4.1 Výdajová funkce a její vlastnosti

Definice 13 Máme dánu spojitou užitkovou funkci $u(x)$, cenový vektor p a mějme dále určenu konkrétní velikost užitku u^0 (skalární, v ordinálním pojetí). Potom funkci

(4.1) $$E(u^0, p) = \mathrm{Min}\{px;\ u(x) \geq u^0\}$$

nazveme **výdajovou funkcí [expenditure function]** ve vztahu k užitkové funkci $u(x)$. **Argumenty výdajové funkce je cenový vektor a velikost užitku požadovaná spotřebitelem. Výdajová funkce představuje minimální možné náklady** (spojené s nákupem nanejvýš n statků při exogenně stanovených cenách p) **vynaložené na komoditní kombinaci, která poskytuje užitek přinejmenším o velikosti u^0.** Spotřebitel přitom nemusí nakupovat všechny komodity a s ohledem na kriteriální funkci v (3.11) dá přednost těm, u kterých dosažení užitku na žádané výši docílí nejlevněji.

Definice 13A Výdajová funkce $E(u,p)$ příslušná užitkové funkci $u(x)$ s přijatými vlastnostmi (U1) - (U5) má tyto vlastnosti :

(V1) $E(u,p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, přičemž platí $E(u^0,p) > 0$ **pro libovolnou úroveň užitku** $u^0 > 0$.

(V2) $E(u,p^0)$ je **rostoucí v** u **pro jakýkoliv cenový vektor** $p^0 > 0$. $E(u^0,p)$ je **neklesající v** p **a rostoucí aspoň v jedné z cen** p_i **pro libovolnou úroveň užitku** u^0.

(V3) $E(u,p^0)$ je **spojitá v** u **pro jakýkoliv cenový vektor** $p^0 > 0$. $E(u,p^0)$ je **spojitá v** p **pro libovolnou úroveň užitku** u^0.

(V4) $E(u^0,p)$ je **lineárně homogenní v** p **pro libovolnou úroveň užitku** u^0. Znamená to, že platí $E(u^0,\lambda p) = \lambda.E(u^0,p)$ **pro libovolné** $\lambda \in (0,+\infty)$.

(V5) $E(u^0,p)$ je **konkávní v cenách** p **pro libovolnou úroveň užitku** u^0. Znamená to, že platí $E(u^0,\mu p + (1-\mu)p^*) \geq \mu.E(u^0,p) + (1-\mu).E(u^0,p^*)$ **pro libovolné dva cenové vektory** $p, p^* > 0$ **a libovolné** $\mu \in \langle 0,1\rangle$.

Vlastnost (V2) konstatuje, že s růstem velikosti užitku požadovaného spotřebitelem (ostře) **roste i výdaj na pořízení komodit. Tatáž vlastnost ve vztahu k** p **připouští, že růst některých cen** (zpravidla těch, které nejsou ve vybírané kombinaci statků pro poskytujících užitek u^0) **nemusí nutně vést k růstu výdajů spotřebitele. Očekávaný (=úměrný) vývoj nákladů na komoditní kombinaci při změně cenového měřítka všech komodit pak vyjadřuje (V4), zatímco vlastnost (V5) obrazně charakterizuje „ne vyšší než lineární“ tendenci vývoje výdajů při růstu kterékoliv z cen** $p_i, i = 1, 2, \ldots, n$. **Vlastnost (V1) zahrnuje matematická omezení funkce** $n+$ **proměnných v kontextu ekonomického významu** $E(u,p)$ **a konstatuje, že kladnou hodnotu užitku nelze dosáhnout zdarma. Spojitost (V3)** jak **v užitku** tak **i v cenách konstatuje, že náklady nemohou skokovitě růst (ani klesat) tehdy, jestliže se jen nepatrně změní některá z cen nebo úroveň užitku** u^0.

Jestliže máme definovánu výdajovou funkci $E(u,p)$ s výše uvedenými vlastnostmi (jmenovitě vlastností **(V2)**), máme tím zaručeno, že k této výdajové funkci existuje funkce inverzní, která bude vyjadřovat hladinu užitku v jako funkci výdajů a cen komodit.

Význam výdajové funkce spočívá mj. v tom, že pomocí ní lze generovat celý ***systém poptávkových funkcí v tzv.Hicksově smyslu.*** Uvedená možnost (pro diferencovatelnou výdajovou funkci) vychází z modifikace tzv. **Shephardova lemmatu**. **Z uvedeného lemmatu vyplývá, že lze psát :**

(4.2)
$$\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_j} = h_j(u,p)$$
, kde

funkce na pravé straně vyjadřuje ***Hicksovskou poptávku*** po komoditě x_j [1].

4.2 Nepřímá užitková funkce a její vlastnosti

Definice 14 Máme dánu výdajovou funkci $M = E(u^0, p)$ **s cenovým vektorem** p **a** současně **tím určenu konkrétní velikost výdajů** M. Potom **funkci**

(4.3)
$$\psi(M,p) = \mathrm{Max}\{u(x);\ px = M\}$$

nazveme nepřímá užitková funkce [indirect utility function] ve vztahu k výdajové funkci $E(u^0,p)$.**Argumenty nepřímé užitkové funkce jsou** tedy **cenový vektor** p **a velikost příjmu** M **spotřebitele** vynaloženého na nákup komodit v množstvích x.

Definice 14A Nepřímá užitková funkce $\psi(M,p)$ příslušná k výdajové funkci $E(p,u^0)$ s vlastnostmi **(V1)** - **(V5) je charakterizována těmito vlastnostmi**:

(W1) $\psi(M,p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, přičemž $\psi(0,p) = 0$.

