4.1 Výdajová funkce a její vlastnosti

Definice 13 Máme dánu spojitou užitkovou funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, cenový vektor $\mathbf{p}$ a mějme dále určenu konkrétní velikost užitku $\mathbf{u}^0$ (skalární, v ordinálním pojetí). Potom funkci

(4.1) $$\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p}) = \mathbf{Min}\left[\mathbf{px}, \mathbf{u}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{u}^0\right]$$

nazveme **výdajovou funkcí** ***[expenditure function]*** ve vztahu k užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Argumenty výdajové funkce je cenový vektor a velikost užitku požadovaná spotřebitelem. Výdajová funkce představuje minimální možné náklady (spojené s nákupem nanejvýš $\mathbf{n}$ statků při exogenně stanovených cenách $\mathbf{p}$) vynaložené na komoditní kombinaci, která poskytuje užitek přinejmenším o velikosti $\mathbf{u}^0$. Spotřebitel přitom nemusí nakupovat všechny komodity a s ohledem na kriteriální funkci v (3.11) dá přednost těm, u kterých dosažení užitku na žádané výši docílí nejlevněji.

Definice 13A Výdajová funkce $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p})$ příslušná užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ s přijatými vlastnostmi (U1) - (U5) má tyto vlastnosti :

(V1) $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p})$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, přičemž $\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p}) > \mathbf{0}$ **pro libovolnou úroveň užitku** $\mathbf{u}^0 > 0$.

(V2) $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p}^0)$ je **rostoucí v** $\mathbf{u}$ **pro jakýkoliv cenový vektor** $\mathbf{p}^0 > \mathbf{0}$. $\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})$ je **neklesající v** $\mathbf{p}$ **a rostoucí alespoň v jedné z cen** $\mathbf{p}_i$ **pro libovolnou úroveň užitku** $\mathbf{u}^0$.

(V3) $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p}^0)$ je **spojitá v** $\mathbf{u}$ **pro jakýkoliv cenový vektor** $\mathbf{p}^0 > \mathbf{0}$. $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p}^0)$ je **spojitá v** $\mathbf{p}$ **pro libovolnou úroveň užitku** $\mathbf{u}^0$.

(V4) $\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})$ je **lineárně homogenní v** $\mathbf{p}$ **pro libovolnou úroveň užitku** $\mathbf{u}^0$. Znamená to, že platí $\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\lambda\mathbf{p}) = \lambda.\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})$ **pro libovolné** $\lambda \in (0,+\infty)$

(V5) $\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})$ je **konkávní v cenách** $\mathbf{p}$ **pro libovolnou úroveň užitku** $\mathbf{u}^0$. Znamená to, že platí $\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mu\mathbf{p}+(1-\mu)\mathbf{p}^*) \geq \mu.\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})+(1-\mu).\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p}^*)$ **pro libovolné dva cenové vektory** $\mathbf{p},\mathbf{p}^* > 0$ **a libovolné** $\mu \in \langle 0,1 \rangle$.

Vlastnost (V2) konstatuje, že s růstem velikosti užitku požadovaného spotřebitelem (ostře) roste i výdaj na pořízení komodit. Tatáž vlastnost ve vztahu k $\mathbf{p}$ připouští, že růst některých cen (zpravidla těch, které právě nejsou ve vybírané kombinaci statků pro poskytujících užitek $\mathbf{u}^0$**) nemusí nutně vést k růstu výdajů spotřebitele. Očekávaný (=úměrný) vývoj nákladů na komoditní kombinaci při změně cenového měřítka všech komodit pak vyjadřuje (V4), zatímco vlastnost (V5) obrazně charakterizuje „ne vyšší než lineární" tendenci vývoje výdajů při růstu kterékoliv z cen $\mathbf{p}_i, \mathbf{i} = 1,2,\ldots,\mathbf{n}$. Vlastnost (V1) zahrnuje**

matematická omezení funkce $n+1$ proměnných v kontextu ekonomického významu $E(u,p)$ a konstatuje, že kladnou hodnotu užitku nelze dosáhnout zdarma. Spojitost (V3) v užitku i cenách konstatuje, že náklady nemohou skokovitě růst (ani klesat) tehdy, jestliže se jen nepatrně změní některá z cen nebo úroveň užitku u^0.

Jestliže máme definovánu výdajovou funkci $E(u,p)$ s výše uvedenými vlastnostmi (jmenovitě vlastností (V2)), máme tím zaručeno, že k této výdajové funkci existuje funkce inverzní, která bude vyjadřovat hladinu užitku v jako funkci výdajů a cen komodit.
Význam výdajové funkce spočívá mj. v tom, že pomocí ní lze generovat celý systém poptávkových funkcí v tzv. Hicksově smyslu. Uvedená možnost (pro diferencovatelnou výdajovou funkci) vychází z modifikace tzv. Shephardova lemmatu. Z uvedeného lemmatu vyplývá, že lze psát :

(4.2) $$\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_j} = h_j(u,p)$$, kde

funkce na pravé straně vyjadřuje poptávku po komoditě x_j .

