

## 2.4 Příklady dvoukomoditních užitkových funkcí

V této části uvedeme několik příkladů z oblasti běžných analytických tvarů, které vyšetříme z hlediska vhodnosti jejich použití jako užitkové funkce. Odvodíme dále u nich analytické tvary pro nepřímou užitkovou funkci, výdajovou funkci a pro poptávkové funkce po komoditách, a to jak v *Hicksově*, tak v *Marshallově tvaru*. Odvození poptávkových funkcí provedeme buď přímou cestou (na základě využití nutných podmínek pro nalezení rovnovážného bodu), nebo nepřímo z nepřímé užitkové funkce (pomocí *Royovy identity*) popř. výdajové funkce (pomocí *Shephardova lemmatu*). Poznamenejme, že z každého jednoduchého funkčního tvaru lze odvodit řadu dalších, uplatníme-li na tento tvar spojitou rostoucí transformaci s vědomím, že (přímá) užitková funkce je určena pouze s ordinální přesností ve smyslu vlastnosti (U5) obecné užitkové funkce.

### 4.1 Lineární užitková funkce

Nejjednodušší možnou specifikací užitkové funkce je lineární funkce tvaru

$$(4.1) \quad u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

s těmito omezeními na parametry : konstantní člen = 0 (nutné pro platnost  $u(\mathbf{0}) = 0$ ) a  $\alpha_i > 0$   $i = 1, 2, \dots, n$  (vzhledem k požadavku kladných mezních užitků). Jak se lze ihned přesvědčit, při těchto omezeních vyhovuje lineární tvar všem požadavkům (U1)-(U4),(U6) kladeným na užitkovou funkci. Zřejmě dále  $u_r(\mathbf{x}) = \alpha_r$  pro všechna  $r$  nezávisle na  $\mathbf{x}$ ,  $m_{rs} = \frac{\alpha_r}{\alpha_s}$  (tedy rovněž nezávisle na

$\mathbf{x}$ ) a  $u_{rs}(\mathbf{x}) = 0$  pro všechna  $r, s = 1, 2, \dots, n$ . Jak mezní užitky, tak mezní míra substituce mezi kterýmikoliv dvěma statky jsou tedy nezávislé na poloze kombinace statků v komoditním prostoru.

Přesto lineární tvar není jako užitková funkce vhodný a v aplikacích se lineární užitková funkce neužívá. Proč tomu tak je, napoví obrázek [2A], který vystihuje situaci pro dvě komodity  $x_1, x_2$ : Na něm jsou zakresleny tři indifferenční křivky odpovídající hladinám užítku  $u^1, u^2, u^3$  při  $u^1 < u^2 < u^3$ . Výdajové omezení tvaru  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$  je představováno úsečkou  $AB$  spojující body

$A \equiv \left[ \frac{M}{p_1}; 0 \right]$ ,  $B \equiv \left[ 0; \frac{M}{p_2} \right]$ . Rovnovážný bod je charakterizován stavem, v němž se některá

z indifferenčních křivek (při konstantní úrovni příjmu  $M$  a daných cenách  $p_1, p_2$ ) při přibližování zprava shora k počátku poprvé dotkne výdajového omezení. V zakresleném případě je to indifferenční křivka na hladině  $u^1$  dotýkající se výdajového omezení v bodě  $A$ .

Mezní míra substituce je u dvoukomoditní lineární funkce rovna podílu  $m_{12} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  a je tedy konstantní

v celém komoditním prostoru. Dále je patrné, že bod  $A$  bude rovnovážným bodem právě tehdy, jestliže mezní míra substituce bude větší než poměr relativních cen, tedy při  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{p_1}{p_2}$ . Pokud bude

tento poměr opačný, nastane rovnováha (ustálení poptávky na rovnovážné úrovni) v bodě  $B$ . Ve výjimečné situaci, kdy platí  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{p_1}{p_2}$ , existuje nekonečná množina rovnovážných bodů

představovaných celou úsečkou  $AB$ . Jestliže relativní cenový poměr  $\frac{p_1}{p_2}$  bude vykazovat hodnotu

blízkou  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ , potom to bude znamenat, že kolísání kolem  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  povede ke skokovým přesunům

rovnovážného bodu z  $A$  do  $B$  a naopak.

**Nevhodnost uplatnění lineární funkce jako užitkové vyplývá tedy z následujícího :**

a) **Substituce mezi komoditami probíhá zpravidla obtížněji, než jak udává konstantní poměr  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ .**

Zpravidla při dosažení určité (kriticky malé) hodnoty jedné z komodit množství druhé, která ji má nahradit, výrazně vzrůstá, čímž se substituce stává stále obtížnější.

b) **Není typické, aby - až na výjimku  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  - bylo rovnovážné řešení charakterizováno stavem, kdy**

**je poptávána jen jedna komodita** ( $x_1$  v případě, že rovnováha nastane v  $A$ , resp.  $x_2$ , pokud je rovnováha v  $B$ ).

c) Podobně **nepřirozené je alternování (přeskakování) polohy rovnovážného bodu** (z  $A$  do  $B$  a naopak) **při malé změně poměru  $\frac{p_1}{p_2}$  v okolí hodnoty  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ .** Odporuje to pozorovaným setrvačnostem

v chování spotřebitelů ve vztahu k nakupovaným statkům. Navíc, rovnováha je při uvedeném poměru relativních cen vysoce nestabilní.

Nepřímou užitkovou funkci příslušnou k lineární užitkové funkci nelze odvodit z nutných podmínek pro polohu rovnovážného bodu, protože mezní užítky neobsahují jako argumenty příslušné souřadnice (ani pro  $x_1$  ani pro  $x_2$ ). Můžeme však vyjít přímo ze souřadnic, kterými je definován rovnovážný bod (viz též obrázek). Je však třeba přitom rozlišit dva případy:

a) je-li nakupován pouze první statek, pak je rovnováha určena bodem  $A \equiv \left[ \frac{M}{p_1}; 0 \right]$ ,

**Poptávková funkce v Marshallově vyjádření** má tedy tvar

$$(4.2) \quad {}^M x_1 = \frac{M}{p_1}$$

Nepřímou užitkovou funkci obdržíme snadno dosazením této poptávky do (přímé) užitkové funkce. Dostaneme :

$$(4.3) \quad \Psi(M, p_1, p_2) = \frac{\alpha_1 M}{p_1}$$

Výdajovou funkci pak získáme substitucí, při níž zapíšeme levou stranu (4.3) jako  ${}^0 u$  a kde na pravé straně téhož výrazu nahradíme výdaj  $M$  výrazem  $M = E({}^0 u, p)$ . Odtud snadno získáme výraz

$$(4.4) \quad E({}^0 u, p) = \frac{p_1}{\alpha_2} \cdot {}^0 u$$

b) je-li nakupován pouze druhý statek, pak je rovnováha určena bodem  $B \equiv \left[ 0; \frac{M}{p_2} \right]$ .

Poptávková funkce v Marshallově vyjádření má nyní tvar

$$(4.5) \quad {}^M x_2 = \frac{M}{p_2}$$

Nepřímou užitkovou funkci a výdajovou funkci obdržíme stejným postupem jako dříve :

$$(4.6A,B) \quad \Psi(M, p_1, p_2) = \frac{\alpha_2 M}{p_2} \quad E({}^0 u, p) = \frac{p_2}{\alpha_2} \cdot {}^0 u$$

**Poznámka 1** Třetí případ představovaný situací, kdy je rovnovážný „bod“ tvořen celou úsečkou AB, není třeba uvažovat zvlášť, neboť jde o jistý „průnik“ obou předchozích. V něm platí  $\alpha_1 p_2 = \alpha_2 p_1$ .

