Nová definice průměru, příspěvek ke stanovení agregátní úrokové míry

Václav Studený

Department of Applied Mathematics, Faculty of Economics
and Administration, Masaryk University
Lipová 24a, 602 00 Brno
studeny@econ.muni.cz

Abstract: Cílem této krátké poznámky je nabídnout koncepční přístup k definici průměru, která nám umožní bez kvantitativního pochybení agregovat naměřené hodnoty v matematicko – ekonomických modelech, nebo stanovovat relevantní zástupné hodnoty pro komparaci (fondů, bank, HDP,. . .)
Nabízená definice průměru zahrnuje pojem účelová funkce, který charakterizuje povahu objektu, který průměrujeme, vzhledem ke způsobu, jak tento objekt nahlížíme.
Jsou rovněž připomenuty dvě obecné koncepce definice průměru, funkcionální Azzelova [1] a axiomatická [2]. Oba příklady jsou vystavěny na předpokladu, že průměr je rostoucí v průměrovaných argumentech. V tomto článku je ukázán přirozený příklad průměru který není rostoucí ve všech argumentech.
Podstata přístupu je demonstrována na výnosech penzijních fondů.

Key words: Průměrná hodnota, úroková míra, agregátní úroková míra.
MSC 2000 Classification: 26E60 Means 43A07 Means on groups, semigroups, etc.; amenable groups
JEL Classification: E400 - Money and Interest Rates: General (includes measurement and data) E430 - Determination of Interest Rates; Term Structure of Interest Rates E470 - Money and Interest Rates: Forecasting and Simulation O400 - Economic Growth and Aggregate Productivity:

1. Obecná rozvaha a definice:

Investiční fondy rády uvádějí průměrnou míru výnosu za několik posledních let. Myslí tím aritmetický průměr z výnosů. Je ale jen velmi málo úvah, ve kterých by nahrazení skutečných hodnot měr výnosů jejich aritmetickým průměrem nevedlo k chybě.

Předpokládejme, že období bylo N, že výnoost za i-té období bylo ξ_i. Předpokládejme, že jejich průměr je roven K, tedy:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i = K \tag{1}$$

Celková výnosnot z všech N období je

$$\zeta = \prod_{i=1}^{N}(1+\xi_i) - 1 \tag{2}$$

Pokud je $N \geq 2$ nejsou rovnicí 1 určena ξ_i jednoznačně. Na množině všech ξ_i splňujících 1 nabývá funkce ζ různých hodnot: její maximum je $(1+K)^N - 1$, zdola vůbec není omezená, takže: *Znalost aritmetického průměru výnosů nám umožní odhadnou celkový výnos pouze shora, ale nikoliv zdola. Při tomtéž aritmetickém průměru výnosů se mohou celkové výnosy libovolně lišit.*

1.1. Proof: Pro $N = 2$, pokud jsou ξ_1 a ξ_2 míry výnosu za dvě po sobě jdoucí období a ζ míra výnosu za obě tato období. Pokud je K aritmetický průměr ξ_1 a ξ_2 máme:

$$\begin{gathered}(1+\xi_1)\cdot(1+\xi_2) = 1+\zeta \\ \frac{1}{2}\,\xi_1 + \frac{1}{2}\,\xi_2 = K\end{gathered} \tag{3}$$

odtud

$$\begin{gathered}\xi_2 = -\xi_1 + 2\,K \\ \zeta = 2\,K - {\xi_1}^2 + 2\,\xi_1\,K\end{gathered} \tag{4}$$

poslední rovnice udává vztah mezi skutečnou mírou výnosu za obě období a mírou výnosu ya jedno z nich při konstantní průměrné míře výnosu K. Závislost je analytická a tak můžeme maximální výnost najít jako nulový bod derivace:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}\,\zeta = -2\,\xi_1 + 2\,K = 0 \Longleftrightarrow \xi_1 = K \tag{5}$$

přitom
$$\frac{\partial^2}{\partial {\xi_1}^2}\,\zeta = -2 \tag{6}$$
Takže, při zachování průměrného výnosu K za dvě období:

- Míra výnosu ζ nabývá maxima $\zeta = (K+1)^2 - 1$, je-li $\xi_1 = \xi_2 = K$, tj. jsou-li obě průměrované hodnoty stejné.
- Je-li jeden z výnosů roven nule $\xi_1 = 0$, je druhý výnos $\xi_2 = 2\,K$ a celkový výnos $\zeta = 2\,K$.
- Je-li jeden z výnosů $\xi_1 = -1$ tj. při investici došlo ke strátrě všech vložených protředků, stačí, aby druhý výnosn byl $\xi_2 = 1 + 2\,K$ a průměrná míra výnosu zůstane K, ztímco celková míra výnosu bude $\zeta = -1$. Tj. vkladatel přijde sice o všechny vložené prostředky, ale aritmetický průměr výnosů, na kterých se podílí bude stále K, z toho je vidět, jak velký má aritmetický průměr marketingový potenciál.
- a dále $\lim\limits_{\xi_1\to\infty} \xi_2 = -\infty$, $\lim\limits_{\xi_1\to\infty} \zeta = -\infty$,
$\lim\limits_{\xi_1\to(-\infty)} \xi_2 = \infty$, $\lim\limits_{\xi_1\to(-\infty)} \zeta = -\infty$

Podobná situace nastane i v případě, kdy je období více. Pokud známe aritmetický průměr K měr výnosů, míra výnosu za N období je
$$\left(1 + N\,K - \left(\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^{N-1}(1+\xi_i)\right) = 1 + \zeta \tag{7}$$
a funkce ζ, jejímž argumentem je $N-1$ výnosů ξ_i má opět maximum $(\xi_i)_{i=1}^{N} = (K)_{i=1}^{n}$
$$\zeta = (1 + K/N)^N - 1 \tag{8}$$
v bodě
$$(\xi_i)_{i=1}^{N} = (K)_{i=1}^{n} \tag{9}$$
a není zdola ohraničená.

- Současná hodnota původně vloženého kapitálu může být 0 při libovolném aritmetickém průměru výnosů. K tomu je nutno a stačí, aby jedna míra výnosů byly rovna -1.
- Když má jeden fond větší průměrnou míru výnosu, než druhý, neznamená to, že by zhodnocení u tohoto fondu muselo být nutně vyšší.

Z toho je patrno, že nám takovýto průměr výnosů nedává žádnou podstatnou informaci.

Lze říci, že jsme použili nesprávný průměr. Že použití geometrického průměru by nám dalo lepší výsledky. Kdybychom počítali průměr podle vzorce:
$$\zeta = \left(\prod_{i=1}^{N}(1+\xi_i)\right)^{\left(\frac{1}{N}\right)} - 1 \tag{10}$$
namísto
$$\zeta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i \tag{11}$$
dostali bychom přímo N-tou odmocninu míry celkového výnosu. Zejména fondy s vyšším průměrným výnosem by měly i vyšší skutečný výnos.

2. Dva obecné přístupy k průměrům:

Průměr dvou čísel lze chápat jako binární operaci $\circ$. Geometrický průměr, stejně jako exponenciální průměr, který hraje významnou roli ve finanční matematice též, lze nazírat jako jisté zobecnění aritmetického průměru pro vhodně zvolenou funkci k ve tvaru:
$$x \circ y = \left(k^{(-1)}\right)\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{k}\,(x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{k}\,(y)\right) \tag{12}$$
obecné vlastnosti tohoto průměru jsou popsány v [Azzel str. 229]. Hlavní výsledek, který ukatzuje diostui obecný charakter této definice je: THEOREM: There exists a continuous and strictly monotonic

function k which gives a value of a mean; (12) holds if, and only if, $\circ\colon I^2 \mapsto I$ is continuous and strictly increasing in booth variables, idempotent, commutative (symetric) and medial (bysimetric) which means:

$$(x \circ y) \circ (z \circ w) = (x \circ z) \circ (y \circ w) \tag{13}$$

In the Book P. S. Bullen, D. S. Mitrinović P. M. Vasić; Means and Their Inequalities, D. Reidel publishing Company, Dordecht, Boston., Lancaster, Tokyo, 1988, ISBN 90–277–2629–9, p. 372 je pokus o axiomatickou definici průměru:

- je symetrický, is symetric,
- homogenní (stupně 1), homogenous of degree 1,
- reflexivní, reflexive
- asociativní, associative, (průměr n čísel má tutéž hodnotu, jako by měl, kdyby $p \leq n$ z nich bylo nahrazeno svým průměrem): $\mathrm{f}\left(a_1, \ldots, a_n\right) = \mathrm{f}\left(\mathrm{f}\left(a_1, \ldots, a_p\right), \ldots, \mathrm{f}\left(a_1, \ldots, a_p\right), a_{p+1}, \ldots, a_n\right)$
- a rostoucí ve všech proměnných, icreasing in each variable.