4.2 Nepřímá užitková funkce a její vlastnosti

Definice 14 Máme dánu výdajovou funkci $M = E(u^0,p)$ s cenovým vektorem p a současně tím určenu konkrétní velikost výdajů M. Potom funkci

(4.3) $$\psi(M,p) = \mathrm{Max}[u(x); px = M]$$

nazveme **nepřímá užitková funkce *[indirect utility function]*** ve vztahu k výdajové funkci $E(u^0,p)$. Argumenty této funkce jsou tedy cenový vektor a velikost příjmu spotřebitele použitelná na nákup komodit v množstvích x.

Definice 14A Nepřímá užitková funkce $\psi(M,p)$ příslušná k výdajové funkci $E(p,u^0)$ s vlastnostmi (V1) - (V5) je charakterizována těmito vlastnostmi:

(W1) $\psi(M,p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, přičemž $\psi(0,p) = 0$.

(W2) $\psi(M,p^0)$ je **rostoucí v M** pro jakýkoliv cenový vektor $p^0 > 0$. Dále $\psi(M^0,p)$ je **nerostoucí v p** (pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů M^0) .

(W3) **spojitá v M** pro jakýkoliv cenový vektor $p^0 > 0$ **a spojitá v p** pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů M^0.

(W4) $\psi(M,p)$ je **homogenní funkce stupně** 0 současně **v cenách p a výdajích M**.
Znamená to, že platí $\psi(\lambda M,\lambda p) = \psi(M,p)$ pro libovolné $\lambda \in (0,+\infty)$

(W5) $\psi(M^0, p)$ je **konkávní funkce v p** **pro jakoukoliv úroveň výdajů** M^0. Znamená to, že platí $\psi(M^0, \mu p + (1-\mu)p^*) \geq \mu.\psi(M^0, p) + (1-\mu).\psi(M^0, p^*)$ pro $\mu \in \langle 0,1 \rangle$.

(W5*) $\psi(M^0, p)$ je **kvazikonvexní funkce v p** **pro jakoukoliv úroveň výdajů** M^0. Znamená to, že platí pro $\mu \in \langle 0,1 \rangle$

$$\psi(M^0, \mu p + (1-\mu)p^*) \leq Max[\psi(M^0, p); \psi(M^0, p^*)]$$

Prvá z vlastností (W1) konstatuje mj. že s nulovými peněžními prostředky žádný kladný užitek nezískáme: při kladných cenách statků nejsme bez peněz prostě žádné statky schopni zakoupit.

(W2) Ve vztahu k M se předpokládá, že zvýšený příjem je vynaložen účelně a není alokován do neužitečných komodit. Dle téže (W2), se zvýšením kterékoliv z cen p_i (při neměnných výdajích) užitek nemůže nikdy vzrůst (nemusí však ani nutně klesnout, neboť ke zdražení může dojít u nenakupovaných statků).[1]

Spojitost (W3) v cenách i příjmu zřejmě odpovídá reálné situaci, že „nepatrná změna“ kterékoliv z cen p_i ani příjem M nemůže vyvolat skokovitou (nespojitou) změnu užitku plynoucího z nakupovaného spotřebního koše.

Vlastnost (W4) lze chápat tak, že pokud by došlo k tomu, že by se všechny ceny $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i příjem M změnily v témže poměru (např. λ-násobně), nezmění se na situaci viděné očima spotřebitele vůbec nic: při nezměněných relativních cenových poměrech p_i / M není ze strany spotřebitele důvod ke změně poptávkového chování po potenciálně dostupných komoditách. (Spotřebitel se bude řídit stejnými preferenčními hledisky jako dříve.)

Konečně poslední z vlastností (W5) interpretována v první verzi *(konkávnost)* **obrazně znamená, že při** libovolné **změně cen bude užitek z „lineární směsi“ obou cenových vektorů přinejmenším roven „lineární směsi“ dílčích užitků získaných s jedním, resp. druhým cenovým vektorem. Ve vlastnosti se nepřímo odráží „zisk v užitku“ plynoucí z toho, že při cenových změnách lze aspoň něco „ušetřit“ tím, že při substitučních možnostech lze kupovat méně z více zdražených statků a více z méně zdražených (či zlevněných nebo těch, u kterých se cena nezměnila). Druhá interpretace** *(kvazikonvexnost)* **pak určuje horní mez, kterou užitek ze směsi nemůže přesáhnout (ta je dána velikostí užitku z „užitkově příznivější“ cenové situace.**

[1] **Již jsme zmínili, že výdaj v ztotožňujeme s příjmem spotřebitele M**

Doplněk Konvexnost, konkávnost, kvazikonvexnost a kvazikonkávnost

Řekneme, že spojitá funkce $G(x_1,x_2,...,x_n)$ n proměnných $x_1,x_2,...,x_n$ (definovaná na konvexní množině X) je pro dva body $x,z\in X$ (aniž víme, zda $G(x) < G(z)$ nebo naopak)

(A1) ryze **konvexní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x+(1-\lambda).z) < \lambda.G(x)+(1-\lambda).G(z)$$

(B1) ryze **konkávní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x+(1-\lambda).z) > \lambda.G(x)+(1-\lambda).G(z)$$

(C1) ryze **kvazikonvexní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x+(1-\lambda).z) < Max[G(x),G(z)]$$