Odvození poptávkových funkcí je možné provést též nepřímo, vyjdeme-li z již známé nepřímé užitkové nebo výdajové funkce. Protože platí

$$(4.7) \quad \frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial M} = \frac{\alpha_i}{p_i} \quad \text{a podobně} \quad \frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial p_i} = -\frac{\alpha_i M}{p_i^2} \quad \text{pro } i=1,2$$

obdržíme výrazy (4.2) resp. (4.5) též aplikací *Royovy identity*, obdobně jako bychom uplatnili *Shephardova lemmatu* na (4.4) resp. (4.6B) dostali vztahy

$$(4.8) \quad {}^H x_i = \frac{\partial E({}^0 u, p)}{\partial p_i} = \frac{{}^0 u}{\alpha_i}, \quad \text{z nichž po dosazení za } {}^0 u = \frac{\alpha_i M}{p_i} \text{ máme ihned (4.2), (4.5).}$$

## 4.2 Kvadratická užitková funkce

Ani tento funkční tvar není, jak níže ukážeme, jako užitková funkce vhodný:  $n$ -komoditní ryze kvadratická užitková funkce může být zapsána ve tvaru

$$(4.9) \quad u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

při  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  zajišťujících kladné mezní užítky. Absence konstantního členu vyplývá opět z podmínky  $u(\mathbf{0}) = 0$ . Ryze kvadratická funkce s kladnými koeficienty je konečná, nezáporná, rostoucí ve všech komoditách, spojitá a neomezeně diferencovatelná, není však kvazikonkávní. K přiblížení negativního důsledku nesplnění posledně jmenované vlastnosti stačí uvažovat dvoukomoditní případ

$$(4.10) \quad u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2,$$

jehož geometrickým vyjádřením je elipsa tvaru

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = u^0 \quad \text{resp.}$$

$$(4.11) \quad \frac{x_1^2}{\left(\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_1}}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_2}}\right)^2} = 1$$

tedy se středem v počátku a s poloosami  $\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_1}}$  resp.  $\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_2}}$ . Na obrázku [2B] je zakreslena

situace se třemi indifferenčními křivkami na hladinách užítku  $u^1$ ,  $u^2$ ,  $u^3$  při  $u^1 < u^2 < u^3$ . Výdajové omezení je opět znázorněno úsečkou  $AB$  s rovnicí  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$  spojující

body  $A \equiv \left[ \frac{M}{p_1}; 0 \right]$ ,  $B \equiv \left[ 0; \frac{M}{p_2} \right]$ . Bod  $Q$ , v němž se indifferenční křivka  $u^1$  dotýká výdajového

omezení, však není rovnovážným bodem v plnohodnotném slova smyslu. Naopak, posun z něj po výdajovém omezení v obou možných směrech vede k dosažení bodů (komoditních kombinací), které leží na indifferenčních křivkách o vyšších hladinách užítku, což je v protikladu s požadavkem na vlastnost rovnovážného bodu. Lze pozorovat pouze to, že jsou-li vybrány komodity v množstvích odpovídajících souřadnicím bodu  $Q$ , potom úbytek množství jednoho či druhého statku bude znamenat vždy přechod na nižší indifferenční křivku. To však nemá žádný vztah ke kritériu požadovanému pro rovnovážný bod, aby se komodity nakupovaly v poměrech, které zajišťují nejlevnější možný výdaj (pro danou hladinu užítku).

Na uvedeném obrázku lze též dobře ilustrovat rozdílnost mezi rostoucí a kvazikonkávní funkcí. Uvažovaná ryze kvadratická funkce s kladnými  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$  je neklesající (je dokonce rostoucí) v každé proměnné, není však kvazikonkávní. Množině dvoukomoditních rostoucích funkcí odpovídá třída indifferenčních křivek, u kterých průběh (zleva shora) po kterékoliv z nich je charakterizován klesající hodnotou  $x_2$  a rostoucí hodnotou  $x_1$ , zatímco *kvazikonkávnost* navíc mj. vyžaduje, aby mezní míra substituce při tomto pohybu kontinuálně klesala (což u kvadratické funkce splněno není) a aby všechny indifferenční křivky byly pro danou užitkovou funkci vždy "vyklenuty směrem k počátku".

Mezní užitky u ryze kvadratické funkce jsou  $u_1 = 2\alpha_1 x_1$ ,  $u_2 = 2\alpha_2 x_2$  (a jsou tedy závislé na bodu komoditního prostoru, v němž jsou vyčísleny), mezní míra substituce je rovna  $\frac{\alpha_1 x_1}{\alpha_2 x_2}$  (a je tedy rostoucí při snižování  $x_2$  a zvyšování  $x_1$ ).

**Poznámka 2** Je zřejmé, že ke zlepšení vlastností ryze kvadratické funkce nepovede specifikace se zápornými koeficienty  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ . Při nich bude sice tato funkce kvazikonkávní, ale funkce sama bude záporná a klesající, oba mezní užitky budou tedy záporné. Jako užitková funkce je tedy nepoužitelná.

Odvození poptávkových funkcí po komoditách provedeme na základě maximalizace výrazu

$$W = \text{Max}[u(x) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M)] = \text{Max}[\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M)]$$

Parciálními derivacemi podle  $x_1, x_2$  a  $\lambda$  a jejich anulováním dostaneme tři podmínky :

$$u_1 = 2\alpha_1 x_1 - \lambda p_1 = 0 \quad u_2 = 2\alpha_2 x_2 - \lambda p_2 = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - M = 0 \quad \text{tzn.}$$

$$2\alpha_1 x_1 = \lambda p_1 \quad 2\alpha_2 x_2 = \lambda p_2 \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M,$$

z nichž odvodíme (řešením tří rovnic pro neznámé  $x_1, x_2, \lambda$ ) v závislosti na parametrech úlohy, tj.  $\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2$  a  $M$  poptávkové funkce po obou komoditách jako

$$(4.12) \quad {}^M x_1 = \frac{\alpha_2 p_1 M}{(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1)} \quad {}^M x_2 = \frac{\alpha_1 p_2 M}{(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1)} \quad \lambda = \frac{\alpha_1 \alpha_2 M}{(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1)}$$

V obou případech roste poptávka přímo úměrně příjmu  $M$  a nepřímo úměrně s cenou této komodity.

Přistupme k odvození nepřímé užitkové funkce. K tomu stačí dosadit  $x_1, x_2$  z (4.12) do (4.10). Po drobných úpravách dostaneme

$$(4.13) \quad \Psi(M, p_1, p_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 M^2}{p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1}$$

Nepřímá uživatelská funkce je tedy rovněž kvadratická v  $M$  a klesající se čtvercem každé z cen  $p_1, p_2$ .

Výdajovou funkci získáme standardně nahrazením levé strany (4.13) pevnou hodnotou  ${}^0u$  a položením  $M = E({}^0u, p)$ . Pak již snadno z (4.13) získáme výraz

$$(4.14) \quad E({}^0u, p) = \sqrt{\frac{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2) {}^0u}{\alpha_1 \alpha_2}}$$

Výdajová funkce je tedy odmocninná ve vztahu k hladině užitku.

Marshallův tvar poptávkových funkcí lze odvodit též pomocí *Royovy identity*, přičemž z (4.13) máme

$$(4.15) \quad \frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial M} = \frac{2\alpha_1 \alpha_2 M}{\alpha_2 p_1^2 + \alpha_2 p_2^2} \quad \text{a též} \quad \frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial p_i} = -\frac{2\alpha_1 \alpha_2 M^2 p_i}{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_2 p_2^2)^2}$$

zatímco k vyjádření v Hicksově tvaru musíme použít *Shephardovo lemma*, na základě něhož

$$(4.16) \quad {}^H x_i = \frac{\partial E({}^0u, p)}{\partial p_i} = 0,5 \cdot \left( \frac{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2) {}^0u}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{p_1^2 {}^0u}{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2)}}$$

Shodu obou výrazů prověříme např. dosazením výdajové funkce  $E({}^0u, p)$  za  $M$

$${}^M x_1 = \frac{\alpha_2 p_1 M}{\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2} = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2} \cdot \sqrt{\frac{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2) {}^0u}{\alpha_1 \alpha_2}} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{p_1^2 {}^0u}{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2)}} = {}^H x_1.$$

**Dodatek – nesplnění kvazikonkávnosti:** vypočteme determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 2\alpha_1 x_1 & 2\alpha_2 x_2 \\ 2\alpha_1 x_1 & 2\alpha_1 & 0 \\ 2\alpha_2 x_2 & 0 & 2\alpha_2 \end{vmatrix} = -8\alpha_1^2 \alpha_2 x_1^2 - 8\alpha_2^2 \alpha_1 x_2^2 = -8\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2) < 0.$$

Jeho hodnota je záporná pro kterékoliv  $x_1, x_2$ , takže funkce není kvazikonkávní v žádném úseku komoditního prostoru.