Tato definice nám nevyhovuje, protože například průměrná úroková míra spoření není symetrická (a symetrie není narušena pouhým přidáním vah).

Nevýhodou těchto koncepcí je, že se průměr vztahuje k hodnotám, ze kterých je počítán, ale nikoliv k jejich významu, čili k tomu, co s nimi chceme dělat. (Tak například aritmetický průměr má smysl jen pro aditivní veličiny, tj. pro veličiny, které chceme sčítat, ale obvyklá definice aritmetického průměru tuto restrikci nezahrnuje). Nabízíme koncepci, která je jednodušší, obecnější a tuto nevýhodu nemá. Povaha průměrovaných hodnot je zde vyjádřena účelovou funkcí, do které mají být hodnoty dosazovány.

3. Obecná definice průměru:

3.2. Definition: Z je průměrná hodnota hodnot $(z_i)_{i=1}^n$ *vzhledem k funkci* $\mathrm{F}\colon \coprod_{i\in I} X^i \to Y$ pokud

$$\mathrm{F}\left((z_i)_{i=1}^n\right) = \mathrm{F}\left((Z)_{i=1}^n\right) \tag{14}$$

(tj. $F\left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right) = F\left(z, z, \ldots, z\right)$).

Pokud je F prostá, je průměr určen jednoznačně, pokud existuje.

Je-li $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f|_\Delta)$, kde Δ je diagonála: $\Delta = \{(x)_{i=1}^n \,|x \in X\}$, průměr existuje vždy.

3.3. Example: Je-li F sčítání, dostaneme aritmetický průměr. Je-li F násobení, dostaneme geometrický průměr.

Při volbách se hlasy sčítají. Aritmetický průměr hlasů odevzdaných pro tu kterou volební stranu odpovídá poměrnému zastoupení strany v parlamentu.

Míra inflace se násobí. Je-li

$$\iota := [.01,\ .03,\ .02,\ .01,\ .03] \tag{15}$$

míra inflace za pět po sobě jdoucích období je míra inflace za celou tuto dobu

$$\left(\prod_{j=1}^{5} \left(1+\iota_j\right)\right) - 1 = .10386857 \tag{16}$$

A pokud by byla inflace po všechna období stejná a byla by rovna

$$\kappa := \left(\prod_{j=1}^{5} \left(1+\iota_j\right)\right)^{1/5} - 1 = .019960783 \tag{17}$$

byla by míra inflace za 5 období táž:

$$\left(\prod_{j=1}^{5} \left(1+\kappa\right)\right) - 1 = .10386857 \tag{18}$$

Tedy pokud bude účelová funkce

$$\iota \mapsto \left(\prod_{j} \left(1+\iota_j\right)\right) - 1 \tag{19}$$

Bude průměr vzhledem k této funkci geometrický průměr z hodnot $1+\iota_j$ a nebo jistý nepojmenovaný průměr z hodnot ι_j.

4. Průměrné výnosy penzijních fondů:

Předpokládejme, že známe roční výnosy penzijních fondů. Hledáme nějaký průměrný výnos, který by nám umožnil fondy porovnat.

Předpokládejme, že příspěvky spořitele penzijnímu fondu jsou dlouhodobě stejné, (i přes snahu fondů donutit přispěvatele ke stále větším příspěvkům), můžeme očekávat, že pokud byly roční příspěvky účastníka včetně státních příspěvků x a pokud byla míra jejich zúročení vzniklá rozdělením zisku v roce i rovna ξ_i spořitel by naspořil za dobu N:

$$x\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{i=1}^{j}(1+\xi_{N-i+1})\right)\right) \tag{20}$$

Pro spořitele je tedy důležitý průměrný výnos fondu vzhledem k funkci

$$(\xi)_{i=1}^{T} \to \left(\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{i=1}^{j}(1+\xi_{N-i+1})\right)\right) \tag{21}$$

podle naší definice je takový výnos ζ, který by splňoval rovnici:

$$K=\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{i=1}^{j}(1+\xi_{N-i+1})\right)=\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{i=1}^{j}(1+\zeta)\right)=-\frac{-(1+\zeta)^{(N+1)}+1+\zeta}{\zeta} \tag{22}$$

Jde o algebraickou rovnici stupně N.