(D1) ryze **kvazikonkávní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x+(1-\lambda).z) > Min[G(x),G(z)]$$

ve všech případech **pro libovolné skalární $\lambda\in(0,1)$.**

(A2) konvexní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x+(1-\lambda).z) \le \lambda.G(x)+(1-\lambda).G(z)$$

(B2) konkávní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x+(1-\lambda).z) \ge \lambda.G(x)+(1-\lambda).G(z)$$

(C2) kvazikonvexní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x+(1-\lambda).z)\leq Max[G(x),G(z)]$$

(D2) kvazikonkávní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x+(1-\lambda).z)\geq Min[G(x),G(z)]$$

ve všech případech **pro libovolné skalární** $\lambda\in\langle 0,1\rangle$ **.**

Je-li známo, ve kterém z obou bodů je hodnota funkce $G(.)$ větší, např. platí-li $G(x)<G(z)$,

pak lze předchozí definice modifikovat např. takto:

(A3) konvexní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(x/2+z/2)\leq 0{,}5.G(x)+0{,}5.G(z)$$

(B3) konkávní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(x/2+z/2)\geq 0{,}5.G(x)+0{,}5.G(z)$$

(C3) kvazikonvexní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(x/2+z/2)\leq G(z)$$

(D3) kvazikonkávní, jestliže platí neostrá **nerovnost**

$$G(x/2+z/2)\geq G(x) \quad .$$

4.3 Marshallovské poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic (3.1A) s podmínkou (3.1B) pro neznámé $x_1, x_2, ..., x_n$, případně i veličinu λ obdržíme pro každou komoditu

Definice 15 Poptávkovou funkci po i-té komoditě *[commodity demand function]* *v Marshalovském tvaru [in the Marshallian form]*, zapsatelnou ve tvaru

(4.4) $$x_i = g_i(M, p_1, p_2, ..., p_n) \ ,$$

která je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru **p** a příjmu spotřebitele **M**.

Definice 15A Máme-li poptávku po komoditě x_i $(i=1,2,....,n)$ vyjádřenu zápisem (4.4) s nějakou poptávkovou funkcí $x_i = g_i(M,p)$ $n+1$ proměnných **M** a **p**, pak každá taková poptávková funkce ze soustavy *n* poptávkových funkcí $g_1,....,g_n$ má následující vlastnosti :

(D1M) $g_i(M,p)$ je **reálná konečná nezáporná funkce** a platí pro ni $g_i(0,p)=0$.

(D2M) $g_i(M,p)$ je **nerostoucí v ceně i-té komodity p_i a neklesající v příjmu M**.

(D3M) $g_i(M,p)$ je **spojitá v příjmu M a spojitá v** p_i $(i=1,2,....,n)$.

(D4M) **Marshallovské poptávkové funkce** $x_i = g_i(M,p)$ **jsou homogenní stupně 0 současně v cenách a příjmu.** Platí tedy $g_i(\lambda M, \lambda p) = g_i(M,p)$.

(D5HM) Úplná **soustava marshallovských poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná.** Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^{n} p_i g_i(M,p) = M$.

(D6M) **"Křížové" derivace marshallovských poptávek (podle jednotlivých cen) jsou symetrické**, tzn. platí

$$\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} + x_j . \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} = \frac{\partial x_j(M,p)}{\partial p_i} + x_i . \frac{\partial x_j(M,p)}{\partial M} \qquad \text{pro všechna } i,j$$

(D7M) **Matice S rozměrů** $[n \times n]$ **sestávající z prvků** $s_{ij} = \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} + x_j . \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M}$ **je negativně semidefinitní**, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí **S** podmínku

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} + x_j . \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M}\right] \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$$

takže lze psát $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$. Přímým důsledkem negativní semidefinitnosti **S** jsou podmínky $s_{ii} \le 0, i = 1,2,...,n$). Vlastní cenové pružnosti jsou nekladné.

4.4 Hicksovské poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic (3.6A) s podmínkou (3.6B) pro neznámé $x_1, x_2, ..., x_n$, případně i veličinu μ obdržíme pro každou komoditu

Definice 16 Poptávkovou funkci po i-té komoditě *(commodity demand function)* *v Hicksovském tvaru [in the Hicksian form]* , zapsatelnou ve tvaru

(4.5) $$x_i = h_i(u, p_1, p_2, ..., p_n) \, ,$$

která je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru **p** a na spotřebitelem žádané hladině užitku **u**.

Definice 16A Máme-li poptávku po komoditě x_i $(i=1,2,....,n)$ vyjádřenu zápisem (4.5) s nějakou poptávkovou funkcí $h_i(u,p)$ $n+1$ proměnných **u** a **p**, pak každá taková poptávková funkce ze soustavy *n* poptávkových funkcí $h_1, ..., h_n$ má následující vlastnosti :

(D1H) $h_i(u,p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce** a platí pro ni $h_i(0,p) = 0$.

(D2H) $h_i(u,p)$ je **nerostoucí v ceně i-té komodity p_i a neklesající v užitku u.**

(D3H) $h_i(u,p)$ je **spojitá v užitku u a spojitá v p_i** $(i = 1,2,\dots,n)$.