(W2) $\psi(M,p^0)$ je **rostoucí v** M **pro jakýkoliv cenový vektor** $p^0 > 0$. Dále $\psi(M^0,p)$ je **nerostoucí v** p **(pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů** M^0).

(W3) spojitá v M **pro jakýkoliv cenový vektor** $p^0 > 0$ **a spojitá v** p **pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů** M^0.

(W4) $\psi(M,p)$ je **homogenní funkce stupně** 0 **současně v cenách** p **a výdajích** M.

Znamená to, že platí $\psi(\lambda M, \lambda p) = \psi(M,p)$ **pro libovolné** $\lambda \in (0,+\infty)$.

(W5) $\psi(M^0,p)$ je **kvazikonvexní funkce v** p **pro jakoukoliv úroveň výdajů** M^0.

Znamená to, že platí pro $\mu \in \langle 0,1 \rangle$

$$\psi(M^0, \mu p + (1-\mu)p^*) \le \mathrm{Max}\{\psi(M^0,p);\ \psi(M^0,p^*)\}.$$

---

[1] **Podrobně o nákladových funkcích pojednává monografie R.W. Shephard: Cost and Production Functions [1953]** nebo týž autor: **Theory of Cost and Production Functions. Princeton U.P. [1970].**

Prvá z vlastností (W1) konstatuje mj. že s nulovými peněžními prostředky žádný kladný užitek nezískáme: při kladných cenách statků nejsme bez peněz prostě žádné statky schopni zakoupit.

(W2) Ve vztahu k M se předpokládá, že zvýšený příjem je vynaložen účelně a není alokován do neužitečných komodit. Dle téže (W2), se zvýšením kterékoliv z cen p_i (při neměnných výdajích) **užitek nemůže nikdy vzrůst (nemusí však ani nutně klesnout, neboť ke zdražení cen může dojít u nenakupovaných statků).**[2]

Spojitost (W3) v cenách i příjmu odpovídá reálné situaci, že „nepatrná změna“ kterékoliv z cen p_i ani příjem M nemůže vyvolat skokovitou (nespojitou) změnu užitku plynoucího z nakupovaného spotřebního koše.

Vlastnost (W4) lze chápat tak, že pokud by došlo k tomu, že by se všechny ceny $p_1, p_2, \dots, p_n$ i příjem M změnily v témže poměru (např. λ-násobně), nezmění se na situaci viděné očima spotřebitele vůbec nic: při nezměněných relativních cenových poměrech p_i / M není ze strany spotřebitele zřejmý důvod ke změně poptávkového chování po potenciálně dostupných komoditách. (Spotřebitel se bude řídit stejnými preferenčními hledisky jako dříve.)

Konečně poslední z vlastností (W5) interpretována v první verzi *(konkávnost)* **obrazně znamená, že při** libovolné **změně cen bude užitek z „lineární směsi“ obou cenových vektorů přinejmenším roven „lineární směsi“ dílčích užitků získaných s jedním, resp. druhým cenovým vektorem. Ve vlastnosti se nepřímo odráží „zisk v užitku“ plynoucí z toho, že při cenových změnách lze aspoň něco „ušetřit“ tím, že při substitučních možnostech lze kupovat méně z více zdražených statků a více z méně zdražených (či zlevněných nebo těch, u kterých se cena nezměnila). Druhá interpretace** *(kvazikonvexnost)* **pak určuje horní mez, kterou užitek ze směsi nemůže přesáhnout (ta je dána velikostí užitku z „užitkově příznivější“ cenové situace).**

$$\psi(M^0, \mu p + (1-\mu) p^*) \leq \mathrm{Max}\left[\psi(M^0, p); \psi(M^0, p^*)\right].$$

Vlastnost (W5*), která je ... , naopak omezuje dosažený užitek při „promíchání“ cen ze dvou cenových vektorů hodnotou většího z užitků dosaženého při použití každého cenového vektoru samostatně.

Poznámka: Všechny zde uvedené vlastnosti lze vyvodit z vlastností U(1) - U(4) přímé užitkové funkce a z vlastností matematické funkce Minimum.

---

[2] **Již jsme zmínili, že výdaj υ ztotožňujeme s příjmem spotřebitele M**

Doplněk Konvexnost, konkávnost, kvazikonvexnost a kvazikonkávnost

Řekneme, že spojitá funkce $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **n proměnných** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **(definovaná na konvexní množině X) je pro dva body** $x, z \in X$ (aniž víme, zda $G(x) < G(z)$ nebo naopak)

(A1) ryze **konvexní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) < \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

(B1) ryze **konkávní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) > \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

(C1) ryze **kvazikonvexní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) < Max\{G(x), G(z)\}$$

(D1) ryze **kvazikonkávní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) > Min\{G(x), G(z)\}$$

ve všech případech **pro libovolné skalární** $\lambda \in (0,1)$.

(A2) **konvexní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \le \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

(B2) **konkávní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \ge \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

(C2) **kvazikonvexní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \le Max\{G(x), G(z)\}$$

(D2) **kvazikonkávní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \ge Min\{G(x), G(z)\}$$

ve všech případech **pro libovolné skalární** $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$.

Je-li známo, ve kterém z obou bodů je hodnota funkce $G(.)$ **větší, např. platí-li** $G(x) < G(z)$ **, pak lze výše uvedené definice modifikovat např. takto:**

(A3) **konvexní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \le 0{,}5.G(x) + 0{,}5.G(z)$$

(B3) **konkávní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \ge 0{,}5.G(x) + 0{,}5.G(z)$$

(C3) **kvazikonvexní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \le G(z)$$

(D3) **kvazikonkávní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \ge G(x)$$.