### 4.3 Leontiefova užitková funkce

Tento typ užitkové funkce (též užitková funkce s pevnými koeficienty) lze zapsat ve tvaru

$$(4.17) \quad u(\mathbf{x}) = \text{Min}[\beta_1 x_1; \beta_2 x_2; \dots; \beta_n x_n],$$

kde  $\beta_i = 1, 2, \dots, n$  jsou nějaké kladné konstanty. Tato užitková funkce je charakterizována indifferenční mapou sestávající z indifferenčních křivek, které mají podobu „rohů“ (vrcholů a hran) neomezených  $n$ -rozměrných kvádrů. Vrcholy přitom leží na polopřímce vycházející z počátku souřadnic.

Pro případ dvou komodit má tato polopřímka rovnici  $x_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot x_1$  a celou situaci lze vyjádřit

obrázkem [2C], který opět obsahuje indifferenční křivky pro tři úrovně užítku  $u^1, u^2, u^3$ . Jako oblast  $X^D$  označíme množinu všech  $[x_1, x_2]$ , pro které platí  $x_1 \geq x_2$  a jako  $X^H$  oblast, v níž platí  $x_2 \geq x_1$ . Hranici obou množin tvaru  $x_1 = x_2$  tvoří polopřímka vycházející z počátku souřadnic pod úhlem  $\phi$ , pro který platí  $\text{tg}\phi = \frac{\beta_2}{\beta_1}$ .

Jinak je patrné, že Leontiefovská funkce splňuje vlastnosti užitkové funkce, neboť je:

(U1) : reálná konečná a platí  $u(\mathbf{0}) = 0$ , (U2): neklesající v celé definičním oboru, přesněji rostoucí ve směru přírůstku každé komodity až do hodnoty  $x_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot x_1$ , poté je konstantní,

(U3) spojitá v celém definičním oboru a (U4) kvazikonkávní, neboť funkční hodnota v bodě ležícím na spojnicí libovolných dvou bodů komoditního prostoru nikdy neklesne (jak plyne z konvexnosti množin) pod menší z obou hodnot užítku v krajních bodech. Aplikace (U5) pak vede k obecnějším strukturám komplementárních užitkových funkcí.

Pokud jde o hodnoty mezních užítků, musíme rozlišit oblasti  $X_d$  a  $X_h$  vyznačené na obrázku [2C] :

v oblasti  $X^H$  platí  $u_1 = \beta_1$ , resp.  $u_2 = 0$ ,

zatímco

v oblasti  $X^D$  platí  $u_1 = 0$ , resp.  $u_2 = \beta_2$ .

Dále zřejmě v celém komoditním prostoru platí  $u_{11} = u_{12} = u_{22} = 0$  a pro mezní míry substituce platí:

v oblasti  $X^H$  :  $m_{12} = \frac{u_1}{u_2} = +\infty$  , zatímco v oblasti  $X^D$  :  $m_{12} = \frac{u_1}{u_2} = 0$  .

Abychom odvodili u této funkce poptávkové funkce po komoditách, musíme - při neexistenci parciálních derivací na „hřebeni“ zvolit poněkud modifikovaný postup : Je zřejmé, že při jakýchkoliv kladných cenách  $p_1, p_2$  a příjmu  $M$  vzájemně propojených rovností  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$  bude maxima užítku dosaženo na „hřebeni“. Bod maxima tedy získáme jako průsečík úsečky  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$  a polopřímky  $\beta_1 x_1 = \beta_2 x_2$  procházející počátkem souřadnic. Řešením pro  $x_1, x_2$  dostaneme poptávkové funkce ve tvaru:

$$(4.18) \quad {}^M x_1 = \frac{\beta_2 M}{p_1 \beta_2 + p_2 \beta_1} \quad {}^M x_2 = \frac{\beta_1 M}{p_1 \beta_2 + p_2 \beta_1}.$$

Odtud je vidět, že poptávka po každé komoditě je přímo úměrná příjmu  $M$  a nepřímo úměrná ceně vlastní (ale stejně tak i cizí) komodity. Povšimněme si přitom, že z tohoto hlediska jsou komodity  $x_1, x_2$  v typicky komplementárním vztahu.

Uveďme dále, že Leontiefova užítková funkce je (pro libovolné konečné  $n$ ) lineárně homogenní, neboť pro ni platí:

$$(4.19) \quad u(\lambda x) = \text{Min}[\beta_1 \lambda x_1 + \beta_2 \lambda x_2 + \dots + \beta_n \lambda x_n] = \lambda \cdot \text{Min}[\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n] = \lambda \cdot u(x)$$

pro libovolné kladné  $\lambda$ .

Leontiefova užítková funkce je pro určitý typ vzájemného vztahu komodit (jsou-li tyto vzájemně komplementární) výstižným analytickým nástrojem. Naopak, pro situace charakterizované vzájemnou substituibilitou komodit není adekvátně použitelná.

Rovněž u Leontiefovy užítkové funkce lze snadno odvodit nepřímou užítkovou funkci: Stačí dosadit nalezené poptávkové funkce (4.18) do přímé užítkové funkce. Dostaneme

$$(4.20) \quad \Psi(M, p_1, p_2) = \text{Min} \left[ \frac{\beta_1 \beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}; \frac{\beta_2 \beta_1 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} \right] = \frac{\beta_1 \beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}$$

a vidíme, že oba výrazy v závorce jsou shodné – minima se tedy nabývá v obou bodech současně. V souladu s očekáváním roste nepřímá užítková funkce přímo úměrně s příjmem a nepřímo úměrně s cenou vlastní i nevlastní komodity (opět zaznamenáváme komplementaritu ve vztahu mezi oběma).

Nyní můžeme odvodit poptávkové funkce také alternativně pomocí *Royovy identity*. Protože

$$\frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial M} = \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} \quad \frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial p_i} = - \frac{\beta_1 \beta_2 M}{(\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1)^2} \cdot \beta_i$$

vede výraz  $\frac{-\partial \Psi(M, p)}{\partial p_i} / \frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial M}$  přesně ke tvaru poptávkové funkce v Marshallově tvaru, jak jsme ho odvodili vztahem (4.18).

Dále přistoupíme k určení výdajové funkce. Stačí k tomu nahradit levou stranu v (4.20) pevnou hodnotou užítku  ${}^0 u$  a  $M$  nahradit zápisem výdajové funkce  $E({}^0 u, p)$ . Odtud již snadno máme

$$(4.21) \quad E({}^0 u, p) = \frac{{}^0 u (\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1)}{\beta_1 \beta_2}.$$

Výdaj spojený s nákupem statků je přímo úměrný úrovni užítku a též přímo úměrný cenám komodit.

Konečně rovněž snadno ověříme shodu poptávkových funkcí pro oba tvary (Marshallův i Hicksův): Nejprve odvodíme pomocí Shephardova lemmatu Hicksův tvar poptávkových funkcí. Zřejmě

$$(4.22) \quad {}^H x_i^* = \frac{\partial E({}^0 u, p)}{\partial p_i} = \frac{{}^0 u}{\beta_1 \beta_2} \cdot \beta_j = \frac{{}^0 u}{\beta_i} \quad \text{pro } i, j = 1, 2; i \neq j.$$

Tento velmi jednoduchý výraz vyjadřuje lineární závislost poptávky na hodnotě užitku. Za povšimnutí stojí, že poptávková funkce není závislá na ceně žádné z komodit.