Pokud by období bylo jenom jedno, byla by úroková míra za toto období rovna svému průměru:

$$\zeta=-1+K \tag{23}$$

Pokud by období byla dvě, měla by rovnice obecně dvě řešení . V případě, že by naspořená částka byla větší než $\frac{1}{4}$ spořené částky by byla tato řešení reálná . V případě, který považujeme za rozumný, že by naspořená částka byla větší než dvojnásobek spořené částky by jedno řešení bylo kladné a bylo by rovno

$$\zeta=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\,K} \tag{24}$$

V případě, že by období byla tři existovala by jediná reálná průměrná úroková míra a to:

$$\zeta=1/6\,\frac{\left(28+108\,K+12\,\sqrt{9+42\,K+81\,K^2}\right)^{2/3}-8-8\sqrt[3]{28+108\,K+12\,\sqrt{9+42\,K+81\,K^2}}}{\sqrt[3]{28+108\,K+12\,\sqrt{9+42\,K+81\,K^2}}} \tag{25}$$

Pokud by bylo období více než čtyři, nedovedeme řešit rovnici (22) algebraicky a musíme ji řešit numericky.

4.4. Example: Během pěti let od roku 1999 do roku 2003 existovalo v České republice několik penzijních fondů. Budeme sledovat tyto fondy:

(1) ČSOB Progres, (2) Zemský PF, (3) PF KB, (4) ING, (5) Credit Suisse, (6) PF ČP, (7) Allianz, (8) Generali, (9) Nový ČP, (10) ČSOB Stabilita, (11) PF ČS, (12) Hornický PF; jejich relativní výnosy

ukazuje následující tabulka:

Fondy	**míra výnosu (v %)**				
	1999	2000	2001	2002	2003
ČSOB Progres	7.7	5.6	3.9	4.3	4.3
Zemský PF	7.0	5.0	4.6	4.1	4.01
PF KB	7.2	4.9	4.4	4.6	3.4
ING	6	4.4	4.8	4	4
Credit Suisse	6.5	4.1	4.3	3.4	3.4
PF ČP	6.6	4.5	3.8	3.2	3.1
Allianz	6	3.8	4.4	3.7	3
Generali	5.3	3.6	4.6	4.1	3
Nový ČP	5.6	3.8	4.1	3.5	3.34
ČSOB Stabilita	6.1	4.2	3.2	3.0	2.34
PF ČS	4.4	4.2	3.8	3.5	2.64
Hornický PF	4.4	2	2.8	3.2	2.44

(26)

Českomoravská stavební spořitelna vydala pro zprostředkovatele penzijního připojištění informační příručku, ve které uspořádala fondy podle aritmetických průměrů jejich míry výnosů které jsou ovšem, jak jsme již vysvětlili, irelevantní (druhý sloupec násl. tabulky, hodnoty jsou uvedené v setinách). Pokud spočítáme průměry vzhledem k účelové funkci (ξ_i^k je míra výnosu k. fondu v i. období):

$$\Phi\colon \left(\xi^k\right)_{i=1}^{5} \longmapsto \sum_{j=1}^{5} \left(\prod_{i=1}^{j} \left(1 + \xi^k_{5-i+1}\right) \right) \tag{27}$$

(třetí sloupec násl. tabulky, hodnoty jsou uvedené v setinách). Zjistíme, že se v několika případech stalo, že fondy s vyšším výnosem byly zařazeny až za fondy s nižším výnosem:

Fondy	**průměry míry výnosů**	
	aritmetický (*nevhodný*)	**vzhledem k funkci Φ** (*vhodný*)
ČSOB Progres	5.16	4.638
Zemský PF	4.94	4.501
PF KB	4.90	4.394
ING	4.64	4.358
Credit Suisse	4.34	3.895
PF ČP	4.24	† 3.704
Allianz	4.18	† 3.787
Generali	4.12	† 3.857
Nový ČP	4.06	3.757
ČSOB Stabilita	3.76	‡ 3.203
PF ČS	3.70	‡ 3.438
Hornický PF	2.96	2.789

(28)

(†) Vidíme, že fond Allianz, uváděný na 7. místě měl skutečné průměrné zhodnocení a tedy i skutečné celkové zhodnocení lepší PF ČP uváděný na 6. místě a ještě lepší zhodnocení měl fond Generali, uváděný až za oběma předchozími. Oba jsou ve zmiňovaných materiálech uváděny jako fondy se stejným průměrným zhodnocením 4.2.