(D4H) **Hicksovské poptávkové funkce $x_i = h_i(u,p)$ jsou homogenní stupně 0 v cenách p**[2]. Znamená to, že platí $h_i(u,\lambda p) = h_i(u,p)$

(D5H) Úplná **soustava Hicksovských poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná**. Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^{n} p_i h_i(u,p) = M$

(D6H) **"Křížové" derivace hicksovských poptávek (podle jednotlivých cen) jsou symetrické**, tzn. platí $\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(u,p)}{\partial p_i}$ pro všechna i,j

(D7H) **Matice S^* rozměrů $[n \times n]$ sestávající z prvků $s_{ij}^* = \frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j}$ je negativně semidefinitní**, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí S^* podmínku

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j}\right] \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$$

S^* je tvořena prvky s_{ij}^*, kde $s_{ij}^* = \frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j}$, takže lze psát $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}^* \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$.

Důsledkem negativní semidefinitnosti S^* jsou podmínky $s_{ii}^* \le 0$.

Poslední výrok tvrzení ad (D1) vyjadřuje skutečnost, že s nulovým příjmem nelze pořídit ani nejmenší množství žádného užitečného statku. Dvě vlastnosti obsažené v (D2) charakterizují závisle proměnnou (poptávku) jako monotónní funkce ceny p_i a příjmu M, přičemž zvýšení ceny neznamená nutně snížení poptávky (zájem spotřebitele může být upřen na jiné komodity) a zvýšení příjmu nemusí nutně vést (ze stejného důvodu) ke zvýšení poptávky po i-tém statku. Spojitost ve všech argumentech vylučuje skokovitý přírůstek poptávky při nepatrné změně ceny či příjmu. Vlastnosti uvedené v (D5) vyjadřují úplné rozložení disponibilního příjmu M na nákup (ne však nutně všech) n komodit bez ohledu na to, jakou formulaci poptávkových funkcí přijmeme. V podmínkách (D4) je obsažena zásada, že proporční změna důchodu a cen neovlivní nijak chování poptávky po žádné z komodit.

Součtovatelnost (D5) a homogenita nultého stupně (D4) jsou důležitým nástrojem v teoretické analýze poptávkových vztahů, nicméně častěji se

[2] Je-li výchozí (*výdajová*) funkce homogenní stupně 1, je její derivace (*poptávková*) funkce homogenní stupně 0.

vyjadřují zprostředkovaně v zápisech s derivacemi poptávkových funkcí (místo původních poptávkových funkcí). Z ***podmínky součtovatelnosti*** (D5) takto vyplývají vztahy (platné pro $i = 1,2,\ldots,n$) :

(4.6A,B) $$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M} = 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p_i} + g_i(M,p) = 0$$

takže změna v příjmu M a cenách p způsobí přeskupení v nákupech, které neporuší výdajové omezení. Získáme je derivováním rozpočtového omezení $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$ podle příjmu , resp. podle ceny p_i.

Identity (4.6A) a (4.6B) se nazývají ***Engelova*** resp. ***Cournotova agregační podmínka***. Z podmínky homogenity nultého stupně (D4) Marshallovských poptávek obdobně vyplývá, že pro $i = 1,2,\ldots,n$ platí

(4.7) $$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p_k} + M \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M} = 0$$

Ověření **Z podmínky homogenity 0-stupně vyplývá** $g_k(\lambda M, \lambda p) = g_k(M,p)$ **a tedy též**

$$\frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial \lambda} = 0.$$

$$\frac{\partial g_k(\lambda M,\lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M,\lambda p)}{\partial \lambda M} \cdot \frac{\partial \lambda M}{\partial \lambda} + \frac{\partial g_k(\lambda M,\lambda p)}{\partial \lambda p} \cdot \frac{\partial \lambda p}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M,\lambda p)}{\partial \lambda M}.M + \frac{\partial g_k(\lambda M,\lambda p)}{\partial \lambda p}.p$$

Speciální volbou pro $\lambda = 1$ dostaneme

$$0 = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M,\lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M}.M + \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p}.p = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M}.M + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p_k}.p_k$$

Chování poptávky spotřebitele vůči každé komoditě $\xi_i, i = 1,2,\ldots,n$ jen v závislosti na jeho příjmu (tzn. při pevném cenovém vektoru p) pak udávají

4.5 Engelovy křivky

Určíme-li ceny $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ v Marshallovské poptávkové funkci (4.4) pevně, získáme

Definice 17 **Engelovu křivku pro i-tou komoditu** ***[Engel curve]*** zapsatelnou ve tvaru

(4.8) $$x_i = f_i(M) \, ,$$

která je charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na jeho příjmu M a odvoditelné z poptávkových funkcí $g_i(M,p)$ poté, co do nich dosadíme jako pevné hodnoty ceny jednotlivých komodit $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Definice 17A Máme-li poptávku po i-té komoditě x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ vyjádřenou zápisem (4.8) s nějakou ***Engelovou křivkou*** $f_i(M)$ jedné proměnné, pak každá tato Engelova křivka má následující vlastnosti :

(E1) **Engelova křivka $f_i(M)$ je reálná, konečná nezáporná funkce** a platí $f_i(0) = 0$.

(E2) **Engelova křivka $f_i(M)$ je neklesající v příjmu** M.