Jde o tvar korespondující s Marshallovým vyjádřením poptávek, neboť po dosazení

$$(4.23) \quad {}^M x_1 = \frac{\beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} \cdot \frac{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}{\beta_1 \beta_2} \cdot {}^0 u = \frac{{}^0 u}{\beta_1} = {}^H x_1^*.$$



#### 4.4 Odmocninná užitková funkce

Dalším funkčním tvarem, který může být vhodně uplatněn jako užitková funkce, je funkce tvaru

$$(4.24) \quad u(\mathbf{x}) = \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} + \dots + \beta_n \sqrt{x_n} \quad \beta_i > 0,$$

resp. ve zjednodušeném zápisu pro dvě komodity

$$(4.25) \quad u(\mathbf{x}) = \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} \quad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0.$$

Opět lze snadno ukázat, že odmocninná funkce je reálná konečná spojitá rostoucí a splňující  $u(\mathbf{0}) = 0$ . Je také kvazikonkávní (a lineárně homogenní stupně 1/2).

Mezní užitky jsou rovny  $u_1 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} > 0$ , resp.  $u_2 = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} > 0$ , mezní míra substituce je

$m_{12} = \frac{\beta_1 \sqrt{x_2}}{\beta_2 \sqrt{x_1}}$  a mění se tedy s polohou bodu v komoditním prostoru.

Poptávkové funkce odvodíme obvyklým způsobem, řešením následujících tří rovnic pro  $x_1, x_2, \lambda$ :

$$u_1 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1 \quad u_2 = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2 \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M.$$

Některou z metod řešení soustavy lineárních rovnic (např. komparační s porovnáním a eliminací  $\lambda$ ) získáme řešení pro  $x_1, x_2$  a  $\lambda$ :

$$(4.26) \quad x_1^M = \frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1 \cdot (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)} \quad x_2^M = \frac{\beta_2^2 p_1 M}{p_2 \cdot (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}.$$

Z uvedených výrazů je patrné, že každá z obou poptávkových funkcí je lineární funkcí příjmu  $M$  a že poptávka je nepřímou závislá na jí příslušné ceně. Z uvedených hledisek tedy lze odmocninnou funkci přijmout jako vhodnou pro popis (přinejmenším určité části) standardních užitkových situací.

Substituční vztah obou statků můžeme ověřit derivacemi poptávek podle křížové ceny, např.:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{\beta_1^2 M}{p_1} \cdot \frac{\partial}{\partial p_2} \frac{p_2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)} = \frac{\beta_1^2 M}{p_1} \cdot \frac{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1) - p_2 \cdot \beta_1^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} = \frac{\beta_2^2 \beta_1^2 M}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} > 0.$$

Obě Marshallovské poptávky jsou zřejmě funkce homogenní stupně 0 (současně v příjmu i obou cenách), spojitě ve všech argumentech a platí pro ně  $x_i^M(\mathbf{0}, p_1, p_2) = 0$ . Platí pro ně podmínka součtovatelnosti

$$p_1^M x_1^M + p_2^M x_2^M = \frac{p_1 \beta_1^2 p_2^2 M + p_2 \beta_2^2 p_1^2 M}{p_1 \cdot p_2 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)} = M$$

<sup>1</sup> Pro  $\lambda$  bychom dostali výraz:  $\lambda = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}{p_1 p_2 M}}$

Znázornění situace na obrázku [2D] představuje trojici indifferenčních křivek  $u^1$ ,  $u^2$ ,  $u^3$ , které mají tu vlastnost, že jsou kvazikonkávní a přiléhají v konečných hodnotách k souřadnicovým osám. Každá z komodit je tedy plně substituovatelná konečným množstvím druhé komodity (stejně by tomu bylo i v  $n$ -rozměrném případě). Rovnovážný bod  $Q$  se nachází v místě dotyku výdajového omezení s indifferenční křivkou  $u^2$ . Vychýlení z něho v kterémkoliv směru úsečky výdajového omezení vede vždy k nižší hladině užítku než  $u^2$ .

Nyní vyšetříme kvazikonkávnost odmocninné užítkové funkce. K tomu stačí vypočítat determinant tvaru

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} & \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} \\ \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} & -\frac{\beta_1}{4x_1^{3/2}} & 0 \\ \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} & 0 & -\frac{\beta_2}{4x_2^{3/2}} \end{vmatrix}, \text{ protože}$$

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}}; u_2(x) = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}}; u_{11}(x) = -\frac{1}{4}\beta_1 x_1^{-3/2}; u_{22}(x) = -\frac{1}{4}\beta_2 x_2^{-3/2}; u_{12}(x) = u_{21}(x) = 0.$$

Hodnota determinantu tedy je (pouze 2 ze 6 členů Sarusova rozvoje jsou nenulové)

$$-\frac{\beta_1^2}{4x_1} \cdot \left(-\frac{\beta_2}{4x_2^{3/2}}\right) - \frac{\beta_2^2}{4x_2} \cdot \left(-\frac{\beta_1}{4x_1^{3/2}}\right) = \frac{\beta_1\beta_2}{16x_1x_2} \cdot \left[\frac{\beta_1}{\sqrt{x_2}} + \frac{\beta_2}{\sqrt{x_1}}\right] > 0 \text{ pro libovolná kladná } \beta_1, \beta_2.$$

Odmocninná užítková funkce je tedy kvazikonkávní.

Nepřímou užítkovou funkci  $\Psi(M, p_1, p_2)$  získáme prostým dosazením nalezených poptávkových funkcí (v Marshallově tvaru) do užítkové funkce. Dostáváme

$$\begin{aligned} \Psi(M, p_1, p_2) &= \beta_1 \sqrt{\frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} + \beta_2 \sqrt{\frac{\beta_2^2 p_1 M}{p_2 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} \\ &= \beta_1^2 \sqrt{\frac{p_2 M}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} + \beta_2^2 \sqrt{\frac{p_1 M}{p_2 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} \\ &= \sqrt{\frac{M}{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} \cdot \left[ \beta_1^2 \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \beta_2^2 \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \right] \end{aligned}$$

nebo po vynásobení čitatele i jmenovatele výrazu v závorce  $\sqrt{p_1 p_2}$  dále

$$(4.27) \quad \sqrt{\frac{M}{p_1 p_2}} \cdot \frac{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} = \sqrt{\frac{M}{p_1 p_2}} \cdot \sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}.$$

Nyní odvodíme tvar výdajové funkce příslušné odmocninné užítkové funkce. Vyjdeme z již vyvozené nepřímé užítkové funkce, kde za obecný výraz  $\Psi(M, p_1, p_2)$  dosadíme konkrétní

hodnotu užitku  ${}^0u$  a obdobně (nyní hledaný tvar výdajové funkce  $E({}^0u, p_1, p_2)$ ) substituujeme z  $M$ . Postupně získáme

$${}^0u = \sqrt{\frac{E({}^0u, p_1, p_2)}{p_1 p_2}} \cdot \sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}, \text{ z čehož snadno určíme}$$

$$(4.28) \quad E({}^0u, p_1, p_2) = \frac{{}^0u^2 \cdot p_1 p_2}{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}.$$

Jak patrně, tato výdajová funkce je nezáporná (pro libovolné hodnoty parametrů  $\beta_1, \beta_2$ ), nulová pouze při  ${}^0u = 0$  a rostoucí (s druhou mocninnou)  ${}^0u$ .

Nyní přistoupíme k ilustraci odvození poptávkových funkcí zprostředkovaně, z nepřímé užitkové, resp. výdajové funkce. Z nepřímé užitkové funkce spočteme poptávkové funkce pomocí Royovy identity.

