

Giniho formulace indexních čísel

Rozšířením techniky řetězení je postup, který pod názvem **síťová metoda** uplatnil **italský matematik a ekonom Carrado Gini**¹. Opět se uvažuje **rozčlenění období mezi počátečním - „0“-tým - a koncovým - „m“-tým - obdobími na celkem m úseků**, v nichž jsou dostupné potřebné statistické údaje.

C. Gini formuloval (následně po něm nazvaná) indexní čísla následujících tvarů:

tzv. **GINIho indexní číslo 1. typu**

$$(G1) \quad P_{0m}^{G(1)} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^N p_i(m) \cdot q_i(j)}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(j)}} ,$$

tzv. **GINIho indexní číslo 2. typu**²

$$(G2) \quad P_{0m}^{G(2)} = \sqrt{\prod_{j=1}^m p_j^* \cdot P_{jm}^*} ,$$

přičemž ve druhém případě může symbol $P_{0m}^{G(2)}$ představovat libovolné jiné, z hlediska vlastností uspokojivé výchozí indexní číslo (definice $P_{0m}^{G(2)}$ tedy není jednoznačná).

Giniho konstrukty (G1), (G2) lze použít i pro data, která nemusí tvořit časové posloupnosti cen a kvantit. Určitou jejich slabinou je však okolnost, že při aktualizaci je nutný celkový přepočítání indexního čísla v případě, kdy získáme statistická data za nová období (nebo individua či jiné statistické jednotky). Tato nevýhoda však nemusí být v praxi až tak citelná, neboť konstrukty byly autorem původně navrženy hlavně za účelem provádění prostorových (geografických) cenových srovnání.

Předností obou indexních čísel (G1), (G2) je automatické splnění axiomu záměny období (F3) a dále skutečnost, že při velkém **m** (počtu dělení) se takto vytvořená veličina hodnotou zpravidla málo liší od hodnoty vzaté přímým výpočtem (bez dělení intervalu mezi „0“ a „m“).

poznámka ke (G1):

Všimněme si, že v případě **(G1)** (jde-li o cenové indexní číslo) stačí znát cenové vektory jen v počátečním "0" a koncovém "m" období, zatímco údaje o spotřebě komodit, které využíváme pro stanovení vah při geometrickém průměrování, je potřebné sledovat též ve všech meziobdobích $1, 2, \dots, m-1$.

Jak je bezprostředně vidět z definičního vztahu **(G1)**, **volbou $m = 2$ dostáváme pro $P_{01}^{G(1)}$ přímo Fisherův cenový index**, zatímco pro $m = 1$ v případě $P_{02}^{G(2)}$ obdržíme obdobně prostý geometrický průměr obou částí P_{01} a P_{02} generujícího cenového indexního čísla.

¹ **Gini, C.:** „On the Circular Test of Index Numbers“. **Metron 1931.**

² **Ragnar Frisch nazývá tyto konstrukty Gini' s aggregate crossing, resp. Gini's two-point crossing.**

Není obtížné ukázat, že **Giniho indexní čísla** **vyhovují Fisherovým postulátům (F1), (F3), (F5), (F6), (F7), (F8)** (v případě P_{0m}^G je ovšem musí splňovat generující indexní číslo). Axiom záměny faktorů **(F2)** není splněn a axiom okružnosti **(F4)** platí jen za velmi speciálních podmínek (nikoliv obecně).

Stuvelova indexní čísla

Postup navržený v polovině 50. let 20. století nizozemský statistik **Gerhard Stuvel** se vrací ke klasickým přístupům z počátku století. Vyložíme jeho základní myšlenku³:

1) Hledá se dvojice indexních čísel (cenové P_{01}^{St} , kvantové Q_{01}^{St}) přímo splňující axiom záměny faktorů (F2), tj. aby platilo

$$(S1) \quad P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^{St} \cdot q_i^{St}}{\sum_{i=1}^N p_i^L \cdot q_i^L} .$$

poznámka 1

Ke zkrácení zápisu užijeme úspornější označení výrazu na pravé straně jako $\frac{M^{St}}{M^L}$,

přičemž peněžní výdaje $M^{St} = \sum_{i=1}^N p_i^{St} \cdot q_i^{St}$, resp. $M^L = \sum_{i=1}^N p_i^L \cdot q_i^L$, vyjadřují náklady na pořízení úplné skupiny komodit v běžném resp. základním období.⁴