(E3) **Engelova křivka $f_i(M)$ je spojitá v M.**

(E4) **Engelova křivka $f_i(M)$ je konkávní v M.**

(E5) Úplná **soustava Engelových křivek $f_i(M)$ je součtovatelná**, tzn. platí

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(M) = M \,.$$

(E6) Platí **Engelova agregační podmínka** $\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \dfrac{\partial f_k(M)}{\partial M} = 1$

Vlastnosti Engelovy křivky $f_i(M), i = 1,2,\ldots,n$ jsou vesměs konformní s vlastnostmi Marshallovské poptávkové funkce $g_i(M,p)$, pokud při pevném p omezíme pozornost na chování poptávky ve vztahu k příjmu. Navíc se předpokládá konkávnost (E4) $f_i(M)$ jako funkce jedné proměnné M a úplné vynaložení spotřebitelova příjmu na pořízení komodit (ne nutně všech) při jakékoliv úrovni M. ***Engelova křivka*** je (jen) slabě monotónní, neboť zvýšení příjmu nemusí nutně vést ke zvýšení poptávky právě po i-té komoditě.

Tečna k ***Engelově křivce*** vyjadřuje hodnotu mezního sklonu ke spotřebě dané komodity, tzn. poměr mezi (limitně chápanou) změnou spotřeby (realizované poptávky) x_i a změnou důchodu M tj. $\dfrac{\partial x_i}{\partial M}$. Připomeňme, že výraz

$$s_{iM} = \frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{x_i} = \frac{\partial x_i}{x_i} \bigg/ \frac{\partial M}{M}$$

nazýváme **příjmová pružnost poptávky**.

Na její hodnotě závisí klasifikace ekonomických statků: V rámci nich

a) je-li příjmová pružnost poptávky větší než 1, pak jde o *luxusní statek* .

b) je-li příjmová pružnost poptávky v intervalu $(0,1)$, jde o *normální statek.*

c) je-li příjmová pružnost poptávky rovna 0, jde o *příjmově inertní statek*

d) je-li příjmová pružnost poptávky menší než 0, jde o *inferiorní statek.*

4.6 Shephardovo lemma a Royova identita

Nejdůležitějším tvrzením, které platí mezi výdajovou funkcí a soustavou Hicksovských poptávkových funkcemi v rovnovážné situaci, je ***Shephardovo lemma***. Ronald W.Shephard je formuloval původně pro vztah mezi nákladovou funkcí (jako obdobou výdajové funkce) a poptávkovými funkcemi (po výrobních faktorech) v teorii produkce.

Tvrzení 6 *Shephardovo lemma* *[Shephard lemma]*

Máme dánu výdajovou funkci $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p})$ příslušnou k užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ s vlastnostmi (V1), (V2), (V3), (V4), (V5). Potom jednotlivé ze soustavy poptávkových funkcí po komoditách získáme tímto způsobem

$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_i} \tag{4.9}$$

což znamená, že tvar poptávkové funkce po komoditě ζ_i je určen jako parciální derivace výdajové funkce podle ceny této komodity. Toto fundamentální tvrzení je základním východiskem při konstrukci soustavy poptávkových funkcí po užitek přinášejících statcích z výdajové funkce.

Důkaz tvrzení 6

Zvolme pevně, ale jinak libovolně cenový vektor $\mathbf{p}^0$, hladinu užitku $\mathbf{u}^0$ a příslušný vektor optimálních (ve vztahu $\mathbf{p}^0$) $\boldsymbol{n}$ komoditních množství $\mathbf{x}^0$. Dále pro jakýkoliv jiný cenový vektor $\mathbf{p}$ definujme funkci $\chi(\mathbf{p})$ vztahem

$$\chi(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{p}_k \mathbf{x}_k^0 - \mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p}) \tag{4.10}$$

Protože $\mathbf{x}^0$ není nutně optimální ve vztahu k $\mathbf{p}$, výdaje na pořízení množství $\mathbf{x}^0$ při cenách $\mathbf{p}$ musí vždy být přinejmenším tak velké, jako jsou analogické výdaje na pořízení těch množství, která jsou optimální vzhledem k $\mathbf{p}^0$ - tyto minimální výdaje udává výdajová funkce $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p})$. Tedy $\chi(.)$ je vždy větší nebo nejméně rovna 0. Dále víme, že $\chi(\mathbf{p}^0)$ je rovna 0, tj. χ nabývá svého minima, pokud $\mathbf{p}$ je rovno $\mathbf{p}^0$. Proto všude tam, kde existují derivace $\frac{\partial \chi(.)}{\partial \mathbf{p}_i}$ musí platit v komoditní kombinaci $\mathbf{p}^0$

$$\frac{\partial \chi(\mathbf{p}^0)}{\partial \mathbf{p}_i} = \mathbf{x}_i^0 - \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p}^0)}{\partial \mathbf{p}_i} = \mathbf{0} \tag{4.10}$$

Protože jsme pevnou hodnotu $\mathbf{p}^0$ volili libovolně, je vztah (4.10) dokázán. □ .

Poznámka 1 I když výdajová funkce splňuje všechny vlastnosti (V1),..., (V5), nelze obecně zaručit, že *pomocí* ***Shephardova lemmatu*** odvozený systém poptávkových funkcí splňuje všechny vlastnosti předpokládané u funkcí deklarovaných jako poptávkové, tj. (D1),... , (D6).