Výpočtem derivací dostaneme

$$\frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial p_1} = \frac{\sqrt{M}}{2p_1 p_2} \cdot \frac{\left( \beta_2^2 \sqrt{p_1 p_2} - (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1) \frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}} \right)}{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} = \frac{-\beta_1^2 p_2^{1/2} \sqrt{M}}{2\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1} p_1^{3/2}} \text{ a podobně,}$$

$$\frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial M} = \frac{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}}{2\sqrt{M} \sqrt{p_1 p_2}}, \text{ a tedy dosazením do Royovy identity}$$

$$x_1^{*M} = -\frac{\frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial p_1}}{\frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial M}} = -\frac{\frac{-\beta_1^2 p_2^{1/2} \sqrt{M}}{2\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1} p_1^{3/2}}}{\frac{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}}{2\sqrt{M} \sqrt{p_1 p_2}}} = \frac{\beta_1^2 M p_2}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}, \text{ což zřejmě odpovídá}$$

prvému z výrazů uvedených v (4.26). Výraz pro  ${}^M x_2$  bychom odvodili obdobně; obdrželi bychom druhý výraz v (4.26). Jak patrně, Marshallovská poptávková funkce je přímo úměrná příjmu spotřebitele  $M$  a současně je klesající se čtvercem ceny  $p_1$  příslušné komodity.

Alternativně můžeme však získat také poptávkové funkce v Hicksově pojetí. K tomu uplatníme Shephardovo lemma. Dle něho

$$x_1^{*H} = \frac{\partial E({}^0u, p)}{\partial p_1} = \frac{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1) {}^0u^2 p_2 - {}^0u^2 p_1 p_2 \beta_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} \text{ a po úpravě}$$

$$(4.29) \quad x_1^{*H} = \frac{\beta_1^2 {}^0u^2 p_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2}.$$

Hicksovská poptávková funkce je tedy rostoucí se čtvercem hladiny užitku  ${}^0u$  a klesající s růstem ceny  $p_1$ .

Abychom mohli porovnat oba tvary poptávkových funkcí (Hicksův a Marshallův), stačí např. dosadit do výrazu pro  $x_1^{*M}$  za  $M = E(u, p_1, p_2)$ : Dostaneme

$$x_1^{*M} = \frac{\beta_1^2 p_2^0 u^2 p_1 p_2}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} = \frac{\beta_1^2 u^2 p_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} = x_1^{*H} \quad \hat{1}.$$

Obdobně bychom mohli postupovat i obráceně. Za  $u$  dosadíme výraz pro nepřímou užitkovou funkci  $\Psi(M, p_1, p_2)$ :

$$(4.30) \quad x_1^{*H} = \frac{\beta_1^2 p_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} \cdot \left( \frac{\sqrt{M(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}}{\sqrt{p_1 p_2}} \right)^2 = \frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)} = x_1^{*M}.$$

**Konečně ukážeme, že i třetí postup vyvození Hicksovských poptávkových funkcí – řešením minimalizační úlohy – vede taktéž k tvaru shodnému s oběma předchozími:**

Řešíme tedy úlohu  $\text{Min} \sum_{i=1}^n p_i x_i$  za podmínky  $\beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} \geq u^0$ . Příslušný Lagrangián má

tvar

$$\Lambda(\mu, \mathbf{x}) = \left[ \sum_{i=1}^n p_i x_i - \mu (\beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} - u^0) \right].$$

Derivujeme nyní podle obou neznámých a obě derivace položíme rovny nule. Dostaneme

$$\frac{\partial \Lambda(\mu, \mathbf{x})}{\partial x_1} = p_1 - \frac{1}{2} \mu \beta_1 x_1^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda(\mu, \mathbf{x})}{\partial x_2} = p_2 - \frac{1}{2} \mu \beta_2 x_2^{-\frac{1}{2}} = 0$$

(Derivací podle  $\mu$  obdržíme opět podmínku minimálního užitku).

Porovnáním výrazů pro  $\mu$  z nutných podmínek získáme

$$\mu = \frac{2p_1 \sqrt{x_1}}{\beta_1} = \frac{2p_2 \sqrt{x_2}}{\beta_2} \quad \text{a odtud dále} \quad \sqrt{x_2} = \frac{p_1 \beta_2 \sqrt{x_1}}{p_2 \beta_1},$$

což dosadíme do podmínky pro minimální užitek:  $\beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \frac{p_1 \beta_2 \sqrt{x_1}}{p_2 \beta_1} = u^0$ , odkud už snadno určíme

$$H_{x_1} = \left( \frac{u^0}{\beta_1 + \frac{p_1 \beta_2^2}{p_2 \beta_1}} \right)^2 = \frac{\beta_1^2 p_2^2 u^0^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2}, \quad \text{tedy výraz identický s (4.29).}$$

## 4.5 Logaritmická užítková funkce

Dalším funkčním tvarem, který může být vhodně uplatněn jako užítková funkce je logaritmická funkce

$$(4.31) \quad u(x_1, x_2) = \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2,$$

u níž předpokládáme – za účelem obou kladných mezních užitků splnění podmínky  $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ .

Funkční tvar opět neobsahuje aditivní konstantu, abychom dosáhli požadavku  $u(0,0) = 0$ . Mezní užitky, které použijeme k výpočtu poptávkových funkcí jsou zřejmé

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{x_1}; \quad u_2(x) = \frac{\beta_2}{x_2};$$

takže souřadnice rovnovážného bodu dostaneme řešením tří jednoduchých rovnic pro  $x_1, x_2, \lambda$ :

$$u_1 = \frac{\beta_1}{x_1} = \lambda p_1 \quad u_2 = \frac{\beta_2}{x_2} = \lambda p_2 \quad \text{a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M.$$

Jednoduchými úpravami  $p_1 x_1 = \beta_1 / \lambda$ , resp.  $p_2 x_2 = \beta_2 / \lambda$  a dosazením do rozpočtového omezení dostaneme  $\beta_1 + \beta_2 = \lambda M$  neboli  $\beta_1 / M + \beta_2 / M = \lambda$  a odtud již snadno poptávky po obou komoditách jako

$$(4.32) \quad x_1^{*M} = \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_1}, \quad x_2^{*M} = \frac{\beta_2 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_2}.$$

Jak patrně, Marshallovské poptávky jsou přímo úměrné příjmu spotřebitele a nepřímo úměrné ceně vlastní komodity. Obě jsou zřejmě funkce homogenní stupně 0 (současně v příjmu i obou cenách), spojitě ve všech argumentech a platí pro ně  ${}^M \mathbf{x}_i(\mathbf{0}, p_1, p_2) = \mathbf{0}$ . Platí pro ně podmínka součtovatelnosti

$$p_1 \cdot {}^M \mathbf{x}_1 + p_2 \cdot {}^M \mathbf{x}_2 = p_1 \cdot \frac{\beta_1 M}{p_1 (\beta_1 + \beta_2)} + p_2 \cdot \frac{\beta_2 M}{p_2 (\beta_1 + \beta_2)} = M$$

Ověření, zda je (dvoufaktorová) logaritmická užítková funkce kvazikonkávní, je velmi snadné. Hicksovy podmínky stability zde mají tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{x_1} & \frac{\beta_2}{x_2} \\ \frac{\beta_1}{x_1} & -\frac{\beta_1}{x_1^2} & 0 \\ \frac{\beta_2}{x_2} & 0 & -\frac{\beta_2}{x_2^2} \end{vmatrix} > 0 \quad , \text{ protože}$$

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{x_1}; \quad u_2(x) = \frac{\beta_2}{x_2}; \quad u_{11}(x) = -\frac{\beta_1}{x_1^2}; \quad u_{22}(x) = -\frac{\beta_2}{x_2^2}; \quad u_{12}(x) = u_{21}(x) = 0.$$

Výpočet determinantu vede k hodnotě

$$|D| = -\left(\frac{\beta_1}{x_1}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\beta_2}{x_2^2}\right) - \left(\frac{\beta_2}{x_2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\beta_1}{x_1^2}\right) = \frac{\beta_1 \beta_2}{x_1^2 x_2^2} \cdot [\beta_1 + \beta_2], \text{ která je evidentně}$$

(při přijatých předpokladech  $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ ) pro kladné objemy komodit  $x_1, x_2$  kladná.