2) Druhou podmínkou, kterou má hledaná dvojice splňovat, je **diferenční relace**, která poměruje rozdíly mezi takto konstruovanými indexními čísly P_{01}^{St} , Q_{01}^{St} a příslušnými Laspeyresovými indexními čísly:

$$(S2) \quad Q_{01}^{St} - Q_{01}^L \cong P_{01}^{St} - P_{01}^L .$$

Ve vztahu (S2) uvažoval autor dva možné případy ve specifikaci relace “ \cong ”:

(S2A): relace (S2) platí přesně, tj. “ \cong ” vezmeme jako rovnost,

(S2B): relace (S2) platí s určitou, přesně specifikovanou odchylkou.

poznámka 2

Uvedená úvaha je vcelku oprávněná, vezmeme-li v úvahu poznatky statistické praxe, kde zvláště pro krátká časová období ukazuje, že rozdíly $P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^L$, ale i $P_{01}^P \cdot Q_{01}^P$ od hodnoty M^{St} / M^L nejsou nijak velké. Jak víme, přesně tento požadavek nesplňuje **Laspeyresovo ani Paascheho indexní číslo**, avšak lze snadno ověřit, že tato indexní čísla jej „splňují“ křížovým způsobem tj.

$$P_{01}^L Q_{01}^P = P_{01}^P Q_{01}^L = \frac{M^{St}}{M^L} .$$

Postup zaslouží komentář ještě z tohoto důvodu:

V okruhu původních 8 Fisherových testů není známo, že by nějaká podskupina testů vedla deduktivně jednoznačně ke konstrukci určitého typu indexu. Stuvelova cesta, resp. formulace podmínky (S2) spolu s přijetím podmínky (S1) k takovému jednoznačnému určení vede (stačí právě tyto dvě podmínky, abychom konkrétní indexní konstrukt, jak uvidíme, obdrželi).

³ Stuvel, G. : A New Index Number Formula. *Econometrica* 1957, Vol. 25.

Původní Stuevelův návrh

Z povahy úlohy je zřejmé, že se hledá řešení dvou rovnic (pro neznámé P_{01}^{St} a Q_{01}^{St})

$$(S1) \quad P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{M}{M},$$

$$(S2A) \quad Q_{01}^{St} - P_{01}^L = P_{01}^{St} - P_{01}^L.$$

Za daných předpokladů bude předmětem Stuevelovy úlohy nalezení řešení dvou rovnic (jedné lineární, druhé kvadratické) s neznámými P_{01}^{St} a Q_{01}^{St} , které jsou vyjádřeny pomocí známých ostatních veličin, tj. M, M, P_{01}^L, Q_{01}^L .

K nalezení řešení užijeme např. substituci z (S2A) $Q_{01}^{St} = P_{01}^{St} - P_{01}^L + P_{01}^L$, která po dosazení do (S1) dává kvadratickou rovnici s neznámou P_{01}^{St} :

$$\left(P_{01}^{St} - P_{01}^L + P_{01}^L \right) \cdot P_{01}^{St} = \frac{M}{M}.$$

Následně vypočteme symetrický vztah pro Q_{01}^{St} .

Řešení získané standardním postupem, tj. nalezením kořenů kvadratické rovnice, má tvar:

$$(St1) \quad Q_{01}^{St} = \frac{P_{01}^L - P_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_{01}^L - P_{01}^L}{2} \right)^2 + \frac{M}{M}},$$

$$(St2) \quad P_{01}^{St} = \frac{P_{01}^L - P_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_{01}^L - P_{01}^L}{2} \right)^2 + \frac{M}{M}}.$$

poznámka 3 Vzhledem k tomu, že pro přijatelnou ekonomickou interpretaci mají smysl jen kladné hodnoty indexních čísel, je nutno se omezit jen na kladné kořeny kvadratické rovnice. (Výrazy v odmocninách (St1) a (St2) jsou větší než výrazy před odmocninami.)