4.3 Marshallovské poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic (3.1A) s podmínkou (3.1B) pro neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$, případně i veličinu λ obdržíme pro každou komoditu

Definice 15 **Poptávkovou funkci po i-té komoditě [commodity demand function]** ***v Marshalovském tvaru*** **[in the Marshallian form]**, zapsatelnou ve tvaru

(4.4) $$x_i = g_i(M, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

která je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru $\mathbf{p}$ a příjmu spotřebitele M.

Definice 15A Máme-li poptávku po komoditě x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vyjádřenu zápisem (4.4) s nějakou poptávkovou funkcí $x_i = g_i(M, \mathbf{p})$ $n+1$ proměnných M a $\mathbf{p}$, pak každá taková poptávková funkce ze soustavy n poptávkových funkcí $g_1, \ldots, g_n$ má následující vlastnosti :

(D1M) $g_i(M, \mathbf{p})$ je **reálná konečná nezáporná funkce** a platí pro ni $g_i(0, \mathbf{p}) = 0$.

(D2M) $g_i(M, \mathbf{p})$ je **nerostoucí v ceně i-té komodity p_i a neklesající v příjmu M**.

(D3M) $g_i(M, \mathbf{p})$ je **spojitá v příjmu M a spojitá v p_i** $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

(D4M) Marshallovské poptávkové funkce $x_i = g_i(M, \mathbf{p})$ jsou homogenní stupně 0 současně v cenách a příjmu. Platí tedy $g_i(\lambda M, \lambda \mathbf{p}) = g_i(M, \mathbf{p})$.

(D5M) Úplná soustava marshallovských poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná. Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^{n} p_i g_i(M, \mathbf{p}) = M$.

(D6M) "Křížové" derivace marshallovských poptávek (podle jednotlivých cen) jsou symetrické, tzn. platí

$$\frac{\partial x_i(M,\mathbf{p})}{\partial p_j} + x_j \cdot \frac{\partial x_i(M,\mathbf{p})}{\partial M} = \frac{\partial x_j(M,\mathbf{p})}{\partial p_i} + x_i \cdot \frac{\partial x_j(M,\mathbf{p})}{\partial M} \quad \text{pro všechna } i, j$$

(D7M) Matice S rozměrů $(n \times n)$ sestávající z prvků $s_{ij} = \dfrac{\partial x_i(M,\mathbf{p})}{\partial p_j} + x_j \cdot \dfrac{\partial x_i(M,\mathbf{p})}{\partial M}$ **je negativně semidefinitní**, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí S podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial x_i(M,\mathbf{p})}{\partial p_j} + x_j \cdot \frac{\partial x_i(M,\mathbf{p})}{\partial M} \right] \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$$

takže lze psát $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$. Přímým důsledkem negativní semidefinitnosti S jsou podmínky $s_{ii} \le 0, i = 1, 2, \ldots, n.$). **Vlastní cenové pružnosti jsou nekladné.**

4.4 Hicksovské poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic **(3.6A)** s podmínkou **(3.6B)** pro neznámé $x_1, x_2, ..., x_n$, (případně i výraz pro Lagrangeův multiplikátor μ) obdržíme pro každou komoditu

Definice 16 Poptávkovou funkci po i-té komoditě [commodity demand function] *v Hicksovském tvaru* [in the Hicksian form] , zapsatelnou ve tvaru

(4.5) $$x_i = h_i(u, p_1, p_2, ..., p_n),$$

která je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru $\mathbf{p}$ a na spotřebitelem žádané hladině užitku $\mathbf{u}$.

Definice 16A Máme-li poptávku po komoditě x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ vyjádřenu zápisem (4.5) s nějakou poptávkovou funkcí $h_i(u, p)$ $(n+1)$ proměnných u a p, pak každá taková poptávková funkce ze soustavy n poptávkových funkcí $h_1, ..., h_n$ má následující vlastnosti :

(D1H) $h_i(u, p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce** a platí pro ni $h_i(0, p) = 0$.

(D2H) $h_i(u, p)$ je **nerostoucí v ceně** i **-té komodity** p_i **a neklesající v užitku** u **.**

(D3H) $h_i(u, p)$ je **spojitá v užitku** u **a spojitá v** p_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

(D4H) Hicksovské poptávkové funkce $x_i = h_i(u, p)$ **jsou homogenní stupně** 0 **v cenách** p [3]. Znamená to, že platí $h_i(u, \lambda p) = h_i(u, p)$

(D5H) Úplná soustava Hicksovských poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná. Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^{n} p_i h_i(u, p) = M$

(D6H) "Křížové" derivace hicksovských poptávek (podle jednotlivých cen) **jsou symetrické**, tzn. platí $$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(u, p)}{\partial p_i}$$ pro všechna i, j

(D7H) Matice S^* **rozměrů** $(n \times n)$ **sestávající z prvků** $s_{ij}^* = \frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j}$ **je negativně semidefinitní**, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí S^* podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} \right] \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$$

Matice S^* je tvořena prvky s_{ij}^*, kde $s_{ij}^* = \frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j}$, takže lze psát $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij}^* \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$.

Důsledkem negativní semidefinitnosti S^* jsou podmínky $s_{ii}^* \le 0$.