Dále odvodíme tvar nepřímé užitkové funkce. Použijeme k tomu prosté dosazení poptávkových funkcí v Marshallově tvaru do přímé užitkové funkce  $u(x^*)$ . Tedy

$$(4.33) \quad \Psi(M, p_1, p_2) = \beta_1 \log \frac{\beta_1 M}{p_1(\beta_1 + \beta_2)} + \beta_2 \log \frac{\beta_2 M}{p_2(\beta_1 + \beta_2)},$$

kterýžto výraz lze vyjádřit v několika dalších ekvivalentních tvarech, např.

$$\Psi(M, p_1, p_2) = \beta_1 \log \beta_1 + \beta_2 \log \beta_2 - (\beta_1 + \beta_2) \log(\beta_1 + \beta_2) + \beta_1 \log \frac{M}{p_1} + \beta_2 \log \frac{M}{p_2},$$

neboli

$$(4.34) \quad \Psi(M, p_1, p_2) = C + \beta_1 \log \frac{M}{p_1} + \beta_2 \log \frac{M}{p_2}, \text{ kde}$$

konstanta  $C$  závisí jen na parametrech (přímé) užitkové funkce.

Všimněme si, že nepřímá užitková funkce je (nehledě na aditivní konstantu  $C$ ) rovněž logaritmická (v argumentech  $\frac{M}{p_1}$  a  $\frac{M}{p_2}$ ). Je dle očekávání rostoucí při rostoucím příjmu  $M$  a naopak klesající

v obou cenách  $p_1, p_2$ .

Její derivace použijeme níže při výpočtech poptávek pomocí *Royovy identity*:

Derivace nepřímé užitkové funkce podle ceny  $p_1$  má tvar

$$\frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial p_1} = \beta_1 \frac{p_1(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 M} \cdot \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2)(-p_1^2)} = -\frac{\beta_1}{p_1}; \text{ stejně tak } \frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial p_2} = -\frac{\beta_2}{p_2}.$$

Derivace podle příjmu  $M$  obdržíme jako

$$\frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial M} = \beta_1 \frac{p_1(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 M} \cdot \frac{\beta_1}{p_1(\beta_1 + \beta_2)} + \beta_2 \frac{p_2(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_2 M} \cdot \frac{\beta_2}{p_2(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{M}.$$

Odtud je mj. patrné, že derivace podle cen jsou obě záporné, zatímco derivace dle příjmu  $M$  nabývá kladné hodnoty. Můžeme spočítat ještě druhé derivace

$$\frac{\partial^2 \Psi(M, p)}{\partial p_1^2} = \frac{\beta_1}{p_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \Psi(M, p)}{\partial M^2} = -\frac{(\beta_1 + \beta_2)}{M^2}, \quad \frac{\partial^2 \Psi(M, p)}{\partial p_2^2} = \frac{\beta_2}{p_2^2},$$

z nichž je vidět, že druhé derivace podle cen jsou kladné, zatímco druhá parciální derivace dle příjmu je záporná.

Získané hodnoty 1. parciálních derivací můžeme použít k výpočtu *Marshallovských poptávek* pomocí *Royovy identity*. Máme

$$(4.35) \quad M x_1^* = \frac{-\frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial p_1}}{\frac{\partial \Psi(M, p)}{\partial M}} = -\frac{-\frac{\beta_1}{p_1}}{\frac{\beta_1 + \beta_2}{M}} = \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_1}, \text{ ve shodě s prvním z výrazů}$$

v (4.36).

Analogicky obdržíme  ${}^M \mathbf{x}_2^* = \frac{\beta_2 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_2}$ , opět ve shodě s druhou poptávkovou funkcí v (4.16).

Nyní můžeme přistoupit k vyvození výdajové funkce  $E({}^0 u, p_1, p_2)$ : Nejprve přepíšeme nepřímou užitkovou funkci do tvaru

$$(4.37) \quad \Psi(M, p_1, p_2) = C + \log(\beta_1 + \beta_2) \cdot M - \log p_1^{\beta_1} - \log p_2^{\beta_2}.$$

Nyní provedeme substituce

$\Psi(M, p_1, p_2) = {}^0 u$  (pevná hodnota) a naopak  $M = E({}^0 u, p_1, p_2)$  (výdajová funkce s argumenty ceny a hladina užitku) neboli

$${}^0 u = C + (\beta_1 + \beta_2) \log E(p, {}^0 u) - \log p_1^{\beta_1} - \log p_2^{\beta_2}, \text{ což dává}$$

$$\log E({}^0 u, p) = \frac{{}^0 u - C + \log p_1^{\beta_1} + \log p_2^{\beta_2}}{\beta_1 + \beta_2} \quad \text{a dále po úpravách}$$

$$\log E({}^0 u, p) = \frac{{}^0 u}{\beta_1 + \beta_2} + \frac{\log(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}) - \log\left(\frac{\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2}}{(\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2}}\right)}{\beta_1 + \beta_2}$$

$$\log E({}^0 u, p) = \frac{{}^0 u}{\beta_1 + \beta_2} + \frac{\log\left[\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2} (\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2}\right]}{\beta_1 + \beta_2}$$

a po odlogaritmování obdržíme

(4.38)

$$\begin{aligned} E({}^0 u, p) &= \exp\left\{\frac{{}^0 u}{\beta_1 + \beta_2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{\log\left[(\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\right]}{\beta_1 + \beta_2}\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{{}^0 u}{\beta_1 + \beta_2}\right\} \cdot \exp\left\{\log\left[(\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\right]^{\frac{1}{\beta_1 + \beta_2}}\right\} \\ E({}^0 u, p) &= e^{\frac{{}^0 u}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \cdot \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} \end{aligned}$$

Povšimněme si, že výdajová funkce (příslušná logaritmické užitkové funkci) vykazuje exponenciální růst ve vztahu k užitku  ${}^0 u$  a má mocninový tvar vzhledem k cenám  $p_1, p_2$ .

**Hicksův tvar poptávkových funkcí** získáme prostřednictvím **Shephardova lemmatu** následovně:

$$(4.39) \quad \begin{aligned} x_1^{*H} &= \frac{\partial E^0(u, p_1, p_2)}{\partial p_1} = e^{\frac{0_u}{\beta_1 + \beta_2}} \left( \frac{p_2}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} \left( \frac{p_1}{\beta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}} \frac{\beta_1}{p_1} \\ &= \frac{E^0(u, p_1, p_2) \beta_1}{(\beta_1 + \beta_2) p_1} \end{aligned}$$

resp. po dosazení  $E^0(u, p) = M$  je  ${}^H x_1^* = \frac{M \beta_1}{(\beta_1 + \beta_2) p_1} = M x_1^*$ , což dokumentuje formální shodu s již vyvozenými Marshallovskými poptávkovými funkcemi.

V Hicksově tvaru zaznamenáváme dle očekávání růst poptávky po dané komoditě s růstem hladiny užítku – závislost je exponenciální, intenzita růstu pak nepřímo úměrná součtu parametrů  $\beta_1 + \beta_2$ .

Tatáž poptávka klesá s růstem ceny  $p_1$ : mocnina u  $p_1$  je (s ohledem na přítomnost této ceny též ve výdajové funkci) rovna  $\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} - 1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} < 0$ .

Analogicky bychom dostali poptávku po druhém statku jako

$$(4.40) \quad {}^H x_2^* = \frac{E^0(u, p_1, p_2) \beta_2}{(\beta_1 + \beta_2) p_2}.$$

**Pro úplnost i zde ukážeme, že i třetí postup vyvození Hicksovských poptávkových funkcí – řešením minimalizační úlohy – vede k tvaru shodnému s oběma předchozími:**

Řešíme tedy úlohu  $\text{Min} \sum_{i=1}^2 p_i x_i$  za podmínky  $\beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 \geq u^0$ . Lagrangián má zde tvar

$$\Lambda(\mu, x) = \left[ \sum_{i=1}^2 p_i x_i - \mu (\beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 - u^0) \right].$$

Derivujeme nyní podle obou neznámých a obě derivace položíme rovny nule. Dostaneme

$$\frac{\partial \Lambda(\mu, x)}{\partial x_1} = p_1 - \mu \frac{\beta_1}{x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda(\mu, x)}{\partial x_2} = p_2 - \mu \frac{\beta_2}{x_2} = 0$$

(Derivací podle  $\mu$  obdržíme zřejmě zase podmínku minimálního užítku).