Výrazy (St1) a (St2) můžeme zapsat formou, která bude obsahovat přímo vektory cen a množství $p(0), p(1), q(0), q(1)$ - obě indexní čísla obsahují plnou čtveřici. Dostaneme

$$Q_{01}^{St} = \frac{\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0)}{2 \sum p_i(0)q_i(0)} + \sqrt{\frac{\left(\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0) \right)^2}{4 \left(\sum p_i(0)q_i(0) \right)^2} + \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)}}$$

$$= \frac{\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0) + \sqrt{\left(\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0) \right)^2 + 4 \left(\sum p_i(1)q_i(1) \right) \left(\sum p_i(0)q_i(0) \right)}}{2 \sum p_i(0)q_i(0)}$$

Podobně bychom získali

$$P_{01}^{St} = \frac{\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1) + \sqrt{\left(\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1) \right)^2 + 4 \left(\sum p_i(1)q_i(1) \right) \left(\sum p_i(0)q_i(0) \right)}}{2 \sum p_i(0)q_i(0)}$$

Modifikovaný Stuelův návrh

Analogicky předchozímu se hledá řešení dvou vztahů (pro obecně jiné neznámé $P_{01}^{St^*}$, $Q_{01}^{St^*}$)

$$(S1) \quad P_{01}^{St^*} \cdot Q_{01}^{St^*} = \frac{M}{M} \left(\frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{M} + 1 \right),$$

$$(S2B) \quad Q_{01}^{St^*} - Q_{01}^L = \frac{P_{01}^{St^*} - P_{01}^L}{M} + 1,$$

kde odchylka Δ má přesně specifikovaný tvar (interpretovatelný jako „*míra nesplnění*“ **axiomu (F2) Laspeyresovými indexními čísly**):

$$(S2B) \quad \Delta = \frac{P_{01}^L \cdot Q_{01}^L - M}{M}.$$

Obdobným způsobem jako dříve řešíme soustavu dvou rovnic, přičemž k řešení použijeme opět substituci $Q_{01}^{St^*} = \frac{P_{01}^{St^*} - P_{01}^L}{M} + Q_{01}^L + 1$. Po dosazení $Q_{01}^{St^*}$ z (S2B) do (S1) máme

$$\left(\frac{P_{01}^{St^*}}{M} \right) \cdot \left(\frac{P_{01}^{St^*} - P_{01}^L}{M} + Q_{01}^L + 1 \right) = \frac{M}{M} \left(\frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{M} + 1 \right)$$

a stejně jako dříve odvodíme jinou dvojici indexních čísel, která mají tvar:

$$(St3) \quad P_{01}^{St^*} = \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L + \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{M} + \frac{M}{M}}{2} + \left(\frac{P_{01}^L - Q_{01}^L + \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{M} + \frac{M}{M}}{2} \right) + \frac{M}{M}$$

$$(St4) \quad Q_{01}^{St^*} = \frac{Q_{01}^L + \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{M} - \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{M} - \frac{M}{M}}{2} + \left(\frac{Q_{01}^L + \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{M} - \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{M} - \frac{M}{M}}{2} \right) + \frac{M}{M}$$

Obě nalezená indexní čísla mohou být rovněž použita k vystižení globální změny cenového a podobně i objemového komoditního indexu. Opět jsou přijatelné pouze kladné kořeny příslušné kvadratické rovnice.

poznámka 4 Jak je patrné, bylo by možné vyvodit i další indexní čísla, pokud bychom v podmínkách (A) resp. (B1-B2) uvažovali vztahy k jiným než k **Laspeyresovým indexním** číslům (např. k **Paascheho** či k **Edgeworthovým**).