---

[3] **Je-li výchozí (*výdajová*) funkce homogenní stupně 1, je její derivace (*poptávková* funkce) homogenní stupně 0.**

Poslední výrok tvrzení ad (D1) vyjadřuje skutečnost, že s nulovým příjmem nelze pořídit ani nejmenší množství žádného užitečného statku. Dvě vlastnosti obsažené v (D2) charakterizují závisle proměnnou (poptávku) **jako monotónní funkce ceny** p_i **a příjmu** M **, přičemž zvýšení ceny neznamená nutně snížení poptávky** (zájem spotřebitele může být upřen na jiné komodity) **a zvýšení příjmu nemusí nutně vést** (ze stejného důvodu) **ke zvýšení poptávky po** i **-tém statku. Spojitost (D3)** ve všech argumentech **vylučuje skokovitý přírůstek poptávky při nepatrné změně ceny či příjmu. Vlastnosti** uvedené v **(D5) vyjadřují úplné rozdělení disponibilního příjmu** M **na nákup** (ne však nutně všech) n **komodit** bez ohledu na to, jakou formulaci poptávkových funkcí přijmeme. **V podmínkách (D4) je obsažena zásada, že proporční změna důchodu a cen neovlivní nijak chování poptávky po žádné z** komodit.

Součtovatelnost (D5M) a homogenita nultého stupně (D4M) jsou důležitým nástrojem v teoretické analýze poptávkových vztahů, nicméně častěji se vyjadřují zprostředkovaně v zápisech s derivacemi poptávkových funkcí (místo původních poptávkových funkcí).

Z ***podmínky součtovatelnosti*** **(D5M)** takto **vyplývají** vztahy (platné pro $i = 1, 2, ..., n$) :

(4.6A,B)
$$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M} = 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p_i} + g_i(M,p) = 0$$

takže změna v příjmu M a cenách p způsobí přeskupení v nákupech, které neporuší výdajové omezení. Získáme je derivováním rozpočtového omezení $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$ podle příjmu, resp. podle ceny p_i.

Identity **(4.6A)** a **(4.6B)** se nazývají ***Engelova*** resp. ***Cournotova agregační podmínka***.
Z podmínky homogenity nultého stupně **(D4M)** Marshallovských poptávek obdobně vyplývá, že pro $i = 1, 2, ..., n$ platí

(4.7)
$$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p_k} + M \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M} = 0$$

Ověření: Z podmínky homogenity 0-stupně vyplývá $g_k(\lambda M, \lambda p) = g_k(M,p)$ **a tedy**

$$\frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial \lambda} = 0.$$

$$\frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial(\lambda M)} \cdot \frac{\partial(\lambda M)}{\partial \lambda} + \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial(\lambda p)} \cdot \frac{\partial(\lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial(\lambda M)}.M + \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial(\lambda p)}.p$$

Speciální volbou $\lambda = 1$ **dostaneme**

$$0 = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M}.M + \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p}.p = \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M}.M + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p_k}.p_k$$

Chování poptávky spotřebitele vůči každé komoditě $\xi_i, i = 1, 2, ..., n$ jen v závislosti na jeho příjmu (tzn. při pevném cenovém vektoru p) pak **udávají Engelovy křivky.**

4.5 Engelovy křivky

Fixujeme-li ceny $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ v **Marshallovské poptávkové funkci (4.4)**, získáme

Definice 17 Engelovu křivku pro i-tou komoditu *[Engel curve]* zapsatelnou ve tvaru

(4.8) $$x_i = f_i(M),$$

která je charakteristikou **informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na jeho příjmu** M **a odvoditelné z poptávkových funkcí** $g_i(M, p)$ poté, co do nich dosadíme jako pevné hodnoty ceny jednotlivých komodit $p_1, p_2, ..., p_n$.

Definice 17A Máme-li poptávku po i-té komoditě x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ vyjádřenou zápisem **(4.8)** s nějakou **Engelovou křivkou** $f_i(M)$ jedné proměnné, pak každá tato **Engelova křivka má následující vlastnosti** :

(E1) Engelova křivka $f_i(M)$ **je reálná, konečná nezáporná funkce** a **platí** $f_i(0) = 0$.

(E2) Engelova křivka $f_i(M)$ **je neklesající v příjmu** M.

(E3) Engelova křivka $f_i(M)$ **je spojitá v** M.

(E4) Engelova křivka $f_i(M)$ **je konkávní v** M.

(E5) Úplná soustava Engelových křivek je součtovatelná, tzn. platí $\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(M) = M$.

(E6) Platí **Engelova agregační podmínka** $\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial f_k(M)}{\partial M} = 1$

Vlastnosti Engelovy křivky $f_i(M), i = 1, 2, ..., n$ jsou vesměs konformní s vlastnostmi Marshallovské poptávkové funkce $g_i(M, p)$, pokud při pevném p omezíme pozornost na chování poptávky ve vztahu k příjmu. Navíc se předpokládá konkávnost **(E4)** $f_i(M)$ jako funkce jedné proměnné M a úplné vynaložení spotřebitelova příjmu na pořízení komodit (ne nutně všech) při jakékoliv úrovni M. ***Engelova křivka*** je (jen) slabě monotónní, neboť zvýšení příjmu nemusí nutně vést ke zvýšení poptávky právě po i-té komoditě.

Tečna k *Engelově křivce* vyjadřuje hodnotu mezního sklonu ke spotřebě dané komodity, tzn. poměr mezi (limitně chápanou) změnou spotřeby (realizované poptávky) x_i a změnou důchodu M tj. $\frac{\partial x_i}{\partial M}$. Připomeňme, že

výraz $$s_{iM} = \frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{x_i} = \frac{\partial x_i}{x_i} \Big/ \frac{\partial M}{M}$$ **nazýváme příjmová pružnost poptávky.**

Na její hodnotě závisí klasifikace ekonomických statků: V rámci nich

a) **je-li příjmová pružnost poptávky větší než 1, pak jde o *luxusní statek .***

b) **je-li příjmová pružnost poptávky v intervalu** $(0,1)$ **, jde o *normální statek.***

c) **je-li příjmová pružnost poptávky rovna 0, jde o** *příjmově inertní statek*

d) **je-li příjmová pružnost poptávky menší než 0, jde o *inferiorní statek.***

4.6 Shephardovo lemma a Royova identita

Nejdůležitějším tvrzením, které platí mezi výdajovou funkcí a soustavou Hicksovských poptávkových funkcí v rovnovážné situaci**, je *Shephardovo lemma*.** **Ronald W.Shephard [1953] je formuloval** původně **pro vztah mezi nákladovou funkcí** (jako obdobou výdajové funkce) **a poptávkovými funkcemi** (po výrobních faktorech) **v teorii produkce**.

