STRUKTURNÍ EKONOMETRICKÝ MODEL
jako **obecná interdependentní soustava regresních rovnic**

STRUKTURNÍ TVAR modelu je (základní) **forma ekonometrického modelu, jejíž**
jednotlivé rovnice jsou přepisem vztahů vyvozených z ekonomické teorie (*konfirmatorní pojetí***) nebo verifikovaných hypotéz tvůrce modelu (***explorativní pojetí***) a která je charakteristická tím, že**

- **tvar matice** B **vztahů propojujících běžné endogenní proměnné je obecná matice** $m \times m$ **(mající však nulové diagonální prvky) .**
- **v kovarianční matici** Σ **náhodných složek mohou být korelovány náhodné**
  složky různých rovnic v témže čase, ne však náhodné složky v různých
  časových okamžicích/pozorováních (ani téže rovnice).

Strukturní tvar modelu se nejčastěji uvádí v zápisu (jde-li o zápis jen v proměnných) :

(1) $$y = B.y + C.x + \varepsilon$$

$y_{[m;1]}$ **je vektor m běžných endogenních proměnných** soustavy m rovnic

$x_{[q;1]}$ **je vektor m predeterminovaných proměnných** soustavy m rovnic

$B_{[m;m]}$ **je matice koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným**

$C_{[m;q]}$ **je matice koeficientů příslušných predeterminovaným proměnným**

$\varepsilon_{[m;1]}$ **je vektor m náhodných složek (poruch, disturbancí) soustavy.**

Normování matice B :
abychom zajistili, že každá regresní rovnice vysvětluje právě jednu vysvětlovanou (běžnou endogenní) proměnnou, přisuzujeme diagonálním prvkům matice B **nulové hodnoty** (pokud by tomu tak nebylo, potom bychom vysvětlovaným proměnným přiřazovali zbytečně nejedničkové koeficienty)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{1m} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} & b_{3m} \\ .... & ...... & ..... & 0 & ..... \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{3q} \\ .... & ... & .... & .... & .... \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & c_{m4} & c_{mq} \end{pmatrix}$$

O matici B resp. $I - B$ předpokládáme, že má plnou hodnost m (dále budeme pracovat s inverzí matice $I - B$). **Matice C nebývá** zpravidla **nijak normována**

Z důvodů, které budou objasněny později (prevence proti vzniku identifikačního problému), však **nesmí být ve všech rovnicích soustavy obsaženy všechny vysvětlující proměnné: proto musí být určitá část koeficientů v maticích B a C nulová**.

Jiná častá **forma zápisu strukturního tvaru** (jde-li o zápis jen v proměnných) **je**

(2) $$B.y + C.x = E$$

kde význam všech veličin (proměnných i parametrů) **je shodný s předchozí specifikací (1), avšak normování matice B je odlišné :**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{1m} \\ b_{21} & 1 & b_{23} & b_{24} & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & 1 & b_{34} & b_{3m} \\ .... & ...... & ..... & 1 & ..... \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{3q} \\ .... & ... & .... & .... & .... \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & c_{m4} & c_{mq} \end{pmatrix}$$

Pracujeme-li s pozorovanými hodnotami, pak strukturní tvar (1) zapsat jako:

(2a) $$Y = Y.B + X.C + E$$

(2b) $$y_{ti} = \sum_{j=1}^{m} y_{tj}\beta_{ji} + \sum_{k=1}^{q} x_{tk}\gamma_{ki} + \varepsilon_{ti}$$

$Y_{[T;m]}$ **je matice pozorování m vysvětlujících b.endog.**

proměnných soustavy

$X_{[T;q]}$ je matice pozorování q vysvětlujících predet. proměnných soustavy

$B'_{[m;m]}$ je matice koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným

$C'_{[q;m]}$ je matice koeficientů příslušných predeterminovaným proměnným

$\varepsilon_{[T;m]}$ je matice „pozorování" m náhodných složek soustavy .

Všimněme si rozdílů mezi oběma tvary zápisu strukturního tvaru v (1) a (2) :

- **V (1) stojí matice parametrů B, C vůči vektorům** proměnných y,x **nalevo : Matice B zde obsahuje regresní koeficienty u běžných endogenních proměnných 1. regresní rovnice v 1. řádku až koeficienty m-té regresní rovnice v m-tém řádku. Matice C podobně obsahuje regresní koeficienty u predeterminovaných proměnných 1. regresní rovnice v 1. řádku .... až koeficienty u těchže proměnných m-té regresní rovnice v m-tém řádku.**
- **V (2a) jsou** transponované **matice parametrů B', C' vůči** maticím Y,X **napravo.**

První sloupec matice B' obsahuje regresní koeficienty u běžných endogenních proměnných 1. regresní rovnice.... až m-tý sloupec matice B' obsahuje regresní koeficienty u běžných endogenních

proměnných m-té regresní rovnice. Podobně :

1. sloupec matice C' obsahuje regresní koeficienty u predeterminov. proměnných první regresní rovnice ..... až m-tý sloupec C' obsahuje regresní koeficienty u predeterminovaných proměnných m-té regresní rovnice.