(‡) Navíc fond ČSOB Stabilita, k jehož propagaci mělo toto srovnání rovněž sloužit, je uváděn jako fond s vyšším průměrným zhodnocením (aritmetický průměr 3.8), než fond PF ČS (aritmetický průměr 3.7) a přitom by měl být uváděn (s průměrem 3.2) až za fondem PF ČS (průměr 3.4)!

Pokud chceme správně interpretovat výsledky, musíme stanovit, citlivost naspořené částky na změnu úrokové sazby. S výhodou můžeme nahradit výnosy fondů průměrnými výnosy, které jsme vypočítali. Relativní změna naspořené částky za dobu T při změně průměrné úrokové míry z ξ na ζ, (tj. míra zisku nebo ztráty na celkové naspořené částce při volbě jiného fondu) je

$$\frac{(1+\zeta)^T\ \xi - \xi - (1+\xi)^T\ \zeta + \zeta}{\left((1+\xi)^T - 1\right)\ \zeta}. \tag{29}$$

V našem případě je $T = 5$ a hodnoty pro jednotlivé fondy uváděné ve stejném pořadí jako v předchozích tabulkách jsou v setinách uvedeny v tabulce následující:

0	−0.27	−0.49	−0.56	−1.5	−1.8	−1.7	−1.5	−1.7	−2.8	−2.4	−3.6
0.27	0	−0.21	−0.29	−1.2	−1.6	−1.4	−1.3	−1.5	−2.6	−2.1	−3.4
0.49	0.21	0	−0.072	−0.99	−1.4	−1.2	−1.1	−1.3	−2.4	−1.9	−3.2
0.56	0.29	0.072	0	−0.92	−1.3	−1.1	−1.0	−1.2	−2.3	−1.8	−3.1
1.5	1.2	1.0	0.93	0	−0.38	−0.21	−0.075	−0.27	−1.4	−0.91	−2.2
1.9	1.6	1.4	1.3	0.38	0	0.17	0.31	0.11	−1.0	−0.53	−1.8
1.7	1.4	1.2	1.1	0.21	−0.17	0	0.14	−0.061	−1.2	−0.70	−2.0
1.6	1.3	1.1	1.0	0.075	−0.31	−0.14	0	−0.20	−1.3	−0.83	−2.1
1.8	1.5	1.3	1.2	0.28	−0.11	0.061	0.20	0	−1.1	−0.64	−1.9
2.9	2.6	2.4	2.3	1.4	1.0	1.2	1.3	1.1	0	0.47	−0.83
2.4	2.1	1.9	1.9	0.92	0.53	0.70	0.84	0.64	−0.47	0	−1.3
3.8	3.5	3.3	3.2	2.2	1.8	2.0	2.2	2.0	0.83	1.3	0

(30)

V i. řádku j. sloupci je napsáno, o kolik procent by byla vyšší celková naspořená částka, kdybychom místo do i. fondu investovali do j. fondu. A tedy při správné volbě fondu jsme za pět let mohli mít přibližně až o čtyři procenta naspořeno více, než při nesprávné volbě.

5. Průměrná úroková míra souběžných spořeni:

Předpokládejme, že máme dvě konta, každé úročené jinou úrokovou mírou ξ_1 a ξ_2. Kapitál o objemu $x_1 + x_2$ mezi ně rozdělíme tak, že na jednom kontě budeme mít kapitál o objemu x_1 a na druhém kapitál o objemu x_2. Účelová funkce je funkce, jejíž hodnota je stav našeho kapitálu za dobu t. Je to funkce $\Psi_{x_1,x_2,t}\colon (\xi_1, \xi_2) \mapsto x_1 (1+\xi_1)^t + x_2 (1+\xi_2)^t$ a závisí na třech parametrech. Průměrná úroková míra vzhledem k této funkci je řešením ζ rovnice:

$$x_1 (1+\xi_1)^t + x_2 (1+\xi_2)^t = (x_1 + x_2)\ (1+\zeta)^t \tag{31}$$

tedy

$$\zeta = \left(\frac{x_1\ (1+\xi_1)^t + x_2\ (1+\xi_2)^t}{x_1 + x_2}\right)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \tag{32}$$