Tvrzení 6 ***Shephardovo lemma*** **[Shephard lemma]**

Máme dánu **výdajovou funkci** $E(u, p)$ příslušnou **k užitkové funkci** $u(x)$ s vlastnostmi **(V1)**, **(V2)**, **(V3)**, **(V4)**, **(V5)**. **Potom každou** ze **soustavy poptávkových funkcí po komoditách získáme** tímto způsobem

(4.9)
$$x_i = \frac{\partial E(u^0, p)}{\partial p_i}$$

což znamená, že **tvar poptávkové funkce po komoditě** ζ_i **je určen jako parciální derivace výdajové funkce podle ceny této komodity**. Toto fundamentální tvrzení je základním **východiskem při konstrukci soustavy poptávkových funkcí** po užitek přinášejících statcích **z výdajové funkce**.

Důkaz tvrzení 6

Zvolme pevně, ale jinak libovolně cenový vektor p^0, hladinu užitku u^0 a příslušný vektor optimálních (ve vztahu p^0) ***n*** komoditních množství x^0. Dále pro jakýkoliv jiný cenový vektor p definujme funkci $\chi(p)$ vztahem

(4.10)
$$\chi(p) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^0 - E(u^0, p)$$

Protože x^0 není nutně optimální ve vztahu k p, výdaje na pořízení množství x^0 při cenách p musí vždy být přinejmenším tak velké, jako jsou analogické výdaje na pořízení těch množství, která jsou optimální vzhledem k p^0 - tyto minimální výdaje udává výdajová funkce $E(u^0, p)$. Tedy $\chi(p)$ je vždy větší nebo nejméně rovna 0. Dále víme, že $\chi(p^0)$ je rovna 0, tj. χ nabývá svého minima, pokud p je rovno p^0. Proto všude tam, kde existují derivace $\frac{\partial \chi(p)}{\partial p_i}$, musí platit v komoditní kombinaci p^0 podmínka:

(4.11)
$$\frac{\partial \chi(p^0)}{\partial p_i} = x_i^0 - \frac{\partial E(u^0, p^0)}{\partial p_i} = 0$$

Protože jsme pevnou hodnotu p^0 volili libovolně, je tím vztah **(4.9)** dokázán. □.

Poznámka 1 **I když výdajová funkce splňuje všechny vlastnosti (V1),..., (V5), nelze** nijak obecně **zaručit, že** *pomocí* ***Shephardova lemmatu*** odvozený **systém poptávkových funkcí splňuje všechny vlastnosti předpokládané u funkcí** deklarovaných jako ***(Hicksovské)*** **poptávkové**, tj. **(D1H)** ,... , **(D7H)**.

Poznámka 2 **Opačný postup** - tzn. **sestrojení výdajové funkce integrací systému poptávkových funkcí** (aniž trváme na splnění vlastností **(D1M)**,... , **(D7M)** - **není obecně uskutečnitelný**, a to ani tehdy ne, jestliže s jistotou víme, že taková výdajová funkce $E(u^0, p)$ existuje a že ji lze vyjádřit v explicitním tvaru. **Pokud lze** takovou **výdajovou funkci zkonstruovat ze soustavy poptávkových funkcí, říkáme, že** tato **soustava splňuje** tzv. *"**podmínku integrability**"*.

Dalším užitečným tvrzením je věta, která charakterizuje určitou „příbuznost" struktury mezi funkčními tvary u jednotlivých poptávkových funkcí.

Tvrzení 7 ***Symetrie Hicksovských poptávkových funkcí*** **[symmetry of the Hicksian demand functions]**

Mějme dánu výdajovou funkci $E(u^0, p)$ **příslušnou k** přímé **užitkové funkci** $u(x)$ **s vlastnostmi (V1), (V2), (V3), (V4), (V5), která má** navíc **spojité všechny parciální derivace aspoň do 2. řádu včetně**. Potom pro systém poptávkových funkcí vyvozených pomocí **Shephardova lemmatu (4.9)** platí:

(4.12)
$$\frac{\partial h_j(u^0, p)}{\partial p_k} = \frac{\partial h_k(u^0, p)}{\partial p_j}$$

Důkaz tvrzení 7

Okamžitě **vyplývá z** tzv. ***Youngovy věty*** *známé z matematické analýzy* deklarující nezávislost druhých parciálních derivací na pořadí derivování, **jestliže jsou tyto druhé parciální derivace spojité**. Pak platí:

(4.13)
$$\frac{\partial h_j(u^0, p)}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 E(u^0, p)}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial^2 E(u^0, p)}{\partial p_k \partial p_j} = \frac{\partial h_k(u^0, p)}{\partial p_j}$$

čímž je důkaz tvrzení proveden. □.

V tomto smyslu **lze tedy mluvit o podmínce symetrie každé funkce ze soustavy poptávkových funkcí.** Je tedy zřejmé, že **všechny poptávkové funkce musí mít formálně příbuznou funkční podobu**, která se může u jednotlivých funkcí systému lišit různými hodnotami parametrů těchto funkcí, nemůže jít však o principiálně odlišný funkční typ. (např. jedna poptávková funkce nemůže být logaritmem součtu kvadrátů svých argumentů, zatímco druhá by byla arkustangentou součinu odmocnin těchže argumentů). Uvedená **podmínka** tedy **výrazně snižuje „rozmanitost"** v možných vzájemných odlišnostech jednotlivých **poptávkových funkcí**.