Porovnáním výrazů pro  $\mu$  z nutných podmínek získáme

$$\mu = \frac{p_1 x_1}{\beta_1} = \frac{p_2 x_2}{\beta_2} \quad \text{a odtud dále} \quad x_2 = \frac{p_1 \beta_2 x_1}{p_2 \beta_1}, \quad \text{což dosadíme do}$$

podmínky pro minimální užitek:  $\beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log \left( \frac{p_1 \beta_2 x_1}{p_2 \beta_1} \right) = u^0$ , odkud opět snadno určíme



$$(\beta_1 + \beta_2) \cdot \log x_1 = u^0 - \beta_2 \cdot \log \left( \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} \right),$$

neboli

$$H_{x_1}^* = e^{\frac{u^0}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}}, \text{ kterýžto výraz je identický s}$$

(4.39)

$$H_{x_1}^* = e^{\frac{u^0}{\beta_1 + \beta_2}} \left( \frac{p_2}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} \left( \frac{p_1}{\beta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}} \frac{\beta_1}{p_1}.$$

## Fragmenty pro další rozšíření

### 4.6 Zobecněná leontiefovská užítková funkce

Jde o funkční tvar, který zavedl **Erwin Diewert [1971]** jako jisté rozšíření Leontjevovy funkce.

Ve své rozšířené podobě má tvar

$$u(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} + \beta_{11} x_1 + \beta_{22} x_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}$$

s hodnotami mezních užítků

$$u_1(\mathbf{x}) = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} + \beta_{11} + \frac{\beta_{12} \sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} = \beta_{11} + \frac{\beta_1 + \beta_{12} \sqrt{x_2}}{2} x_1^{-1/2} = \beta_{11} + \frac{\beta_1 + \beta_{12} \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} + \beta_{22} + \frac{\beta_{12} \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} = \beta_{22} + \frac{\beta_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1}}{2} x_2^{-1/2} = \beta_{22} + \frac{\beta_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}$$

Mezní míra substituce

$$m_{12} = \frac{\beta_{11} + \frac{\beta_1 + \beta_{12} \sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}}{\beta_{22} + \frac{\beta_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}} = \frac{\frac{2\beta_{11} x_1 + \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_{12} \sqrt{x_1 x_2}}{x_1}}{\frac{2\beta_{22} x_2 + \beta_2 \sqrt{x_2} + \beta_{12} \sqrt{x_1 x_2}}{x_2}} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{2\beta_{11} x_1 + \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_{12} \sqrt{x_1 x_2}}{2\beta_{22} x_2 + \beta_2 \sqrt{x_2} + \beta_{12} \sqrt{x_1 x_2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} \cdot \frac{2\beta_{11} \sqrt{x_1} + \beta_1 + \beta_{12} \sqrt{x_2}}{2\beta_{22} \sqrt{x_2} + \beta_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1}}$$

Nezápornost funkce

$$\beta_{11} x_1 + \beta_{22} x_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1} \sqrt{x_2} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{x_1} & \sqrt{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} \\ \sqrt{x_2} \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{pro libovolné } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \beta_{11} > 0, \beta_{22} > 0, \beta_{11} \beta_{22} > \beta_{12}^2$$

Kladnost mezních užítků

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \beta_{11} x_1 + \beta_{22} x_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}, \quad \beta_{11} > 0, \beta_{22} > 0$$

$$u_1(\mathbf{x}) = \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > 0 \Rightarrow \beta_{12} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > -2\beta_{11}$$

$$\text{pro } \beta_{12} < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} < \frac{-2\beta_{11}}{\beta_{12}}$$

$$\text{pro } \beta_{12} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > \frac{-2\beta_{11}}{\beta_{12}} \quad \text{vždy}$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} > 0 \Rightarrow \beta_{12} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} > -2\beta_{22}$$

$$\text{pro } \beta_{12} < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < -2 \frac{\beta_{22}}{\beta_{12}} \Leftrightarrow \frac{-\beta_{12}}{2\beta_{22}} > \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$

$$\text{pro } \beta_{12} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} > -2 \frac{\beta_{22}}{\beta_{12}} \Leftrightarrow \frac{\beta_{12}}{-2\beta_{22}} < \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad \text{vždy}$$

Homogenita

$$u(\lambda \mathbf{x}) = \underbrace{\beta_0}_{\beta_0=0} + \underbrace{\beta_1 \lambda^{1/2} x_1^{1/2}}_{\beta_1=0} + \underbrace{\beta_2 \lambda^{1/2} x_2^{1/2}}_{\beta_2=0} + \underbrace{\beta_{11} \lambda x_1 + \beta_{22} \lambda x_2 + \beta_{12} \lambda^{1/2} x_1^{1/2} \lambda^{1/2} x_2^{1/2}}_{\lambda(\beta_{11} x_1 + \beta_{22} x_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1 x_2})}$$

Aby byla GL-funkce lineárně homogenní, musí platit:  $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ , takže

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \beta_{11} x_1 + \beta_{22} x_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1 x_2}.$$

Kvazikonkávnost pro tvar  $\tilde{u}(\mathbf{x}) = \beta_{11} x_1 + \beta_{22} x_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1 x_2}$

$$u_1 = \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad u_2 = \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad u_{11} = \frac{\beta_{12}}{2} \sqrt{x_2} \left(-\frac{1}{2}\right) x_1^{-3/2} = -\frac{\beta_{12}}{4x_1} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$

$$u_{22} = \frac{\beta_{12}}{2} \sqrt{x_1} \left(-\frac{1}{2}\right) x_2^{-3/2} = -\frac{\beta_{12}}{4x_2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad u_{12} = \frac{\beta_{12}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}}$$

$$u_{21} = \frac{\beta_{12}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}}$$

$$U = \begin{vmatrix} 0 & \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \\ \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & -\frac{\beta_{12}}{4x_1} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} \\ \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} & -\frac{\beta_{12}}{4x_2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda p_1 & \lambda p_2 \\ \lambda p_1 & -\frac{\beta_{12}}{4x_1} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} \\ \lambda p_2 & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} & \frac{\beta_{12}}{4x_2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda p_1 \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} \cdot \lambda p_2 + \lambda p_2 \lambda p_1 \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} - \lambda^2 p_1^2 \left(-\frac{\beta_{12}}{4x_2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right) - \lambda^2 p_2^2 \left(-\frac{\beta_{12}}{4x_1} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right) =$$

$$= \lambda^2 \left[ p_1 p_2 \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} + p_1 p_2 \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} + p_1^2 \frac{\beta_{12}}{4x_2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + p_2^2 \frac{\beta_{12}}{4x_1} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \right] =$$

$$= \lambda^2 \left[ p_1^2 \frac{\beta_{12}}{4x_2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + p_2^2 \frac{\beta_{12}}{4x_1} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + 2p_1 p_2 \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} \right] =$$

$$= \underbrace{\lambda^2}_{>0} \cdot \frac{\beta_{12}}{4} \left[ p_1^2 \sqrt{\frac{x_1}{x_2^3}} + p_2^2 \sqrt{\frac{x_2}{x_1^3}} + 2p_1 p_2 \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \right] > 0$$

$>0 \text{ pro } x_1 > 0, x_2 > 0$

Kvazikonkávnost vyžaduje, aby  $\beta_{12} > 0$ .