A je to zobecněný exponenciální průměr. Zajímavá je jeho závislost na t. Zejména limita $t \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{x_1 (1+\xi_1)^t + x_2 (1+\xi_2)^t}{x_1 + x_2}\right)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\frac{x_1 (1+\xi_1)^t + x_2 (1+\xi_2)^t}{x_1+x_2}\right)^{\left(\frac{1}{t}\right)}} - 1 =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln\left(x_1\ (1+\xi_1)^t + x_2\ (1+\xi_2)^t\right) - \ln(x_1+x_2)}{t}} - 1 \tag{33}$$

s použitím L'Hospitalova pravidla

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln\left(x_1\ (1+\xi_1)^t + x_2\ (1+\xi_2)^t\right) - \ln(x_1+x_2)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{x_1\ (1+\xi_1)^t \ln(1+\xi_1) + x_2\ (1+\xi_2)^t \ln(1+\xi_2)}{x_1\ (1+\xi_1)^t + x_2\ (1+\xi_2)^t} \tag{34}$$

a po vydělení čitatele i jmenovatele zlomku výrazem $(1+\xi_2)^t$dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x_1 \ln(1+\xi_1)\left(\frac{1+\xi_1}{1+\xi_2}\right)^t + x_2 \ln(1+\xi_2)}{x_1\left(\frac{1+\xi_1}{1+\xi_2}\right)^t + x_2}. \tag{35}$$

Za předpokladu: $\xi_1 < \xi_2$ je

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{x_1\ (1+\xi_1)^t + x_2\ (1+\xi_2)^t}{x_1+x_2}\right)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 = \xi_2, \tag{36}$$

tedy větší z obou čísel. *Uročíme-li dvě části kapitálu na účtech se dvěma různými úrokovými měrami je po dostatečně dlouhé době výsledke (přibližně) týž, jako bychom obě úročili na účtu s vyšší úrokovou mírou.*

Oproti tomu

$$\lim_{t\to 0}\zeta = t\,(1+\xi_1)^{\frac{x_1}{x_1+x_2}}\,(1+\xi_2)^{\frac{x_2}{x_1+x_2}} - 1 \tag{37}$$

což je zobecněný geometrický průměr.

Stejný výsledek dostaneme i pokud bude kont více. Budou-li úrokové míry (ξ_i) a počáteční stavy účtů (x_i) bude účelová funkce

$$(\xi_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i\,(1+\xi_i)^t \tag{38}$$

a průměrná hodnota (ξ_i) vzhledem k této funkci bude řešení ζ rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,(1+\xi_i)^t = \sum_{i=1}^{n} x_i\,(1+\zeta)^t = (1+\zeta)^t \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{39}$$

a tedy

$$\zeta = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\,(1+\xi_i)^t}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 \tag{40}$$

a stejně můžeme ukázat, pokud $\xi_n = \max_i(\xi_i)$, že

$$\lim_{t\to\infty}\zeta = e^{\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \ln(1+\xi_i)\left(\frac{1+\xi_i}{1+\xi_n}\right)^t\right) + x_n \ln(1+\xi_n)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\left(\frac{1+\xi_i}{1+\xi_n}\right)^t\right) + x_n}\right)} - 1 = \xi_n = \max_i(\xi_i) \tag{41}$$

a

$$\lim_{t\to 0}\zeta = \prod_{i=1}^{n}(1+\xi_i)^{\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j}} \tag{42}$$

Princip konvergence k maximu: Pokud máme uloženy různé částky na účtech s různými úrokovými mírami, je po dostatečné době součet stavu na našich účtech skoro stejný, jako bychom měli všechny peníze uloženy na účtu s nejvyšší úrokovou mírou.

Z toho plyne, že při dlouhodobých investicích je důležité diverzifikovat kapitál.

Podobně je tomu při spoření konstantních částek v ekvidistantních okamžicích:

6. Průměrná úroková míra spoření:

Předpokládáme na trhu spoření o pravidelných úložkách velikosti x_i v okamžicích $t \in \mathbb{N}$ s konstantními úrokovými mírami ξ_i Účelová funkce je součet budoucích hodnot spoření s různými úrokovými mírami:

$$\Phi_{(x_i)_{i=1}^k, N} := \left((\xi_i)_{i=1}^k\right) \longmapsto \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{N-1} x_i\ (1+\xi_i)^j\right) = \sum_{i=1}^{k}\frac{x_i\left((1+\xi_i)^N - 1\right)}{\xi_i} \tag{43}$$

spořené částky, $(x_i)_{i=1}^k$ a počet spoření s různými úrokovými mírami k jsou parametry Φ.