Ověření Fisherových axiomů u Stuevelových čísel

Na závěr ještě vyšetříme, v jaké míře vyhovuje prvá **dvojice Stuevelových indexních čísel (S1), (S2)** testům **Irvinga Fishera**:

Test identity **(F1)** je zřejmě splněn, neboť pro obě **Laspeyresova indexní čísla** platí, že $P_{00}^L = 1$, $Q_{00}^L = 1$ a výrazy pro P_{00}^{St} , Q_{00}^{St} se tedy redukují na odmocninu z podílu $\frac{M(1)}{M(0)}$, která je při ztotožnění obou období rovna 1.

Platnost **(F2)** je zřejmá, neboť jde přímo o definiční podmínku **(S1)**, z níž je dvojice hledaných indexů odvozována.

Axiom **(F3)** je u dvojice **Stuevelových indexních čísel (St1), (St2)** splněn. Zmiňuje to mj. sám autor. Naše **ověření** je následující: Vyžaduje se platnost vztahu

$$P_{01}^{St} P_{10}^{St} = \left[\frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2} \right)^2 + \frac{M(0)}{M(1)}} \right] \cdot \left[\frac{P_{10}^L - Q_{10}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{10}^L - P_{10}^L}{2} \right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} \right] = 1$$

Pro přehlednost zápisu označíme čtveřici skalárních součinů přítomných výše jako

$$A = \sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(0), \quad B = \sum_{i=1}^N p_i(1)q_i(0), \quad C = \sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1), \quad D = \sum_{i=1}^N p_i(1)q_i(1)$$

V této zkrácené symbolice můžeme psát

$$P_{01}^L = \frac{B}{A}, \quad Q_{01}^L = \frac{C}{A}, \quad P_{10}^L = \frac{C}{D}, \quad Q_{10}^L = \frac{B}{D}, \quad \frac{M(1)}{M(0)} = \frac{D}{A}, \quad \frac{M(0)}{M(1)} = \frac{A}{D}$$

Potom
$$P_{01}^{St} P_{10}^{St} = \left[\frac{\frac{B}{A} - \frac{C}{A}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{C}{A} - \frac{B}{A}}{2} \right)^2 + \frac{A}{D}} \right] \cdot \left[\frac{\frac{C}{D} - \frac{B}{D}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{B}{D} - \frac{C}{D}}{2} \right)^2 + \frac{D}{A}} \right]$$

Po úpravách
$$P_{01}^{St} P_{10}^{St} = \left[\frac{B-C}{2A} + \sqrt{\left(\frac{B-C}{2A} \right)^2 + \frac{D}{A}} \right] \cdot \left[\frac{C-B}{2D} + \sqrt{\left(\frac{C-B}{2D} \right)^2 + \frac{A}{D}} \right]$$

$$P_{01}^{St} P_{10}^{St} = \frac{1}{2A} \left(B-C + \sqrt{(B-C)^2 + 4AD} \right) \cdot \frac{1}{2D} \left(C-B + \sqrt{(C-B)^2 + 4AD} \right)$$

$$P_{01}^{St} P_{10}^{St} = \frac{1}{4AD} \left((B-C)(C-B) + (B-C)\sqrt{(B-C)^2 + 4AD} + (C-B)\sqrt{(C-B)^2 + 4AD} + \sqrt{(B-C)^2 + 4AD} \cdot \sqrt{(C-B)^2 + 4AD} \right)$$

$$P_{01}^{St} P_{10}^{St} = \frac{1}{4AD} \left(-(B-C)^2 + (C-B)\sqrt{(B-C)^2 + 4AD} + (B-C)\sqrt{(C-B)^2 + 4AD} + \sqrt{(B-C)^2 + 4AD} \cdot \sqrt{(C-B)^2 + 4AD} \right)$$

Střední dva členy v závorce se navzájem vyruší, čtvrtý je odmocnina z kvadrátu, máme tedy

$$P_{01}^{St} P_{10}^{St} = \frac{1}{4AD} \left(-(B-C)^2 + \sqrt{(B-C)^2 + 4AD} \cdot \sqrt{(C-B)^2 + 4AD} \right) = \frac{4AD}{4AD} = 1 \quad \square$$

Okružnost (F4) není Stuevelovými indexními čísly (St1), (St2) splněna, což lze ověřit přímým vyšetřením příslušné podmínky.

