9. FOURIEROVY ŘADY

9.1. **Fourierova řada (FŘ).**

<u>*Komplexní harmonické kmity:*</u>

$$E = \{e_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\frac{2\pi k t}{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\omega_k t} = \frac{1}{\sqrt{T}}(\cos\omega_k t + i \sin\omega_k t),$$

kde pro $k \neq 0$ značí

$f_k = \frac{|k|}{T}$ ... frekvenci $|k|$-ho harmonického kmitu s periodou $\frac{T}{|k|}$,
$\omega_k = 2\pi f_k$ ... jeho úhlovou rychlost.

<u>*E je ortonormální systém v $L_2([0,T])$:*</u>

$$\langle e_j, e_k\rangle = \int_0^T e_j(t)\overline{e_k(t)}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi(j-k)t}{T}}\,dt = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad j = k \\ 0 & \text{pro} \quad j \neq k \end{cases}$$

<u>*E je dokonce úplný (báze) v $L_2([0,T])$(bez důkazu):*</u>

$$x(t) \in L_2([0,T]) \text{ libovolná a } T\text{-periodická} \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e_k(t),$$

kde řada konverguje (bez ohledu na pořadí) dle normy $\|\,.\,\|_2$ v prostoru $L_2([0,T])$ a souřadnice x_k jsou jednoznačně určeny vztahem

$$\underline{\langle x, e_k\rangle} = \langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j e_j, e_k\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{\delta_{j,k}} = \underline{x_k}.$$

<u>*Komplexní tvar rozvoje do Fourierovy řady:*</u>

$$\underline{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle x, e_k\rangle \frac{1}{\sqrt{T}}}_{c_k(x)} e^{i\omega_k t} = \underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) e^{i\omega_k t}},$$

kde (9.1)

$$\underline{c_k := c_k(x)} = \frac{1}{\sqrt{T}}\langle x, e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T x(t)\frac{1}{\sqrt{T}} e^{-i\omega_k t}\,dt = \underline{\frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-i\omega_k t}\,dt}.$$

c_k ... k-tý **komplexní Fourierův koeficient funkce** x,
c_0 ... **střední hodnota (stejnosměrná složka) funkce** x,
$\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ... **komplexní fourierovské spektrum funkce** x,
$x_k(t)$:= $c_k e^{i\omega_k t} + c_{-k} e^{-i\omega_k t}, \ k \geq 1$
... **k-tá harmonická komponenta funkce** x **o frekvenci** f_k.

Tvrzení 9.1 (Dirichletova věta). *Jestliže T-periodická funkce $x(t)$ má konečnou variaci na $[0,T]$, pak její FŘ konverguje bodově k $x(t)$ v každém bodě t, kde je $x(t)$ spojitá a k $\frac{1}{2}(\lim_{t\to0^+} x(t) + \lim_{t\to0^-} x(t))$ v každém bodě nespojitosti (u funkce s konečnou variací je to vždy pouze konečný skok).*

Důsledek 9.2 (viz [DoNo,Věta 8.4]).
Je-li T-periodická funkce $x(t)$ po částech spojitá a po částech monotonní na $[0,T]$, pak má konečnou variaci a její FŘ konverguje bodově k $x(t)$ v každém bodě t, kde je $x(t)$ spojitá a k $\frac{1}{2}(\lim_{t\to0^+} x(t) + \lim_{t\to0^-} x(t))$ v každém bodě nespojitosti (u funkce po částech spojité je to vždy pouze konečný skok).

Je-li $x(t)$ reálná funkce, lze (9.1) upravit na další dva ekvivalentní tvary:
Zřejmě $c_{-k} = \overline{c_k}$. Označíme-li

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k); \ a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

pak $c_0 = \frac{a_0}{2} \in \mathbb{R}, \ b_0 = 0$ a dostáváme

Goniometrický tvar Fourierovy řady:

$$\begin{aligned}\underline{x(t)} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{i\omega_k t} + \underbrace{c_{-k}e^{-i\omega_k t}}_{\overline{c_k e^{i\omega_k t}}}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}(c_k e^{i\omega_k t}) = \\ &= \underline{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t)},\end{aligned}$$

kde (9.2)

$$\begin{aligned}\underline{a_k} &= 2\mathrm{Re}(c_k) &= \underline{\tfrac{2}{T}\textstyle\int_0^T x(t)\cos\omega_k t\, dt}, \\ \underline{b_k} &= -2\mathrm{Im}(c_k) &= \underline{\tfrac{2}{T}\textstyle\int_0^T x(t)\sin\omega_k t\, dt}.\end{aligned}$$