Poznámka 2 Opačný postup - tzn. sestrojení výdajové funkce integrací systému poptávkových funkcí (aniž trváme na splnění vlastností (D1),... , (D6)) - není obecně uskutečnitelný, a to ani tehdy ne, jestliže s jistotou víme, že taková výdajová funkce $\mathbf{E}(\mathbf{p},\mathbf{u}^0)$ existuje a že ji lze vyjádřit v explicitním tvaru. Pokud lze takovou výdajovou funkci zkonstruovat ze soustavy poptávkových funkcí, říkáme, že tato soustava splňuje tzv. *"**podmínku integrability**"*.

Dalším užitečným tvrzením je věta, která charakterizuje určitou „příbuznost“ struktury mezi funkčními tvary u jednotlivých poptávkových funkcí.

Tvrzení 7 ***Symetrie poptávkových funkcí*** ***[symmetry of the demand functions]***

Mějme dánu výdajovou funkci $\mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})$ příslušnou k užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ s vlastnostmi (V1), (V2),(V3),(V4),(V5), která má navíc spojité všechny parciální derivace aspoň do 2. řádu včetně. Potom pro systém poptávkových funkcí vyvozených pomocí *Shephardova lemmatu* (4.10) platí:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_j(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_k} = \frac{\partial \mathbf{x}_k(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j} \tag{4.11}$$

Důkaz tvrzení 7

Okamžitě vyplývá z tzv. *Youngovy věty známé z matematické analýzy* deklarující nezávislost druhých parciálních derivací na pořadí derivování, jestliže jsou tyto druhé parciální derivace spojité. Pak platí:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_j(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_k} = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j \partial \mathbf{p}_k} = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_k \partial \mathbf{p}_j} = \frac{\partial \mathbf{x}_k(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j} \tag{4.12}$$

čímž je důkaz tvrzení proveden. □.

V tomto smyslu lze tedy mluvit o podmínce symetrie každé funkce ze soustavy poptávkových funkcí. Je tedy zřejmé, že všechny poptávkové funkce musí mít formálně příbuznou funkční podobu, která se může u jednotlivých funkcí systému lišit různými hodnotami parametrů těchto funkcí, nemůže jít však o principiálně odlišný funkční typ. *(např. jedna poptávková funkce nemůže být logaritmem součtu kvadrátů svých argumentů, zatímco druhá by byla arkustangentou součinu odmocnin těchže argumentů)*. Uvedená podmínka tedy výrazně snižuje „pestrost“ v možných vzájemných odlišností jednotlivých poptávkových funkcí.

Shephardovo lemma umožňuje generovat Hicksovy poptávkové funkce z výdajové funkce. Pokud bychom chtěli odvodit ***Marshallovy poptávkové funkce***, stačí k tomu substituovat za argument u ve výdajové funkci hodnoty nepřímé užitkové funkce $\psi(.)$, která má argumenty $\mathbf{p}$ a $\mathbf{M}$. Dostaneme

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{h}_i(\mathbf{u},\mathbf{p}) = \mathbf{h}_i(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{M},\mathbf{p}),\mathbf{p}) = \mathbf{g}_i(\mathbf{M},\mathbf{p}) \tag{4.13}$$

tzn. ***soustavu poptávkových funkcí (pro*** $i = 1,2,....,n$***) v Marshallově tvaru.***

Pokud bychom byli postaveni před opačný problém, tj. vyvodit Hicksovy poptávkové funkce z Marshallových, potom lze postupovat v inverzním směru. Máme-li dány $\mathbf{g}_i(\mathbf{M},\mathbf{p}), \mathbf{i} = 1,2,....,\mathbf{n}$, dosadíme za argument $\mathbf{M}$-výdaj je plně vynaložen na nákup $\boldsymbol{x}$ - hodnotu výdajové funkce $E(u,\boldsymbol{p})$.

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{g}_i(\mathbf{M},\mathbf{p}) = \mathbf{h}_i(\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p}),\mathbf{p}) = \mathbf{h}_i(\mathbf{u},\mathbf{p}) \tag{4.14}$$

Vztah mezi nepřímou užitkovou a výdajovou funkcí, jež jsou vzájemně inverzní, lze zapsat identitou

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{M},\mathbf{p}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p}),\mathbf{p}) \equiv \mathbf{u} \tag{4.15}$$

Obdobou *Shephardova lemmatu* formulovaného ve vztahu k výdajové funkci pro vyvození poptávkových funkcí (tentokrát v Marshallově tvaru) z nepřímé užitkové funkce $\psi(\mathbf{p},M)$je vztah známý jako Royova identita. Je pojmenována po svém objeviteli, francouzském ekonomu a matematikovi *René Royovi* [1943]. Nezávisle na něm ji formuloval jiný francouzský matematik *Jean Villé* [1941].

Tvrzení 8 Royova identita *[Roy-Villé identity]*

Máme dánu nepřímou užitkovou funkci $\psi(\mathbf{p},\mathbf{M})$ příslušnou užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ s vlastnostmi (W1), (W2), (W3), (W4), (W5). Potom soustavu Marshallových poptávkových funkcí po komoditách získáme tímto způsobem

$$\mathbf{x}_i(\mathbf{M},\mathbf{p}) = \frac{-\dfrac{\partial\boldsymbol{\psi}(\mathbf{M},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_i}}{\dfrac{\partial\boldsymbol{\psi}(\mathbf{M},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{M}}} \tag{4.16}$$

To znamená, že poptávkovou funkci po i-té komoditě obdržíme jako (záporně vzatý) podíl dvou parciálních derivací nepřímé užitkové funkce $\psi(M,p)$, a to jednak podle ceny $\mathbf{i}$-té komodity, jednak podle spotřebitelova příjmu M .