Naproti tomu axiomy určenosti (F5) a souměřitelnosti (F6) platí, neboť je splňují Laspeyresova indexní čísla v jejich definici, přičemž též výraz v odmocnině (St1) je vždy definován a není identicky nulový (dokonce i kdyby nastala náhodná shoda $P_{01}^{St} = Q_{01}^{St}$). Souměřitelnosti pak vyhovují všechny výrazy vystupující v definici (St1).

Pokud jde o axiom proporcionality (F7), zde zřejmě platí $P_{01}^{St} = c$, resp. $Q_{01}^{St} = d$ pro konstantu c splňující $p(1) = c \cdot p(0)$, resp. konstantu d splňující $q(1) = d \cdot q(0)$.

Platnost (F8) je zřejmá.

(F9) monotónnost: Znamená to ověřit platnost implikace: Jestliže platí $p_i \leq p_i^*$ pro všechna i , potom vždy platí $P_{01}^L \leq P_{01}^{*L}$.

(St2)
$$P_{01}^{St} = \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}$$

Vyšetříme tedy chování jednotlivých výrazů vystupujících v (St2): Protože změna cen běžného období se nijak nedotkne Laspeyresova množstevního indexu: $Q_{01}^L = Q_{01}^{*L}$, vyšetříme chování P_{01}^L a podílu $M(1)/M(0)$. V prvním případě za předpokladu premisy implikace platí $P_{01}^L \leq P_{01}^{*L}$, ve druhém podobně $\frac{M(1)}{M(0)} \leq \frac{M^*(1)}{M(0)}$, protože jmenovatele obou výrazů nedoznají žádných změn a v čitatelích ve skalárních součinech vystupují jen nezáporné veličiny. Zbývá tak vyšetřit chování členu pod odmocninou:

$$\left(\frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1) - \sum_{i=1}^N p_i(1)q_i(0)}{2 \sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(0)}\right)^2, \text{ jehož čítenel bude změnou dotčen:}$$

$$\left(\frac{P_{01}^{*L} - Q_{01}^L}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1) - \sum_{i=1}^N p_i^*(1)q_i(0)}{2 \sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(0)}\right)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1) - p_i(1)q_i(0)\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1) - p_i^*(1)q_i(0)\right)^2$$

Zbývá tedy vyšetřit, zda platí

$$\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1)^2 - 2p_i(0)q_i(1)p_i(1)q_i(0) + p_i(1)q_i(0)^2 \leq \sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1)^2 - 2p_i(0)q_i(1)p_i^*(1)q_i(0) + p_i^*(1)q_i(0)^2$$

Protože první člen je shodný na obou stranách a třetí na pravé straně je nejméně roven třetímu členu nalevo, zbývá vyšetřit, zda, resp. za jakých podmínek platí

$$\sum_{i=1}^N -2 p_i(0) q_i(1) p_i(1) q_i(0) \leq \sum_{i=1}^N -2 p_i(0) q_i(1) p_i^*(1) q_i(0) \text{ tj. } -2 \sum_{i=1}^N r_i p_i(1) \leq -2 \sum_{i=1}^N r_i p_i^*(1).$$

To ale neplatí nikdy, protože při nezáporných r_i a $p_i \leq p_i^*$ bude pravá strana více záporná než levá. **Není tedy zatím jasné, šetření bude pokračovat.**

(F10) Ověření **testu střední hodnoty** $\text{Min}_{i=1, \dots, N} \frac{p_i}{p_i} \leq p_{01} \leq \text{Max}_{i=1, \dots, N} \frac{p_i}{p_i}$ bude obtížné:

Vyjádříme nejprve některé členy v **(St2)** následovně:

$$\text{podíl } M(1)/M(0) : \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) q_i(0)} = \sum_{i=1}^N w_i \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)}, \text{ kde } w_i = \frac{p_i(0) q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) q_i(0)}$$

$$\text{rozdíl } \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2} = \frac{\sum_{i=1}^N i(1) q_i(0) - \sum_{i=1}^N i(0) q_i(1)}{2 \sum_{i=1}^N i(0) q_i(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N i \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N i \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N i \cdot \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - \frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right)$$

$$\left(\frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2} \right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)} = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \cdot \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - \frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right) \right)^2 + \sum_{i=1}^N w_i \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)} =$$

Není tedy zatím jasné, šetření bude pokračovat.