Průměrná úroková míra spoření $\Xi = \Xi\left((x_i), N\right)$ vzhledem k funkci $\Phi_{(x_i)_{i=1}^k, N}$ je řešením rovnice:

$$xxx := \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i\right)\left((1+\Xi)^N - 1\right)}{\Xi} = \sum_{i=1}^k \frac{x_i\left((1+\xi_i)^N - 1\right)}{\xi_i} \tag{44}$$

Budeme zkoumat závislost na parametru N, tj. na počtu úložek. Platí opět princip maxima:

$$\lim_{t\to\infty} = \max_i (\xi_i) \tag{45}$$

6.5. Proof: Buď

$$\eta = \eta\left(\xi_i, x_i, n, T\right) \tag{46}$$

průměrná úroková míra vzhledem k funkci

$$\Phi := \xi \to \sum_{\tau=1}^n \left(\sum_{j=1}^k x_j\ (1+\xi_j)^{(T-\tau)}\right) \tag{47}$$

tj. řešení rovnice

$$\sum_{\tau=1}^n \left(\sum_{j=1}^k x_j\ (1+\xi_j)^{(T-\tau)}\right) = \left(\sum_{j=1}^k x_j\right)\left(\sum_{\tau=1}^n (1+\eta)^{(T-\tau)}\right) \tag{48}$$

a buď

$$\zeta\left(\xi_i, x_i, \tau, T\right) \tag{49}$$

průměrná úroková míra vzhledem k funkci

$$\Psi := \xi \to \sum_{j=1}^k x_j\ (1+\xi_j)^{(T-\tau)} \tag{50}$$

tj. řešení rovnice

$$\sum_{j=1}^k x_j\ (1+\xi_j)^{(T-\tau)} = (1+\zeta)^{(T-\tau)}\left(\sum_{j=1}^k x_j\right) \tag{51}$$

Zřejmě platí (je zřejmé, že platí)

$$\min\left(\zeta\left(\xi_i, x_i, \tau, T\right)\right)_{\tau=1}^n \le \eta\left(\xi_i, x_i, n, T\right) \le \max\left(\zeta\left(\xi_i, x_i, \tau, T\right)_{\tau=1}^n\right) \tag{52}$$

Podle (41)

$$\lim_{T\to\infty} \min\left(\zeta\left(\ldots, \tau, T\right)_{\tau=1}^n\right) = \lim_{T\to\infty} \max\left(\zeta\left(\ldots, \tau, T\right)_{\tau=1}^n\right) = \max_i (\xi) \tag{53}$$

tedy i

$$\lim_{T\to\infty} \eta\left(\xi_i, x_i, n, T\right) \tag{54}$$

a proto

$$\lim_{T\to\infty} \eta\left(\xi_i, x_i, T, T\right) = \lim_{n\to\infty}\lim_{T\to\infty} \eta\left(\xi_i, x_i, n, T\right) = \lim_{n\to\infty} \max_i (\xi_i) = \max_i (\xi_i) \tag{55}$$

Q. e. d.

Průměrná úroková míra spoření v závislosti na čase t je menší, než průměrná úroková míra úročení, ale má stejnou limitu $t \to 0$ a $t \to \infty$. Na obrázku je graf závislosti průměrné úrokové míry spoření a úročení na čase, když úroková míra prvního spoření za jednotku času je 0.1 a úroková míra druhého spoření za jednotku času je 0.2. Limita obou průměrů v nule je $\sqrt{1.1 \cdot 1.2} = 1.148912529$ a v nekonečnu je $\max(0.1, 0.2) = 0.2$.

Takto obecná definice průměru nám umožní mnoho úloh formulovat jako problém nalézt průměrnou hodnotu vzhledem k nějaké funkci. Abychom zůstali u tématu, jehož jsme se v příkladech drželi, ukážeme ještě, jak lze porovnat překlenovací úvěr s běžným hypotéčním úvěrem, což je věc, přesahující schopnosti většiny těch, kteří si, v důsledku toho, že mají smlouvy o provizích za zprostředkování úvěrů, říkají finanční poradci.