Položíme-li $a_k = A_k\cos\varphi_k$ a $b_k = A_k\sin\varphi_k$, dostaneme

Amplitudově-fázový tvar Fourierovy řady:

$$\underline{x(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\cos\varphi_k\cos\omega_k t + \sin\varphi_k\sin\omega_k t) = \underline{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{A_k\cos(\omega_k t - \varphi_k)}_{x_k(t)}}.$$

kde (9.3)

$$\begin{aligned}A_k &= 2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \\ \varphi_k &= \arctan\frac{b_k}{a_k}.\end{aligned}$$

A_k	...	**amplituda k-té harmonické složky funkce** x,
φ_k	...	**fázový posuv k-té harmonické složky funkce** x **(**$-\pi < \varphi_k \le \pi$**)**,
$c_0 = \frac{a_0}{2}$	...	**střední hodnota (stejnosměrná složka) funkce** x,
$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$	...	**amplitudové spektrum funkce** x,
$\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$	...	**fázové spektrum funkce** x.

9.2. **Parsevalova identita (PI).**

Nechť $x \in L_2([0,T])$ (tj. s konečnou energií na intervalu $[0,T]$) je T-periodická, potom

$$\begin{aligned}\|x\|_2^2 &= \int_0^T |x(t)|^2\, dt = \langle x, x\rangle = \langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j\sqrt{T}\underbrace{\frac{e^{i\omega_j t}}{\sqrt{T}}}_{e_j(t)}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\sqrt{T}\underbrace{\frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{T}}}_{e_k(t)}\rangle \\ &= T\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_j\overline{c_k}\underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{\delta_{j,k}} = T\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2.\end{aligned}$$

Odtud pak dostáváme:

Komplexní tvar Parsevalovy identity:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\, dt}_{\text{střední výkon na } [0,T]} < \infty \Rightarrow \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_2. \qquad (9.4)$$

Speciálně:

$\lvert c_0\rvert^2$	...	**střední výkon stejnosměrné složky**,
$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert x_k(t)\rvert^2\, dt = \lvert c_{-k}\rvert^2 + \lvert c_k\rvert^2$	...	**střední výkon k-té harmonické složky**.

Amplitudový tvar Parsevalovy identity (x reálná):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(|c_{-k}|^2 + |c_k|^2)}_{2|c_k|^2 = A_k^2/2} = \underline{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2} = \underline{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\, dt}. \tag{9.5}$$

Speciálně:

$\frac{a_0^2}{4}$ ... **střední výkon stejnosměrné složky**,

$\frac{A_k^2}{2}$ ... **střední výkon k-té harmonické složky**,

$$\{2|c_k|^2\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\frac{A_k^2}{2}\}_{k=1}^{\infty} \tag{9.6}$$

... **výkonová spektrální hustota**,

$$\{2T|c_k|^2\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\frac{TA_k^2}{2}\}_{k=1}^{\infty}$$

... **energetická spektrální hustota**.

9.3. **Diskretizace Fourierovy řady.**

Vypočteme hodnoty rozvoje $x(t)$ do její komplexní FŘ (9.1) pouze na rovnoměrné diskrétní síti N subintervalů: $T = N\Delta t,\ x_n = x(n\Delta t), n \in \mathbb{Z}$.

Obdržíme

$$\underline{x_n} \overset{(9.1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{N\Delta t} n\Delta t} = \sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \overbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k+mN}\right)}^{\widehat{c}_k} e^{i\frac{2\pi(k+mN)n}{N}} = \underline{\sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}}}. \tag{9.7}$$

kde $[\cdot]$ značí celou část hodnoty.

Platí

$\widehat{c}_k \approx c_k$, neboť $|c_k| \to 0$ pro $k \to \pm\infty$,
$\widehat{c}_k = c_k$, pokud $c_k = 0$ pro $|k| \geq \frac{N}{2}$ (FŘ je konečná: $f_{max} \leq \frac{N}{2}\frac{1}{T}$ udává konečný frekvenční obsah $x(t)$),
$\{\widehat{c}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je N-periodická posloupnost ($\widehat{c}_k = \widehat{c}_{k+mN},\ m \in \mathbb{Z}$).