Důkaz tvrzení 8

Vztahem (4.7) jsme zapsali, že výdajová funkce a nepřímá užitková funkce jsou vzájemně v inverzním vztahu. Ten můžeme vyjádřit zápisem identity:

(4.17) $$\psi[E(u,p),p] = u.$$

Jestliže tuto identitu (platící pro libovolnou dvojici pevných hodnot $\mathbf{p}$ a $\mathbf{u}$) derivujeme podle pevně zvolené ceny $\mathbf{p_i}$, dostaneme *při uplatnění řetězového pravidla pro derivaci složené funkce* vztah

(4.18) $$\frac{\partial\psi[E(p,u),p]}{\partial p_i} = \frac{\partial\psi(E(p,u))}{\partial E(u,p)} \cdot \frac{\partial E(u,p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_i} + \frac{\partial\psi(u,p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_i} = 0$$, neboť

při pevném $\mathbf{u}$ je $\frac{\partial u}{\partial p_i} = 0$ a dále $\frac{\partial p}{\partial p_i} = 1$, neboť $\frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \partial_{ij}$ (*Kroneckerovo* ∂), $i,j = 1,2,....,n$ a dále $E(u,p) = M$, neboť příjem $\mathbf{M}$ je rozdělen beze zbytku.

Vztah (4.18) můžeme tedy přepsat do tvaru

(4.19) $$\frac{\partial\psi(M,p)}{\partial M} \cdot \frac{\partial E(u,p)}{\partial p_i} + \frac{\partial\psi(M,p)}{\partial p_i} = 0$$

Z *Shephardova lemmatu* víme, že $\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_i} = x_i$ (tj.Hicksova poptávka po i-tém statku). Odtud tedy již snadno odvodíme

(4.16) $$x_i = g_i(M,p) = -\frac{\dfrac{\partial\psi(M,p)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial\psi(M,p)}{\partial M}}$$ □ .

Poznámka 3 Jestliže nepřímou užitkovou funkci vyjádříme v normalizovaném tvaru, tzn. s argumenty představujícími jednotkové ceny statků (dělené příjmem) $\psi\left(\frac{p_1}{M},\frac{p_2}{M},....,\frac{p_n}{M},1\right) = \psi^*(r_1,r_2,....,r_n)$, kde pracujeme s $\boldsymbol{n}$-členným vektorem normovaných cen $(r_1,r_2,....,r_n)$, pak lze *Royovu identitu* zapsat jako

(4.20) $$\frac{p_i x_i}{M} = \frac{\dfrac{\partial\psi^*(r)}{\partial \log r_i}}{\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi^*(r)}{\partial \log r_j}}$$

tedy ve tvaru vyjadřujícím rozpočtovou účast $\boldsymbol{i}$-té komodity na celkovém příjmu $\boldsymbol{M}$ jako podíl parciální derivace nepřímé užitkové funkce podle logaritmované ceny této komodity a součtu analogicky vyjádřených parciálních derivací $\psi^*(r)$ podle všech logaritmovaných cen.

4.7 Schématické vyjádření vztahů

mezi *přímou užitkovou, nepřímou užitkovou a výdajovou funkcí a soustavami poptávkových funkcí v Marshallovském a Hicksovském tvaru*

K vyjádření vztahů mezi ekonomickými funkčními typy může sloužit schéma

rozpočtové omezení | spotřebitel | užitková funkce

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M}$$

$$\boxed{u(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Minimalizační úloha | *Maximalizační úloha*

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \text{zapodmínky} \\ u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge u^0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{Max}\, u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{zapodmínky} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M,\ x_i \ge 0 \end{array}}$$

substituce

$$x_i = h_i\left(u^0, p\right)$$

substituce

$$x_i = g_i(M, p)$$

VÝDAJOVÁ FUNKCE $E\left(u^0, p\right)$ ← inverze → NEPŘÍMÁ UŽITKOVÁ FUNKCE $\psi(M, p)$

Shephardovo lemma

$$x_i = \frac{\partial E\left(u^0, p\right)}{\partial p_i}$$

Royova identita

$$x_i = -\frac{\dfrac{\partial \psi(M, p)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial \psi(M, p)}{\partial M}}$$

derivace E podle p_i | záporný podíl derivací ψ podle p_i,M

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ PO KOMODITÁCH V HICKSOVĚ TVARU $x_i = h_i\left(u^0, p\right)$

←substituce →

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ PO KOMODITÁCH v MARSHALLOVĚ TVARU $x_i = g_i(M, p)$

*/ Podrobněji R.W. Shephard: Cost and Production Functions (1953) nebo tentýž autor: Theory of Cost and Production Functions. Princeton U.P. 1970.

4.8 Problém „integrability“

Poznámka 4

Poptávkové funkce v Marshallovském tvaru lze získat v podstatě třemi způsoby:

(A) Z přímé užitkové funkce přímým řešením maximalizačního problému (1A) při rozpočtovém omezení (1B).