Obsah j-tého řádku matice B zapsané v (1) je tedy totožný s obsahem j-tého sloupce B' v zápisu (2a) ; j = 1,2,...,m. Podobně, obsah k-tého řádku matice B zapsané v (1) je totožný s obsahem k-tého sloupce B' v zápisu (2a); k = 1,2,...,q.

Normování matice B: **abychom zajistili, že každá regresní rovnice vysvětluje právě jednu vysvětlovanou (běžnou endogenní) proměnnou, přisuzujeme diagonálním prvkům matice B nulové hodnoty** (pokud by tomu tak nebylo, potom bychom vysvětlovaným proměnným přiřazovali zbytečně nejedničkové koeficienty)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{1m} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} & b_{3m} \\ .... & ...... & ..... & 0 & ..... \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{3q} \\ .... & ... & .... & .... & .... \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & c_{m4} & c_{mq} \end{pmatrix}$$

O matici B resp. $I-B$ předpokládáme, že má plnou hodnost m (dále budeme pracovat s inverzí matice $I-B$). **Matice C nebývá** zpravidla **nijak normována.**

Z důvodů, které budou objasněny později (prevence proti vzniku identifikačního problému), však **nesmí být ve všech rovnicích obsaženy všechny vysvětlující proměnné : proto musí být určitá část koeficientů v maticích $\underline{B}$ a $\underline{C}$ nulová**.

Stochastické předpoklady modelu:

(a) $E(\varepsilon_{ti}) = 0 \qquad t = 1,2,..., T \;;\; i = 1,2,..., m$

Náhodné složky jsou centrovány (u kterékoliv rovnice a v kterémkoliv čase) .

(b) $E(\varepsilon_{ti},\varepsilon_{sj}) = \partial_{ts}.\sigma_{ij}$ $t\,,s = 1,2,...,T\;;\; i,j = 1,2,...,\; m$,

kde symbol ∂_{ts} se nazývá „Kroneckerovo delta“ a nabývá pouze dvou hodnot

$$\partial_{ts} = 1 \text{ pro } t = s$$

$$\partial_{ts} = 0 \text{ pro } t \neq s$$

Náhodné složky v rovnicích jsou nekorelovány v různých obdobích, ale mohou být korelovány v témže čase (mezi různými rovnicemi).

(c) $E(x_{ti},\varepsilon_{tj}) = 0$ $t = 1,2,...,T\;;\; i,j = 1,2,...,\; m$

Náhodné složky v rovnicích jsou nekorelované s predeterminovanými proměnnými kterékoliv jiné rovnice v kterémkoliv časovém okamžiku.

(d) $hodnost(I_m - B) = m$

Podmínka (d) má ten důsledek, že v modelu jsou hodnoty vysvětlovaných běžných endogenních jednoznačně určeny pomocí predeterminovaných proměnných a náhodných složek modelu (je možno odvodit tzv. redukovanou formu modelu).

Kovarianční matice celé soustavy rovnic $\Phi_{[Tm;Tm]}$ má následující tvar :

$$\Phi = Cov(\varepsilon) = E(\varepsilon.\varepsilon') = \begin{pmatrix} \sigma_{11}.I_T & \sigma_{12}.I_T & .... & \sigma_{1m}.I_T \\ \sigma_{21}.I_T & \sigma_{22}.I_T & .... & \sigma_{2m}.I_T \\ .... & .... & .... & .... \\ \sigma_{m1}.I_T & \sigma_{mm}.I_T & .... & \sigma_{mm}.I_T \end{pmatrix}$$

$$= \Sigma \otimes I_T$$

K odhadu modelu tvaru (1) **nelze korektně použít obyčejnou metoda nejmenších čtverců OLS** ani **zobecněnou metodu nejmenších čtverců GLS**, neboť tyto neposkytují konzistentní odhady. Konzistentní odhady získáme složitějšími odhadovými

technikami, které byly za tímto účelem vyvinuty.

Počet vysvětlujících proměnných modelu $m+q$ **(a tedy i počet vysvětlujících proměnných každé rovnice** m_i+q_i **) nesmí být větší než počet pozorování T.**

Další užitečný **zápis strukturního tvaru interdependentního modelu**

lze provést tak, že v každé rovnici vyjádříme datové struktury (přes **T** pozorování **) jen ve vztahu k proměnným skutečně přítomným v této rovnici :**

Libovolnou pevně zvolenou (i – tou) rovnici zapíšeme jako

(4) $$y_i = Y_i\beta^*_{.i} + X_i\gamma^*_{.i} + \varepsilon_i$$

, kde

$y_{.i}$ **... T-složkový vektor běžné endogenní proměnné** vysvětlované i-tou rovnicí

$Y_{.i}$ **.... Txm$_i$ matice složená z m$_i$ vektorů pozorování běžných endogenních**

proměnných skutečně přítomných jako vysvětlující v i-té rovnici.