Zúžený tvar **zobecněné Leontjevovy funkce** neobsahuje lineární členy

$$u(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} + \beta_{12} \sqrt{x_1 x_2},$$

takže hodnoty mezních užitek jsou

$$u_1(\mathbf{x}) = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} + \frac{\beta_{12}\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} = \frac{\beta_1 + \beta_{12}\sqrt{x_2}}{2} x_1^{-1/2} = \frac{\beta_1 + \beta_{12}\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} + \frac{\beta_{12}\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} = \frac{\beta_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1}}{2} x_2^{-1/2} = \frac{\beta_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}$$

a příslušnou mezní míru substituce dostaneme jako

$$m_{12}(\mathbf{x}) = \frac{u_1(\mathbf{x})}{u_2(\mathbf{x})} = \frac{\frac{\beta_1 + \beta_{12}\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}}{\frac{\beta_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}} = \frac{\beta_1\sqrt{x_1} + \beta_{12}\sqrt{x_1 x_2}}{\beta_2\sqrt{x_2} + \beta_{12}\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{\beta_1\sqrt{x_1 x_2^2} + \beta_{12}\sqrt{x_1 x_2^3}}{\beta_2\sqrt{x_2 x_1^2} + \beta_{12}\sqrt{x_1^3 x_2}} =$$

$$\frac{\beta_1\sqrt{x_2} + \beta_{12}x_2}{\beta_2\sqrt{x_1} + \beta_{12}x_1}$$

## 4.7 Užítková funkce typu TRANSLOG

Dvoukomoditní translog

$$\log u(\mathbf{x}) = c_0 + \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 + \beta_{11} \log^2 x_1 + \beta_{12} \log x_1 \log x_2 + \beta_{22} \log^2 x_2$$

$$u(\mathbf{x}) = \exp\{c_0 + \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 + \beta_{11} \log^2 x_1 + \beta_{12} \log x_1 \log x_2 + \beta_{22} \log^2 x_2\}$$

$$u(\mathbf{x}) = c_1 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \exp\{\beta_{11} \log^2 x_1 + \beta_{12} \log x_1 \log x_2 + \beta_{22} \log^2 x_2\}$$

Mezní užítky

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1} = u(\mathbf{x}) \cdot \left[ \frac{\beta_1}{x_1} + 2 \frac{1}{x_1} \beta_{11} \log x_1 + \frac{1}{x_1} \beta_{12} \log x_2 \right] = \underbrace{\frac{u(\mathbf{x})}{x_1}}_{>0} [\beta_1 + 2\beta_{11} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2]$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_2} = u(\mathbf{x}) \cdot \left[ \frac{\beta_2}{x_2} + 2 \frac{1}{x_2} \beta_{22} \log x_2 + \frac{1}{x_2} \beta_{12} \log x_1 \right] = \underbrace{\frac{u(\mathbf{x})}{x_2}}_{>0} [\beta_2 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1]$$

Nelze zaručit, aby byly mezní užítky kladné pro všechna  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ , ani když budou všechna  $\beta_i$ ,  $\beta_{ij}$  kladná.

Mezní míra substituce

$$m_{12} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{\beta_1 + 2\beta_{11} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2}{\beta_2 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1}$$

Nelze nijak zaručit, aby byla kladná.

Kladnost mezních užiteků

$$\beta_1 + 2\beta_{11} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2 > 0 \Rightarrow \beta_{12} \log x_2 > -\beta_1 - 2\beta_{11} \log x_1$$

$$\text{pro } \beta_{12} < 0 \Rightarrow \log x_2 < \frac{-\beta_1 - 2\beta_{11} \log x_1}{\beta_{12}} \Rightarrow x_2 < \exp\left\{\frac{-\beta_1 - 2\beta_{11} \log x_1}{\beta_{12}}\right\}$$

$$\beta_2 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1 > 0 \Rightarrow \beta_{12} \log x_1 > -\beta_2 - 2\beta_{22} \log x_2$$

$$\text{pro } \beta_{12} < 0 \Rightarrow \log x_1 < \frac{-\beta_2 - 2\beta_{22} \log x_2}{\beta_{12}} \Rightarrow x_1 < \exp\left\{\frac{-\beta_2 - 2\beta_{22} \log x_2}{\beta_{12}}\right\}$$

Homogenita TRANSLOGU

$$\begin{aligned} u(\lambda \mathbf{x}) &= \exp\{c_0 + \beta_1 \log(\lambda x_1) + \beta_2 \log(\lambda x_2) + \beta_{11} \log^2(\lambda x_1) + \beta_{12} \log(\lambda x_1) \log(\lambda x_2) + \beta_{22} \log^2(\lambda x_2)\} = \\ &= \underbrace{e^{c_0} \cdot e^{\beta_1 \log(\lambda x_1)} \cdot e^{\beta_2 \log(\lambda x_2)} \cdot e^{\beta_{11} \log^2(\lambda x_1)} \cdot e^{\beta_{12} \log(\lambda x_1) \log(\lambda x_2)} \cdot e^{\beta_{22} \log^2(\lambda x_2)}}_{\lambda^{\beta_1 + \beta_2} \cdot c_1 \cdot x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \Rightarrow \text{CD-funkce}} \end{aligned}$$

CD-funkce je 1. část původního TRANSLOGU.

$$e^{\beta_{11} \log^2(\lambda x_1)} = e^{\beta_{11} (\log \lambda + \log x_1) (\log \lambda + \log x_1)} = e^{\beta_{11} (\log^2 \lambda + \log^2 x_1 + 2 \log \lambda \log x_1)} \rightarrow A$$

$$e^{\beta_{22} \log^2(\lambda x_2)} = e^{\beta_{22} (\log \lambda + \log x_2) (\log \lambda + \log x_2)} = e^{\beta_{22} (\log^2 \lambda + \log^2 x_2 + 2 \log \lambda \log x_2)} \rightarrow B$$

$$e^{\beta_{12} \log(\lambda x_1) \log(\lambda x_2)} = e^{\beta_{12} (\log \lambda + \log x_1) (\log \lambda + \log x_2)} = e^{\beta_{12} (\log^2 \lambda + \log x_1 \log x_2 + \log \lambda \log x_1 + \log \lambda \log x_2)} \rightarrow C$$

$$A + B + C = \underbrace{e^{[\beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{22}] \log^2 \lambda}}_U \cdot \underbrace{e^{[2\beta_{11} \log x_1 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2] \log \lambda}}_V \cdot \underbrace{e^{\beta_{11} \log^2 x_1} \cdot e^{\beta_{22} \log^2 x_2} \cdot e^{\beta_{12} \log x_1 \log x_2}}_{2. \text{ část původních TRANSLOGU}}$$

Aby byla funkce lineárně homogenní, musí být člen U roven 1, tj. musí platit  $[\beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{22}] \log^2 \lambda = 0$  neboli ( $\lambda$  libovolné  $> 0$ )  $\beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{22} = 0$ . (1)

Dále musí platit  $[2\beta_{11} \log x_1 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2] \log \lambda = 0$ , nebo-li obsah závorky [ ] musí být 0. Rozepsáno =  $(2\beta_{11} + \beta_{12}) \log x_1 + (\beta_{12} + 2\beta_{22}) \log x_2 = 0$ . Jelikož jsou argumenty  $x_1, x_2$  libovolné kladné, musí být

$$(2A) \quad 2\beta_{11} + \beta_{12} = 0 \text{ a současně také}$$

$$(2B) \quad \beta_{12} + 2\beta_{22} = 0.$$

$$\text{Dohromady tedy } \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Pokud tedy vezmeme  $\beta_{11} > 0, \beta_{22} > 0 \Rightarrow \beta_{12} = -2\beta_{11}; \beta_{12} = -2\beta_{22}$  a TRANSLOG musí být tvaru

$$u(x) = c_1 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdot \exp\{c_2 (\log x_1) \cdot (\log x_1) - c_2 (\log x_1) (\log x_2) + c_2 (\log x_2) (\log x_2)\}, \quad c_2 > 0.$$

To je ale v rozporu s požadavkem (1), protože pak by celá trojice  $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{22}$  musela být nulová. Znamená to, že **dvoukomoditní TRANSLOG nemůže být homogenní**.