(B) Z nepřímé užitkové funkce pomocí Royovy identity (4.16)

(C) Z Hicksovských poptávkových funkcí (4.5) substitucí (4.14)

Jen u druhého způsobu je však zajištěn úspěch. *Cesta řešením maximalizačního problému nemusí vést k vyjádření marshallovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru* a pokud je toto možné, bude zpravidla zejména v obecných n-komoditních případech výsledný výraz poptávek velmi komplikovaný (obecně se všemi parametry výchozí přímé užitkové funkce, všemi cenami a příjmem). Ani v případě (C) nemusíme vždy získat explicitní tvar poptávek (Problém je ale méně vážný než v případě (A).

Poznámka 5

Poptávkové funkce v Hicksovském tvaru lze získat rovněž třemi způsoby:

(A) Z přímé užitkové funkce přímým řešením minimalizačního problému (6A) při užitkovém omezení (6B).

(B) Z výdajové funkce pomocí Shephardova lemmatu (4.9)

(C) Z Marshallovských poptávkových funkcí (4.4) substitucí (4.13)

I zde je úspěch zajištěn jen ve druhém případě. *Cesta řešením minimalizačního problému nemusí vést k vyjádření hicksovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru* a i když by toto bylo možné, bude zpravidla v obecných n-komoditních případech výsledný výraz poptávek velmi komplikovaný (obecně se všemi parametry přímé užitkové funkce, všemi cenami a příjmem). Ani zde v případě (C) nemusíme obecně získat explicitní tvar poptávek (byť problém je méně vážný než v (A)

Vztah (11) $\mathbf{x_i(E(u^0,p)) = h_i(u^0,p)}$ a *Shephardovo lemma* (4.9) dovolují psát obě soustavy (hicksovských i marshallovských) poptávkových funkcí vyjádřeními v parciálních diferenciálních rovnicích

(4.21A,B) $$\mathbf{x_i(E(u^0),p) = \frac{\partial E(u^0,p)}{\partial p_i}} \qquad \text{resp.} \qquad \mathbf{x_i(M,p) = \frac{\partial E(\Psi(M,p),p)}{\partial p_i}}$$

Řešením jedné či druhé soustavy (4.21) pro $\mathbf{E(u,p)}$, resp. $\mathbf{\Psi(M,p)}$ bychom tedy mohli – *aspoň v principu* – získat výdajovou, resp. přímou užitkovou funkci.

Sestavení/vytvoření výdajové funkce $\mathbf{E(u,p)}$ z úplné soustavy hicksovských poptávkových funkcí $\mathbf{h_i(u,p)}$ z (4.5) je však možné jen za předpokladů (D6H) a (D7H), tzn., že matice $\mathbf{S^*}$ musí být symetrická a pozitivně semidefinitní.

Podobně, **zpětné vytvoření/rekonstrukce nepřímé užitkové funkce $\psi(M,p)$ z úplné soustavy marshallovských poptávkových funkcí $g_i(M,p)$ z (4.4) je možné jen (mj.) za předpokladů (D6M), (D7M), tzn. že Sluckého substituční matice S bude symetrická a pozitivně semidefinitní.**

4.9 Alternativní vyvození Sluckého rovnice

Sluckého rovnici (6.18) odvozenou v části 6 přímo můžeme vyvodit také jiným způsobem, ve kterém využijeme *Shephardova lemmatu.*

Vyjdeme přitom z identity

$$h_i(u,p) = x_i(E(u,p),p),$$

kterou derivujeme podle ceny j-tého statku p_j. Dostaneme tak

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial E(u,p)} \cdot \frac{\partial E(u,p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_j},$$

Protože však zřejmě $E(u,p) = M$, $\dfrac{\partial p}{\partial p_j} = \delta_{ij}$ (Kroneckerovo δ) a protože dle *Shephardova lemmatu* (4.9) platí $\dfrac{\partial E(u,p)}{\partial p_j} = x_j$, dostáváme z předchozího

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p_j}, \quad \text{neboli}$$

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j},$$

Poznámka 1 **Povšimněme si, že výraz vlevo reprezentuje Hicksovské, zatímco oba výrazy vpravo Marshallovské pojetí. Po přeskupení členů již dostáváme *Sluckého rovnici* v obvyklém zápisu**

$$\frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p_j} = -x_j . \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial M} + \frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} \qquad \text{, resp.}$$

$$\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} = -\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(u,p)}{\partial p_j},$$

.

Zaznamenejme, že důchodový člen je reprezentován Marshallovským zápisem, zatímco substituční člen (obecně definovaný jako $X_{ij} = \lambda . \dfrac{|U_{ij}|}{|U|} = \dfrac{u_j}{p_j} . \dfrac{|U_{ij}|}{|U|}$) je vyjádřen v hicksovské notaci (s nepřítomností M).

Poznámka 2 **Vzhledem k symetrii Hicksovských poptávkových funkcí**

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(u,p)}{\partial p_i}$$

Platí pro Marshallovské poptávkové funkce obdobná symetrie

$$\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M}.x_j + \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(M,p)}{\partial M}.x_i + \frac{\partial x_j(M,p)}{\partial p_i}$$

.