Racionální chování spotřebitele
maximalizace užitku vs. minimalizace výdajů

Spotřebitel si při nákupu komodit počíná tak, že svůj peněžní příjem M rozdělí beze zbytku na nákup s komodit $(1 \le s \le n)$, a to tak, aby dosáhl maximálního užitku. *Jinými slovy*: **komodity kupuje v takových množstvích** (ne však nutně všechny dostupné), **aby žádoucí hladiny užitku dosáhl co nejlevněji. Bude preferovat - při variantní možnosti dosáhnout hladiny užitku u^* různými kombinacemi komodit - takovou kombinaci, při níž celkový výdaj na pořízení všech užitek mu přinášejících statků** (závisející zřejmě na množstvích statků a na jejich jednotkových cenách) **bude nejmenší možný. Je tedy mj. zřejmé, že při jinak stejném příspěvku několika komodit k užitku** (při shodných mezních užitcích těchto komodit) **bude preferovat nákup komodity nejlevnější.**

Formulace maximalizačního problému

Pokud situaci zformalizujeme, **máme optimalizační problém řešící nalezení maxima**

(1A) $\quad \text{Max } u(x_1, x_2, ..., x_n)$ **za podmínky**

(1B) $\quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M$ **a za podmínek nezápornosti**

(1C) $\quad x_i \ge 0$ **pro všechna** $i = 1, 2, ..., n$ **.**

Z matematického pohledu jde o úlohu nalezení vázaného extrému (** *zde maxima* **) obecně nelineární funkce na množině rozpočtového omezení $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M$. Jak je známo, vzhledem k tomu, že omezující podmínka spolu s podmínkami nezápornosti proměnných (1C) představuje kompaktní (tj. omezenou a uzavřenou) množinu, nabývá jakákoliv spojitá a ve všech proměnných rostoucí nelineární funkce svého maxima na hranicích takovéto množiny.

Lze tedy rozpočtové omezení stejně dobře psát ve tvaru $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$.

Úloha uvedeného typu se standardně řeší s použitím Lagrangeova multiplikátoru. Při této reformulaci nabývá kriteriální funkce tvar

(2) $$\text{Max } u(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - M\right),$$

kde λ je právě zmíněný Lagrangeův multiplikátor. S touto (hodnotou neznámou) veličinou se zachází obdobně jako s jinými proměnnými: v dalším ji budeme považovat za funkci implicitně závislou na „parametrech úlohy" tzn. na cenách obsažených v cenovém vektoru $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ a na příjmu jednotlivce M.

Řešení

Stejně jako v jiných extremálních úlohách postupujeme tak, že všechny parciální derivace extremalizované funkce $u(x) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - M\right)$ v (2) podle proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$ a λ položíme rovny nule. Po přeskupení členů dostaneme:

(3A) $u_r = \lambda \cdot p_r$ pro $r = 1, 2, ..., n$ (derivace podle x_r)

(3B) $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$ (derivace podle λ).

Rovnice (3A) a (3B) jsou nutnými podmínkami k tomu, aby pro řešený optimalizační problém existovalo řešení, tedy maximum. Těchto podmínek je právě stejný počet ($n+1$), jako je neznámých veličin modelu (velikostí poptávek po jednotlivých komoditách $x_1, x_2, ..., x_n$ a pomocná proměnná λ).

V „lineární situaci" by se dalo očekávat, že řešení bude dáno jednoznačně. Zde však n vztahů (3A) nebude až na výjimky **lineárními funkcemi. Jejich podoba závisí na tvaru užitkové funkce $u(x)$, v níž jako argumenty vystupují neznámé $x_1, x_2, ..., x_n$.**