Shephardovo lemma **umožňuje generovat Hicksovy poptávkové funkce z výdajové funkce.** Pokud bychom chtěli odvodit **Marshallovské poptávkové funkce**, stačí k tomu substituovat za argument u ve výdajové funkci hodnoty nepřímé užitkové funkce $\psi(\cdot)$, která má argumenty p a M . Dostaneme

(4.14)
$$x_i = h_i(u, p) = h_i(\psi(M, p), p) = g_i(M, p)$$

tzn. ***soustavu poptávkových funkcí (pro*** $i = 1, 2, ..., n$ ***) v Marshallovském tvaru.***

Pokud bychom byli postaveni před **opačný problém, tj. vyvodit Hicksovy poptávkové funkce z Marshallovských**, potom **lze postupovat v inverzním směru. Máme-li dány** $g_i(M,p), i = 1,2,\dots,n$, **dosadíme za argument** M **-výdaj je plně vynaložen na nákup** x **- hodnotu výdajové funkce** $E(u,p)$.

(4.15) $$x_i = g_i(M,p) = h_i(E(u,p),p) = h_i(u,p)$$

Vztah mezi nepřímou užitkovou a výdajovou funkcí, jež jsou vzájemně inverzní, lze zapsat identitou

(4.16) $$\psi(M,p) = \psi(E(u,p),p) \equiv u$$

Obdobou Shephardova lemmatu formulovaného ve vztahu k **výdajové funkci** pro vyvození poptávkových funkcí (tentokrát v *Marshallovském tvaru*) z nepřímé užitkové funkce $\psi(p,M)$ **je** vztah známý jako **Royova identita**. Je pojmenována po francouzském ekonomu a matematikovi ***René Royovi* [1943]**. Nezávisle na něm ji formuloval jiný francouzský matematik ***Jean Villé* [1941]**.

Tvrzení 8 *Royova identita* [Roy-Villé identity]

Máme dánu nepřímou užitkovou funkci $\psi(p,M)$ **příslušnou užitkové funkci** $u(x)$ **s vlastnostmi (W1), (W2), (W3), (W4), (W5). Potom** ***soustavu Marshallovských poptávkových funkcí po komoditách*** **získáme** tímto způsobem

(4.17) $$x_i(M,p) = -\frac{\dfrac{\partial \psi(M,p)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial \psi(M,p)}{\partial M}}$$

To znamená, že **Marshallovskou poptávkovou funkci po** i **-té komoditě získáme jako záporně vzatý podíl** dvou **parciálních derivací nepřímé užitkové funkce** $\psi(M,p)$, a to jednak **podle ceny** i **-té komodity,** jednak **podle** spotřebitelova **příjmu** M .

Důkaz tvrzení 8 (Royovy identity)

Vztahem **(4.7)** jsme zapsali, že **výdajová funkce a nepřímá užitková funkce jsou vzájemně v inverzním vztahu**. Ten můžeme vyjádřit zápisem identity:

(4.18) $$\psi(E(u,p),p) = u.$$

Když tuto **identitu** (platící pro libovolnou dvojici pevných hodnot p a u) **derivujeme podle pevně zvolené ceny** p_i, dostaneme *uplatněním* ***řetězového pravidla*** *pro derivaci složené funkce*

(4.19) $$\frac{\partial \psi(E(u,p),p)}{\partial p_i} = \frac{\partial \psi(E(u,p),p)}{\partial E(u,p)} \cdot \frac{\partial E(u,p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_i} + \frac{\partial \psi(E(u,p),p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_i} = 0$$, neboť

při pevném u je $\frac{\partial u}{\partial p_i} = 0$ a $\frac{\partial p}{\partial p_i} = (0,\dots,1,\dots,0)$, neboť $\frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \delta_{ij}$ ***(Kroneckerovo*** δ***)***, $i,j = 1,2,\dots,n$ a dále $E(u,p) = M$, neboť příjem M je rozdělen beze zbytku.

Vztah (4.19) můžeme tedy po substituci $E(u,p) = M$ **přepsat do tvaru**

(4.20) $$\frac{\partial v(M,p)}{\partial M}\cdot\frac{\partial e(u,p)}{\partial p_i}+\frac{\partial v(M,p)}{\partial p_i}=0$$

Ze **Shephardova lemmatu** dále víme, že $\frac{\partial e(u,p)}{\partial p_i}=h^i(u,p)=x_i$ (tj.**Hicksovská poptávka po** i **-tém statku**). **Odtud** tedy již snadno **odvodíme**

(4.17) $${}^M x_i = g_i(M,p) = -\frac{\dfrac{\partial v(M,p)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(M,p)}{\partial M}}$$ [4] □.

Poznámka 3 **Jestliže nepřímou užitkovou funkci vyjádříme v normalizovaném tvaru**, tzn. argumenty představujícími jednotkové ceny statků dělené příjmem, tj. $\psi\left(\frac{p_1}{M},\frac{p_2}{M},\ldots,\frac{p_n}{M},1\right)=\psi^*(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, kde pracujeme s n -členným vektorem normovaných cen $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, pak **lze Royovu identitu zapsat jako**

(4.21) $$\frac{p_i x_i}{M}=\frac{\dfrac{\partial\psi^*(r)}{\partial \log r_j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi^*(r)}{\partial \log r_j}}$$

tedy ve tvaru vyjadřujícím rozpočtovou účast i -té komodity na celkovém příjmu M jako podíl parciální derivace nepřímé užitkové funkce podle logaritmované ceny této komodity a součtu analogicky vyjádřených parciálních derivací $\psi^*(r)$ podle všech logaritmovaných cen.

