\cdot\mathbb{C} = \begin{pmatrix}-4 & -6\\ -6 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C}) = \underline{\begin{pmatrix}-4 & -6\\ -2 & -12\end{pmatrix}}.$$

(3.32):

$$\mathbb{A}+\mathbb{B} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C}\cdot(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \underline{\begin{pmatrix}6 & 6\\ 2 & -4\end{pmatrix}},$$

$$\mathbb{C}\cdot\mathbb{A} = \begin{pmatrix}6 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbb{C}\cdot\mathbb{B} = \begin{pmatrix}0 & 9\\ 4 & -4\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C}\cdot\mathbb{A}+\mathbb{C}\cdot\mathbb{B} = \underline{\begin{pmatrix}6 & 6\\ 2 & -4\end{pmatrix}}$$

INVERZNÍ MATICE

(def. 3.9.)
Inverzní maticí k matici A nazveme matici A^{-1}, pro niž

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}$$

Z definice plyne, že nutnou podmínkou existence inverzní matice k matici A je, že A je čtvercová. Další podmínky se dozvíme později.

Př.: Nechť $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ověřte, že

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ je inverzní k A.

řešení: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 6-5 & 2-2 \\ 15-15 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 6-5 & 3-3 \\ -10+10 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Najděte inverzní matici k A^{-1}!

řešení: $\boxed{A = (A^{-1})^{-1}.}$

Existuje ještě nějaká jiná matice inverzní k A?

Ne, A^{-1} je určena jednoznačně.
viz věta 3.4.

Pokračování příkladu:

Nechť dále je dána matice $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

a její inverzní matice $\mathbb{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

Spočítejte $\mathbb{A}.\mathbb{B}$, $\mathbb{B}^{-1}.\mathbb{A}^{-1}$ a $(\mathbb{A}.\mathbb{B}).(\mathbb{B}^{-1}.\mathbb{A}^{-1})$

řešení:
$$\mathbb{A}.\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 29 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{B}^{-1}.\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -21 & 8 \\ 29 & -11 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{A}.\mathbb{B}).(\mathbb{B}^{-1}.\mathbb{A}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jsou-li $\mathbb{A}^{-1}$, $\mathbb{B}^{-1}$ inverzní k $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, pak opravdu platí $(\mathbb{A}.\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}.\mathbb{A}^{-1}$ (viz d) věty 3.4.)

Ukažme, že $(\mathbb{B}^{-1}.\mathbb{A}^{-1}).(\mathbb{A}.\mathbb{B}) = \mathbb{E}$:

$$\mathbb{B}^{-1}.\underbrace{(\mathbb{A}^{-1}.\mathbb{A})}_{\mathbb{E}}.\mathbb{B} = \mathbb{B}^{-1}.\underbrace{(\mathbb{E}.\mathbb{B})}_{\mathbb{B}} = \mathbb{B}^{-1}.\mathbb{B} = \mathbb{E}$$

DETERMINANT MATICE

Nechť A je čtvercová matice. Determinantem matice A rozumíme $\boxed{\text{číslo } |A|}$ definované v def. 5.1.

- je-li A řádu $\underline{1}$, tj $A=(a_{11})$, pak $\boxed{|A| = a_{11}}$.
- je-li A řádu $\underline{2}$, tj. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ pak $|A| = \boxed{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}}$.
- je-li A řádu $\underline{3}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

pak
$$\boxed{\begin{aligned}|A| = {} & a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + \\ & + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - \\ & - a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}\end{aligned}}$$

... SARUSOVO PRAVIDLO

Pomůcka:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \;\; - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

„Determinant je roven součtu členů získaných součinem vždy 3 prvků matice, ve směru hlavní diagonály \ je členům ponecháno znaménko, ve směru vedlejší diagonály / se znaménko mění."

Př.: Určete hodnotu determinantu matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \\ -3 & 2 \end{matrix}$

řešení:

$$|A| = 2.5.4 + 0.1.(-3) + 0.2.(-1) -$$
$$- (-3).5.(-1) - 2.2.1 - 0.0.4 =$$
$$= 40 - 15 - 4 = \underline{\underline{21}}$$

DETERMINANTY VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Zavedeme pojem submatice:

(def. 3.7)

Je-li A matice typu (m,n) a $i \in \{1,2,\dots,m\}$, $j \in \{1,2,\dots,n\}$, pak $A_{i,j}$ značíme matici, která vznikne z A vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Jde o submatici matice A.

Př.: Nechť
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Určete submatici $A_{2,3}$.

řešení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ \cancel{4} & \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 8 & 3 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 8 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Podle def. 5.1. určíme determinant matice A řádu n pomocí determinantů řádu n-1:

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot |A_{1,1}| + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot |A_{1,2}| + \ldots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1,n} \cdot |A_{1,n}|.$$

Pokračování příkladu: určete $|A|$:

řešení:

$$|A| = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & -1 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-48) - 3 \cdot (-82) + 5 \cdot (75) - 6 \cdot (105) = \ldots$$

VÝPOČET DETERMINANTU ROZVOJEM

(věta 5.6.): $\forall s \in \{1, \dots, n\}$: $|A| = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{s+t} \cdot a_{s,t} \cdot |A_{s,t}|$

Nechť A je matice řádu n. Výpočet determinantu podle def. 5.1. nazýváme rozvojem podle 1. řádku. Obdobně lze použít rozvoj dle s-tého řádku, kde $s \in \{1, \dots, n\}$.

Pomůcka:

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Př.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

určete $|A|$.

řešení: počítejme rozvoj dle 3. řádku

$$|A| = (-1)^{3+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot 0 + (-1)^{3+4} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (36) - 3 \cdot (-32) = 144 + 96 = \underline{\underline{240}}$$

Determinant matice A řádu n je roven determinantu matice A^T. (věta 5.7) : $\boxed{|A| = |A^T|}$

Transponováním matice A a následným rozvojem podle s-tého řádku A^T (kde $s \in \{1, \dots, n\}$) lze odvodit vzorec pro výpočet $|A|$ rozvojem dle s-tého sloupce:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+s} a_{k,s} \, |A_{k,s}|.$$

Pokračování příkladu:
spočtěme $|A|$ rozvojem dle 3. sloupce

$$|A| = (-1)^{1+3} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot 0 + (-1)^{3+3} \cdot 0 +$$

$$+ (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (\quad) - 1 \cdot (\quad) =$$