Poznámka 1 **Od úlohy *lineárního* programování se tento problém liší ve dvou směrech:**

a) Tvar omezení (1B): je představováno jedinou nadrovinou n-rozměrného prostoru (omezující množství komodit jen "shora")

b) Užitková funkce $u(x)$ bude mít zpravidla komplikovanější tvar, než je *obvykle lineární* **funkce problému lineárního programování a problém nalezení optima bude představovat** *zpravidla* **komplikovanější analytickou úlohu než je ta, která může být řešena technikami matematického programování (*např. simplexovou metodou*).**

Z podmínek (3A) tedy plyne, že v rovnovážné situaci (kdy se poptávka spotřebitele po komoditách při maximálním užitku přizpůsobí cenovým relacím) **bude platit vztah**

(4) $$\lambda = \frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = ... = \frac{u_n}{p_n}$$

Vztahy (4) představují soustavu podmínek nutných pro dosažení rovnovážného stavu. Vyjadřují požadavek, aby podíl mezního užitku kterékoliv komodity a její jednotkové ceny byl konstantní pro všechny uvažované komodity. Je odtud vidět, že též veličina λ (uplatňující se jako Lagrangeův multiplikátor) **je rovna všem těmto podílovým hodnotám.**

O rovnováze lze oprávněně **mluvit tehdy, jestliže je dosaženo maximálního užitku při daném příjmu a dané množině relativních cen. Jakékoliv vychýlení z rovnováhy vede vždy ke snížení hodnoty užitku spotřebitelem pociťovaného.**

Jestliže tedy každé u_r představuje mezní užitek (úměrný v rovnovážné situaci ceně r-té komodity)**, můžeme veličině λ přisoudit interpretaci jako „*mezní užitek peněz*"** (který je ovšem také funkcí cen p_i, $i = 1, 2, ..., n$ a důchodu M). Za těchto okolností pak **platí pro podíl mezních užitků (tedy mezní míru substituce mezi r-tou a s-tou komoditou) vztah**

(5A) $$m_{rs} = \frac{u_r}{u_s} = \frac{p_r}{p_s}$$ **a podobně** (5B) $$m_{r\lambda} = \frac{u_r}{\lambda} = \frac{p_r}{1}$$

Můžeme tedy říci, že **mezní míra substituce mezi r-tou a s-tou komoditou je v rovnovážné situaci rovna podílu jednotkových cen těchto komodit. Cenu p_r lze interpretovat jako mezní míru substituce mezi r-tou komoditou a penězi.**

Duální úloha – minimalizační problém

Maximalizační problém, tak jak byl představen vztahy (1A-C), může být formulován i duálním způsobem. Maximalizace účelové funkce (1A) za podmínek (1B-C) má svou duální formulaci následujícím tvaru

(6A) $$\text{Min } M = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$ **za podmínky**

(6B) $$u(x) \geq u^0$$ opět **při** $p_i > 0$ **pro libovolné** i.

(6C) $$x_i \geq 0$$ **pro všechna** $i = 1, 2, ..., n$.

Maximalizuje-li spotřebitel svůj užitek z komoditní kombinace při rozpočtovém omezení (1B), řeší v podstatě tentýž problém, jako je minimalizace jím vynaložených výdajů spojených pořízením komodit v množstvích, která zaručují dosažení užitku na požadované hladině u^0 **. V tomto smyslu lze mluvit o dvojici duálních úloh.**

Řešení úlohy (6A-C)

Obdobně jako při řešení maximalizační úlohy řešíme i tuto úlohu po reformulací úlohy užitím Lagrangeova multiplikátoru (zde **označeného** μ **). Kriteriální funkce má v tomto případě tvar**

(7) $$\text{Min } G(x,\mu) = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \mu.(u(x) - u^0),$$

Opět položíme parciální derivace $\frac{\partial G}{\partial x_r}, \frac{\partial G}{\partial \mu}$ **rovny nule. Dostaneme**

(8A) $$\frac{\partial G(x,\mu)}{\partial x_r} = p_r - \mu.\frac{\partial u(x)}{\partial x_r} = 0\ ,$$ **(8B)** $$\frac{\partial G(x,\mu)}{\partial \mu} = u(x) - u^0 = 0$$ a odtud