(4.18) $$\psi(E(u,p),p)=u.$$

Když tuto **identitu** (platící pro libovolnou dvojici pevných hodnot p a u) **derivujeme podle pevně zvolené ceny** p_i, dostaneme *uplatněním* ***řetězového pravidla*** *pro derivaci složené funkce*

(4.19) $$\frac{\partial\psi(E(u,p),p)}{\partial p_i}=\frac{\partial\psi(E(u,p),p)}{\partial E(u,p)}\cdot\frac{\partial E(u,p)}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial p_i}+\frac{\partial\psi(E(u,p),p)}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial p_i}=0$$, neboť

při pevném u je $\frac{\partial u}{\partial p_i}=0$ a $\frac{\partial p}{\partial p_i}=(0,0,\ldots,1,\ldots,0)$, neboť $\frac{\partial p_j}{\partial p_i}=\delta_{ij}$ *(Kroneckerovo* δ *)*, $i,j=1,2,\ldots,n$ a dále $E(u,p)=M$, neboť příjem M je rozdělen beze zbytku.

Vztah (4.19) můžeme tedy po substituci $E(u,p)=M$ **přepsat do tvaru**

---

[4] Vzhledem k vlastnosti **(W2) je ve výrazu (4.17) čitatel nekladný, zatímco jmenovatel je kladný**. Výraz pro *Marshallovskou poptávku* na levé straně musí být přirozeně nezáporný.

(4.20) $$\frac{\partial v(M,p)}{\partial M}\cdot\frac{\partial e(u,p)}{\partial p_i}+\frac{\partial v(M,p)}{\partial p_i}=0$$

Ze **Shephardova lemmatu** dále víme, že $\frac{\partial e(u,p)}{\partial p_i}=h^i(u,p)=x_i$ (tj.**Hicksovská poptávka po** i **-tém statku**). **Odtud** tedy již snadno **odvodíme**

(4.17) $${}^M x_i = g_i(M,p) = -\frac{\dfrac{\partial v(M,p)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(M,p)}{\partial M}}$$ [5] □ .

4.7 Schématické vyjádření vztahů

mezi *přímou užitkovou, nepřímou užitkovou* a *výdajovou funkcí a soustavami poptávkových funkcí v Marshallovském a Hicksovském tvaru*

K vyjádření vztahů mezi ekonomickými funkčními typy může sloužit schéma

rozpočtové omezení	**spotřebitel**	**užitková funkce**
$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M$		$u(x_1, x_2, \dots, x_n)$
Minimalizační úloha		***Maximalizační úloha***
$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ za podmínky $u(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge u^0$		$\text{Max } u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ za podmínky $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M,\ x_i \ge 0$

[5] Vzhledem k vlastnosti **(W2) je ve výrazu (4.17) čitatel nekladný, zatímco jmenovatel je kladný**. Výraz pro *Marshallovskou poptávku* na levé straně musí být přirozeně nezáporný.

substituce

$x_i = h_i(u^0, p)$

VÝDAJOVÁ FUNKCE
$E(u^0, p)$

← inverze →

substituce

$x_i = g_i(M, p)$

NEPŘÍMÁ UŽITKOVÁ FUNKCE
$\psi(M, p)$

Shephardovo lemma

$$x_i = \frac{\partial E(u^0, p)}{\partial p_i}$$

derivace E podle p_i

Royova identita

$$x_i = -\frac{\dfrac{\partial \psi(M, p)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial \psi(M, p)}{\partial M}}$$

záporný podíl derivací ψ podle p_i, M

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ PO KOMODITÁCH V HICKSOVĚ TVARU
$x_i = h_i(u^0, p)$

← substituce →

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ PO KOMODITÁCH v MARSHALLOVĚ TVARU
$x_i = g_i(M, p)$

4.8 Problém „integrability“

Poznámka 4

Poptávkové funkce v Marshallovském tvaru **lze získat** v podstatě **třemi způsoby**:

(A) Z přímé užitkové funkce přímým řešením maximalizačního problému (1A) při rozpočtovém omezení (1B).

(B) Z nepřímé užitkové funkce pomocí Royovy identity (4.15)

(C) Z Hicksovských poptávkových funkcí (4.5) substitucí (4.13)

Jen u druhého způsobu je však zajištěn úspěch. **Cesta řešením maximalizačního problému zpravidla nevede** k **vyjádření Marshallovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru** a pokud je toto možné, **bude zpravidla zejména v obecných n-komoditních případech výsledný výraz pro poptávky komplikovaný** (obecně se všemi parametry výchozí přímé užitkové funkce, všemi cenami a příjmem)**. Ani v případě (C) nemusíme** vždy **získat explicitní tvar poptávek** (Problém je ale méně vážný než v případě **(A)**.

Poznámka 5

Poptávkové funkce v Hicksovském tvaru **lze získat** rovněž **třemi způsoby:**

(A) Z přímé užitkové funkce přímým řešením minimalizačního problému (6A) při užitkovém omezení (6B).

(B) Z výdajové funkce pomocí Shephardova lemmatu (4.9)

(C) Z Marshallovských poptávkových funkcí (4.4) substitucí (4.13)

I zde je úspěch zajištěn jen ve druhém případě. **Řešení minimalizačního problému nemusí vést k vyjádření Hicksovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru** a pokud **to tak bude, budou** v obecných n-komoditních případech **výsledné výrazy pro poptávky komplikované** (se všemi parametry přímé užitkové funkce, všemi cenami a užitkem). Ani zde u **(C)** nemusíme obecně získat explicitní tvar poptávek (byť problém je méně vážný než v **(A)**.