6.6. Example: Překlenovací úvěr.

Podstata produktů jako je překlenovací úvěr je, že dluh nejprve splácíme splátkami velikosti x_1 při úrokové míře ξ_1 zatímco současně spoříme (formou spoření, pojištění,...) úložkami o velikosti x_2 při úrokové míře ξ_2 oboje po dobu N. Naspořené peníze použijeme k částečnému umoření dluhu a zbytek dluhu splácíme při úrokové míře ξ_3 splátkami x_3 po dobu K.

Pro kvantifikaci výhodnosti takového produktu se nám hodí vypočítat vhodný průměr z hodnot ξ_1, ξ_2 a ξ_3. Současná hodnota všech plateb, které máme provést je

$$PV = x_1 \sum_{t=0}^{N-1} (1+\xi_1)^t (1+\xi_2)^{-N} + x_2 \sum_{t=1}^{N} (1+\xi_2)^{-t} + x_3 \sum_{t=1}^{K} (1+\xi_3)^{-t} (1+\xi_2)^{-N} =$$

$$= \frac{(1+\xi_2)^{-N} x_1 \left((1+\xi_1)^N - 1\right)}{\xi_1} - \frac{x_2 \left(\left((1+\xi_2)^{-1}\right)^N - 1\right)}{\xi_2} - \frac{\left(\left((1+\xi_3)^{-1}\right)^K - 1\right)(1+\xi_2)^{-N} x_3}{\xi_3}$$

Takže nás zajímá průměr vzhledem k účelové funkci

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto PV$$

A ten je řešením rovnice

$$x_1 \sum_{t=0}^{N-1} (1+\xi_1)^t (1+\xi_2)^{-N} + x_2 \sum_{t=1}^{N} (1+\xi_2)^{-t} + x_3 \sum_{t=1}^{K} (1+\xi_3)^{-t} (1+\xi_2)^{-N} =$$

$$= x_1 \sum_{t=0}^{N-1} (1+\zeta)^t (1+\zeta)^{-N} + x_2 \sum_{t=1}^{N} (1+\zeta)^{-t} + x_3 \sum_{t=1}^{K} (1+\zeta)^{-t} (1+\zeta)^{-N}$$

Která, pokud není žádná úroková míra rovna nule, má tvar

$$\frac{(1+\xi_2)^{-N} x_1 \left((1+\xi_1)^N - 1\right)}{\xi_1} - \frac{x_2 \left(\left((1+\xi_2)^{-1}\right)^N - 1\right)}{\xi_2} - \frac{\left(\left((1+\xi_3)^{-1}\right)^K - 1\right)(1+\xi_2)^{-N} x_3}{\xi_3} =$$

$$= \frac{(1+\zeta)^{-N} x_1 \left((1+\zeta)^N - 1\right)}{\zeta} - \frac{x_2 \left(\left((1+\zeta)^{-1}\right)^N - 1\right)}{\zeta} - \frac{\left(\left((1+\zeta)^{-1}\right)^K - 1\right)(1+\zeta)^{-N} x_3}{\zeta}$$

Tuto rovnici nedovedeme obecně řešit algebraicky, takže nemůžeme napsat explicitní formuli pro hledaný průměr, ale pro každou volbu parametrů ji můžeme řešit numericky.

Zajímavé je to, že tento průměr je sice reflexivní (průměr z $(\zeta,\ \zeta,\ \zeta)$ je (ζ), ale *není rostoucí v první proměnné* (ξ_1), což je vlastnost, se kterou dosud žádná z výše zmiňovaných obecných koncepcí nepočítala!

Pro hodnoty, které odpovídají měsíčnímu splácení úvěru s roční úrokovou sazbou z meziúvěru 0.048, a s úrokovou sazbou z úvěru 0.045 p. a., za předpokladu, že doba splácení úvěru i meziúvěru jsou stejné a trvají 10 let a velikost splátek je v obou obdobích rovna 1 stejně jako velikost úložek spoření, které probíhá prvních 10 let, můžeme nakreslit graf závislosti průměrné úrokové míry na úrokové míře spoření a je to graf:

Literatura:

[1] Aczel, J. and Dhombres, J., Functional Equations in Several Variables, Cambridge University Press, 1989. ISBN-10: 0521352762 — ISBN-13: 9780521352765

[2] P.S. Bullen, D.S. Mitrinovic, P.M. Vasic, Means and Their Inequalities, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1988.