(9) $$p_r = \mu \cdot u_r$$ neboli $$\mu = \frac{p_r}{u_r}$$ pro $r = 1, 2, ..., n$

<u>Poznámka 2</u> Mezi Lagrangeovým multiplikátorem λ **(** ***maximalizační úlohy*** **(1)) a Lagr. multiplikátorem** μ **(** ***maximalizační úlohy*** **(6)) platí zřejmě vztah reciprocity**

(10) $$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

Maximalizace užitku a minimalizace s tím souvisejících nákladů vedou k téže (*optimální***) volbě komoditních množství** x_i **(**parametry úlohy jsou p a M**), výdaj při prvé z úloh se musí rovnat minimálním nákladům v duálním problému.**

- ***Řešení maximalizačního problému představuje soustava Marshallových poptávkových funkcí*** $g_i(M,p)$ ***, v nichž příjem a cenový vektor vystupují jako parametry.***

V duálním *minimalizačním problému* jsou determinujícími veličinami - argumenty poptávkových funkcí - úroveň užitku u^0 a cenový vektor p.

- ***Řešení minimalizačního problému tvoří soustava Hicksových (někdy také kompenzovaných) poptávkových funkcí, v nichž jako parametry vystupují hladina užitku a cenový vektor.***

Z interpretačního hlediska jsou tyto funkce charakteristické tím, že informují o tom, jak jsou poptávky x_i ovlivněny/kompenzovány cenami p (při pevném u) .

Řešení obou výše definovaných problémů musí být tedy táž. Proto lze psát

(11) $$x_i = g_i(M,p) = h_i(u,p) \qquad \text{pro } i = 1,2,...,n \ .$$

Každé z těchto řešení přitom můžeme zpět dosadit do výchozího příslušného problému. V prvém případě obdržíme *nejvyšší dosažitelný užitek*, ve druhém případě *nejmenší dosažitelné náklady*. Lze tedy **psát :**

(12) $$u = u(x_1, x_2, ..., x_n) = u[g_1(M,p), g_2(M,p), ..., g_n(M,p)] = \psi(M,p)$$

(13) $$M = \sum_{k=1}^{n} p_k h_k(u,p) = E(u,p)$$

Funkce $\psi(M,p)$ v (12) vyjadřuje *maximální dosažitelný užitek* (při pevně daném příjmu M a cenovém vektoru p). Nazývá se <u>*nepřímá užitková funkce*</u> (*indirect utility function*)[1] a je takto definována vztahem

(14) $$\psi(M,p) = \underset{x}{\mathrm{Max}}\left[u(x);\ \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = M \right]$$

Funkce $E(u,p)$ v (13) vyjadřuje *minimální dosažitelný výdaj* (při požadované úrovni užitku u^0 a vektoru cen p). Nazývá se <u>*výdajová funkce*</u> *(expenditure function)* a lze ji definovat vztahem

(15) $$E(u^0,p) = \underset{x}{\mathrm{Min}}\left[\sum_{k=1}^{n} p_k x_k ; u(x) = u^0 \right]$$

***Nepřímá užitková* a *výdajová funkce* jsou vzájemně velmi úzce propojeny. Protože platí $E(u,p) = M$, můžeme invertovat argument u, abychom dostali u jako funkci M a p, což nám dá $u = \psi(M,p)$. Úplně obdobně inverze vztahu $u = \psi(M,p)$ povede přímo k relaci $E(u,p) = M$.**

Obě funkce tedy obsahují v podstatě tutéž informaci (zapsanou však pomocí jiných argumentů, přičemž p zůstává v obou)**.**

---

[1] Pojem ***nepřímé užitkové funkce*** zavedl poprvé italský matematik **Giovanni Antonelli**, nezávisle na něm pak **Harold Hotteling [1932]: Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions. Journal of Political Economics. 40-1932. s.577-616.**