(St2)

$$P_{01}^{St} = \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2} \right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}.$$

(F11) test invariance vůči změnám v měřítkách splněn není.

Vyšetříme postupně, jak odolné jsou vůči uvažovaným změnám $p^*(0) = \lambda \cdot p(0)$ a $p^*(1) = \lambda \cdot p(1)$, $q^*(0) = \lambda \cdot q(0)$ a $q^*(1) = \lambda \cdot q(1)$ jednotlivé fragmenty vystupující

$$\text{v indexním čísle (St1) } Q_{01}^{St} = \frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2} \right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}},$$

$$\tilde{Q}_{01}^L = \frac{\sum_{i=1}^N i(0) \tilde{q}_i(1)}{\sum_{i=1}^N i(0) \tilde{q}_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i(0) c q_i(1)}{\sum_{i=1}^N v_i(0) b q_i(0)} = \frac{1}{b} \cdot Q_{01}^L \quad \tilde{P}_{01}^L = \frac{\sum_{i=1}^N i(1) \tilde{q}_i(0)}{\sum_{i=1}^N i(1) \tilde{q}_i(1)} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i(0) b q_i(1)}{\sum_{i=1}^N v_i(0) b q_i(0)} = \frac{1}{b} Q_{01}^L$$

$$\frac{\tilde{M}(1)}{\tilde{M}(0)} = \frac{\sum_{i=1}^N i(1) \tilde{q}_i(1)}{\sum_{i=1}^N i(0) \tilde{q}_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i(1) c q_i(1)}{\sum_{i=1}^N v_i(0) b q_i(0)} = \frac{1}{b} \cdot \frac{M(1)}{M(0)}$$

Dohromady tedy máme

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{01}^L - \tilde{\gamma}_{01}^L &= \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) \tilde{q}_i(1) - \sum_{i=1}^N p_i(1) \tilde{q}_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \tilde{q}_i(0) - \sum_{i=1}^N p_i(1) \tilde{q}_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) c q_i(1) - \sum_{i=1}^N p_i(1) b q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) b q_i(0) - \sum_{i=1}^N p_i(1) b q_i(0)} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) c q_i(1) - \sum_{i=1}^N p_i(1) b q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) b q_i(0) - \sum_{i=1}^N p_i(1) b q_i(0)} = \frac{c \cdot \sum_{i=1}^N p_i(0) q_i(1) - \sum_{i=1}^N p_i(1) q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) b q_i(0) - \sum_{i=1}^N p_i(1) b q_i(0)} = \frac{c}{b} \cdot Q_{01}^L - \gamma_{01}^L \end{aligned}$$

$$\tilde{Q}_{01}^{St} = \frac{\tilde{Q}_{01}^L - \tilde{\gamma}_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{Q}_{01}^L - \tilde{\gamma}_{01}^L}{2} \right)^2 + \frac{\tilde{M}}{\tilde{M}}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{Q_{01}^L - \gamma_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{b} \cdot \frac{Q_{01}^L - \gamma_{01}^L}{2} \right)^2 + \frac{\tilde{M}}{\tilde{M}}}$$

$$\tilde{Q}_{01}^{St} = \frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c \cdot Q_{01}^L - P_{01}^L}{2} \right)^2 + \frac{\tilde{M}}{b \cdot \tilde{M}}}$$

, z čehož plyne, že pro

obecný případ požadovanou shodu $P_{01}^L = \tilde{\gamma}_{01}^L$ nedostaneme. **Test (F11) tedy neplatí.**

Test (F12) je splněn, protože při neomezeně ubývajícím poslední (jinak ale libovolné) komoditě jsou limitními hodnotami všech fragmentů, z nichž sestává **(St2)**, výrazy analogické výchozím, pouze spočtené z $N - 1$ zbývajících komodit.