Po úpravě:

$$\underline{x_n} = \sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{-1} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}} = \underline{\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}}}, \tag{9.8}$$

kde první ze sum jsme upravili záměnou sčítacího indexu $r = k + N$ na tvar:

$$\sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{-1} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{r=-\left[\frac{N-1}{2}\right]+N}^{N-1} \widehat{c}_{r-N} e^{i\frac{2\pi(r-N)n}{N}} = \sum_{r=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-1} \widehat{c}_r e^{i\frac{2\pi rn}{N}}$$

s využitím vztahů

$-\left[\frac{N-1}{2}\right] + N = \left[\frac{N}{2}\right] + 1$ a $\widehat{c}_r = \widehat{c}_{r-N}$ pro $r = \left[\frac{N}{2}\right] + 1, \ldots, N-1$ (N-periodicita).

Označíme-li $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})^T$ vzorky $x(t)$ na její jedné periodě a $\widehat{\boldsymbol{c}} = (\widehat{c}_0, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_{N-1})^T$ odhady Fourierových koeficientů, pak (9.8) určuje tzv. **operátor diskrétní Fourierovy transformace ($\boldsymbol{x} = \mathrm{DFT}_N^+(\widehat{\boldsymbol{c}})$)** dle následující definice.

Definice 9.1 (Diskrétní Fourierova transformace (DFT)).
$\mathrm{DFT}_N^{\pm} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ je lineární operátor $\boldsymbol{X} = \mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{x}$ určený maticí $N \times N$:
$\mathbb{W}_N^{\pm} = \left[W_N^{kn}\right]_{0\le k,n\le N-1}$, kde $W_N = e^{\pm i\frac{2\pi}{N}} = \cos\frac{2\pi}{N} \pm i\sin\frac{2\pi}{N}$ je N-tá primitivní odmocnina z 1, tj. $W_N^N = 1$, ale $W_N^k \neq 1$ pro $k = 1, \dots, N-1$. Tedy

$$\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})^T, \quad \text{kde } X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm i\frac{2\pi kn}{N}} x_n \text{ pro } k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Zřejmě $\mathbb{W}_N^{\pm}$ je symetrická matice a $(\mathbb{W}_N^{\pm})^* = \mathbb{W}_N^{\mp}$.

Věta 9.2 (Věta o inverzi).
Platí $\mathbb{W}_N^{\pm}\mathbb{W}_N^{\mp} = \mathbb{W}_N^{\pm}(\mathbb{W}_N^{\pm})^* = NI_N$ *a tedy* $(\mathbb{W}_N^{\pm})^{-1} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}$ *a* $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{W}_N^{\pm}$ *je unitární matice.*

Důkaz. Označme $A := [a_{r,s}] = \mathbb{W}_N^{\pm}\mathbb{W}_N^{\mp}$, pak

$$a_{r,s} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{rn} W_N^{-ns} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(r-s)} = \sum_{n=0}^{N-1} q^n, \; q = W_N^{r-s}.$$

Odtud

$$a_{r,s} = \begin{cases} N & \text{pro} \quad r = s \\ \frac{q^N-1}{q-1} = 0 & \text{pro} \quad r \neq s \end{cases},$$

neboť $q^N = W_N^{N(r-s)} = 1$ a $q \neq 1$ pro $r \neq s$ v důsledku $0 < |r-s| \le N-1$. □

<u>*Poznámka*</u> 9.3. V systému MATLAB jsou operátory $\mathrm{DFT}_N^{\pm}$ realizovány pomocí algoritmu tzv. **rychlé Fourierovy transformace** implementovaných v procedurách `fft` a `ifft` takto:

$$\underline{\boldsymbol{X}} = \mathbb{W}_N^{-}\boldsymbol{x} = \mathrm{DFT}_N^{-}(\boldsymbol{x}) = \underline{\texttt{fft}(\boldsymbol{x})}$$

a

$$\underline{\boldsymbol{x}} = (\mathbb{W}_N^{-})^{-1}\boldsymbol{X} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{+}\boldsymbol{X} = \frac{1}{N}\mathrm{DFT}_N^{+}(\boldsymbol{X}) = \underline{\texttt{ifft}(\boldsymbol{X})}.$$

Důsledek 9.4. *Podle (9.8), věty 9.2 a poznámky 9.3 platí*

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{W}_N^{+}\widehat{\boldsymbol{c}} = \mathrm{DFT}_N^{+}(\widehat{\boldsymbol{c}}) = \underline{N\texttt{ifft}(\widehat{\boldsymbol{c}})},$$

$$\underline{\widehat{\boldsymbol{c}}} = (\mathbb{W}_N^{+})^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{-}\boldsymbol{x} = \underline{\frac{1}{N}\mathrm{DFT}_N^{-}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\texttt{fft}(\boldsymbol{x})}.$$