Očíslování těchto vektorů je takové, že:

- první rovnice se závisle proměnnou $y_{.1}$ **obsahuje** jako vysvětlující

vektory $y_{.2}, y_{.3}, \ldots, y_{.m_1+1}$,

- druhá rovnice se závisle proměnnou $y_{.2}$ **obsahuje** jako vysvětlující

případně navíc vektory $y_{.m_1+2}, y_{.m_1+3}, \ldots, y_{m_2}$ **atd.**

Množiny těchto vysvětlujících proměnných zpravidla nebudou disjunktní.

$X_{.i}$ **... Txq$_i$ matice složená z q$_i$ vektorů pozorování predeterminovaných**

proměnných skutečně přítomných jako vysvětlující **v i-té rovnici.**

Očíslování těchto vektorů je takové, že :

první rovnice obsahuje jako vysvětlující **vektory**

$x_{.1}, x_{.2}, x_{.3}, \ldots, x_{.q_1}$,

druhá rovnice obsahuje případně navíc **vektory**
$x_{.q_1+1}, x_{.q_1+2}, \ldots, x_{.q_2}$ **atd.**

Množiny těchto vysvětlujících proměnných opět zpravidla nebudou disjunktní.

$\varepsilon_{.i}$ ... **T-složkový vektor náhodných složek i-té regresní rovnice**

$\beta^*_{.i}$ .. **m_i- složkový vektor strukturních parametrů příslušných běžným**

endogenním proměnným skutečně přítomným **v i-té rovnici**

$\gamma^*_{.i}$ ... **q_i- složkový vektor strukturních parametrů příslušných**

predeterminovaným proměnným skutečně přítomným **v i-té rovnici.**

Vektor $\beta^*_{.i}$ je tedy subvektorem $\beta_{.i}$, pokud z něj odstraníme nulové koeficienty u běžných endogenních proměnných, podobně vektor $\gamma^*_{.i}$ je subvektorem $\gamma_{.i}$, když z $\gamma_{.i}$ odstraníme nulové koeficienty u nepřítomných predeterminovaných proměnných.

Zápis (4) na rozdíl od předchozích představuje takový strukturní model, do kterého jsou zahrnuta omezení daná nulovými hodnotami parametrů u vysvětlujících proměnných modelu, pokud se tyto nevyskytují v dané rovnici. Počet vysvětlujících proměnných tedy nebude maximální možný, tj. $m(m-1)+m.q$ nýbrž „jen“ $\sum m_i + q_i$.

Model tvaru (2) resp. (3) je nejkomplikovanější možný lineární ekonometrický model.

Nejjednodušší vícerovnicový model je tzv. *soustava zdánlivě nezávislých lineárních regresních rovnic* („*seemingly unrelated regressions*“ neboli *SUR*), v níž nejsou přítomné žádné běžné endogenní proměnné jako vysvětlující **:**

$$Y = X.C + E$$

(3a)

$$y_{ti} = \sum_{k=1}^{q} x_{tk}\gamma_{ki} + \varepsilon_{ti}$$

(3b)

K získání konzistentních odhadů modelu tvaru (3) postačuje obyčejná metoda nejmenších čtverců OLS nebo **zobecněná metoda nejmenších čtverců GLS uplatněná samostatně na každou rovnici zvlášť nebo souhrnně na všechny modelové rovnice. Metoda poskytne odhady s vlastnostmi rovnocennými jako u kvantifikace jednorovnicového modelu.**

Vedle obou krajních situací (*soustava zdánlivě nezávislých regresních rovnic* a *obecný interdependentní model*) jsou typické ještě dvě další zvláštní formy, u kterých sice mohou být běžné endogenní proměnné přítomny na pravé straně, ale jen v určité přesně zadané podobě (jde o *rekursívní* resp. *blokově rekursívní tvar* ekonometrického modelu)

Různé formy specifikace (lineárního) strukturního modelu

verze 1

strukturní tvar $y = By + Cx + \varepsilon$

(1A)

s normováním matice B: $\beta_{ii} = 0 \;\; pro\ všechna \quad i = 1,2,\ldots,m$

příslušný redukovaný tvar: $$y = (I - B)^{-1} Cx + (I - B)^{-1} \varepsilon$$
(1B)

verze 2

strukturní tvar $$\acute{B}y = \acute{C}x + \varepsilon$$
(2A)

s normováním matice B: $\beta_{ii} = 1 \;\; pro\ všechna \quad i = 1,2,\ldots,m$

příslušný redukovaný tvar: $$\boldsymbol{y} = \acute{B}^{-1}\acute{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x} + \acute{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$
(2B)

verze 3

strukturní tvar $$\grave{B}y + \grave{C}x = \varepsilon$$
(3A)

normování matice B: $\beta_{ii} = 1 \;\; pro\ všechna \quad i = 1,2,\ldots,m$

příslušný redukovaný tvar: $$y = -\grave{B}^{-1}\grave{C}x + \grave{B}^{-1}\varepsilon$$
(3B)

verze 4

strukturní tvar $$\grave{B}y + \grave{C}x + \varepsilon = 0$$
(4A)

normování matice B: $\beta_{ii} = 1 \;\; pro\ všechna \quad i = 1,2,\ldots,m$

příslušný redukovaný tvar : $$y = -\grave{B}^{-1}\grave{C}x - \grave{B}^{-1}\varepsilon$$
(4B)