Vztah **(11)** $x_i(E(u^0,p)) = h_i(u^0,p)$ a ***Shephardovo lemma*** **(4.9) dovolují psát obě soustavy** (Hicksovských i Marshallovských) **poptávkových funkcí vyjádřeními v parciálních diferenciálních rovnicích**

(4.22A,B) $$x_i(E(u^0),p) = \frac{\partial E(u^0,p)}{\partial p_i} \quad \text{resp.} \quad x_i(M,p) = \frac{\partial E(\Psi(M,p),p)}{\partial p_i} .$$

Řešením jedné či druhé soustavy (4.22) pro $E(u,p)$, resp. $\Psi(M,p)$ bychom tedy mohli – *aspoň v principu* – **získat výdajovou, resp. nepřímou užitkovou funkci.**

Vytvoření výdajové funkce $E(u,p)$ z úplné soustavy Hicksovských poptávkových funkcí $h_i(u,p)$ z (4.5) je však možné jen za předpokladů (D6H), (D7H), tzn., že matice S^* musí být symetrická a pozitivně semidefinitní.

Rekonstrukce nepřímé užitkové funkce $\psi(M,p)$ z úplné **soustavy marshallovských poptávkových funkcí $g_i(M,p)$ z (4.4) je možná jen za předpokladů (D6M),(D7M), tzn. bude-li Sluckého substituční matice S symetrická a pozitivně semidefinitní.**

4.9 Alternativní vyvození Sluckého rovnice

Sluckého rovnici (6.18) odvozenou v části 6 **přímo můžeme vyvodit také** jiným **způsobem, při kterém využijeme Shephardova lemmatu.**

Vyjdeme přitom z identity $h_i(u,p) = x_i(E(u,p),p)$ **,**

kterou derivujeme podle ceny j-tého statku p_j**. Dostaneme tak**

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial E(u,p)} \cdot \frac{\partial E(u,p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_j},$$

Protože však zřejmě $E(u,p) = M$, $\frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij}$ (Kroneckerovo δ) a protože dle

Shephardova lemmatu (4.9) platí $\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_j} = x_j$, **dostáváme** z předchozího

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p_j}, \quad \text{neboli}$$

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j},$$

Poznámka 1 Povšimněme si, že výraz vlevo reprezentuje Hicksovské, zatímco oba výrazy vpravo Marshallovské pojetí. Po přeskupení členů již dostáváme Sluckého rovnici v obvyklém zápisu

$$\frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p_j} = -x_j . \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial M} + \frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} \quad \text{, resp.}$$

$$\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} = - \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j}, \qquad \square.$$

Zaznamenejme, že **důchodový člen je reprezentován Marshallovským zápisem, zatímco substituční člen** (obecně definovaný jako $x_{ij} = \lambda . \frac{|U_{ij}|}{|U|} = \frac{u_j}{p_j} . \frac{|U_{ij}|}{|U|}$) **je vyjádřen v Hicksovské notaci (s nepřítomností** M **) .**

Poznámka 2 Vzhledem k symetrii Hicksovských poptávkových funkcí

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(u,p)}{\partial p_i}$$

platí pro Marshallovské poptávkové funkce tato symetrie

$$\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(M,p)}{\partial M} . x_i + \frac{\partial x_j(M,p)}{\partial p_i} \qquad \square.$$

Formálně přesnější důkaz Royovy identity

Vztahem **(4.7)** jsme zapsali, že **výdajová funkce a nepřímá užitková funkce jsou vzájemně v inverzním vztahu**. Ten můžeme vyjádřit zápisem identity:

(4.18) $$\psi\left(E(u,p),p\right)=u\,.$$

Když tuto **identitu** (platící pro libovolnou dvojici pevných hodnot **p** a **u**) **derivujeme podle pevně zvolené ceny** p_r , dostaneme *uplatněním* ***řetězového pravidla*** *pro derivaci složené funkce*

(4.19) $$\frac{\partial\psi\left(E(u,p),p\right)}{\partial p_r}=\frac{\partial\psi\left(E(u,p),p\right)}{\partial E(u,p)}\cdot\left(\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_r}\right)+\frac{\partial\psi\left(E(u,p),p\right)}{\partial p}\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial p_r}\right)=0\,,$$

neboť při pevném u je pravá strana $\frac{\partial u}{\partial p_i}=0$ a na levé straně $\frac{\partial p}{\partial p_r}=(0,0,\dots,1,\dots,0)$, neboť zřejmě $\frac{\partial p_j}{\partial p_i}=\delta_{ij}$ ***(Kroneckerovo*** δ ***)***, $i,j=1,2,\dots,n$ a dále $E(u,p)=M$, protože příjem M je rozdělen beze zbytku.

Vztah (4.19) můžeme tedy po substituci $E(u,p)=M$ **přepsat do tvaru**

(4.20) $$\frac{\partial\psi(M,p)}{\partial M}\cdot\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_r}+\frac{\partial\psi(M,p)}{\partial p_r}=0$$

Ze **Shephardova lemmatu** dále víme, že $\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_r}=h^r(u,p)={}^H x_r$ (tj.**Hicksovská poptávka po** r **-tém statku**). **Odtud** tedy již snadno **odvodíme**

(4.17) $${}^M x_r=g_r(M,p)=-\frac{\frac{\partial\psi(M,p)}{\partial p_r}}{\frac{\partial\psi(M,p)}{\partial M}}\,[6]\qquad\square\,.$$

[6] Vzhledem k vlastnosti **(W2) je ve výrazu (4.17) čitatel nekladný, zatímco jmenovatel je kladný**. Výraz pro *Marshallovskou poptávku* na levé straně musí být přirozeně nezáporný.