Všeobecná rovnice ekvivalence $H_x(\varphi) = H_x(\eta, \xi)$

$$\underbrace{\frac{1}{D_x}\sum_{j=0}^{\omega-x}\varphi_j \cdot D_{x+j} = \underbrace{\frac{1}{D_x}\sum_{j=0}^{\omega-x}\eta_j \cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x}\sum_{j=0}^{\omega-x}\xi_j \cdot C_{x+j}}_{\text{jednorazove netto pojistne } \pi}}_{\text{bezne netto pojistne } \varphi_j}$$

Brutto pojistné

- Б - **jednorázové brutto pojistné**
  - doživotní $\quad Б = \pi + \alpha \cdot \text{PČ} + \beta \cdot \text{PČ} \cdot \ddot{a}_x$
  - dočasné $\quad Б = \pi + \alpha \cdot \text{PČ} + \beta \cdot \text{PČ} \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|}$
- ***B*- běžné brutto pojistné**
  - $m = n$
    - doživotní $\quad B = \dfrac{1}{1-\gamma}\cdot\left(P + \dfrac{\alpha\cdot\text{PČ}}{\ddot{a}_x} + \beta\cdot\text{PČ}\right)$
    - dočasné $\quad B = \dfrac{1}{1-\gamma}\cdot\left(P + \dfrac{\alpha\cdot\text{PČ}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} + \beta\cdot\text{PČ}\right)$
  - $m < n$
    - doživotní $\quad {}_{|m}B = \dfrac{1}{1-\gamma}\cdot\left({}_{|m}P + \dfrac{\alpha\cdot\text{PČ}}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_1\cdot\dfrac{\ddot{a}_x\cdot\text{PČ}}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_2\cdot\text{PČ}\right)$
    - dočasné $\quad {}_{|m}B = \dfrac{1}{1-\gamma}\cdot\left({}_{|m}P + \dfrac{\alpha\cdot\text{PČ}}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_1\cdot\dfrac{\ddot{a}_{x\overline{n}|}\cdot\text{PČ}}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_2\cdot\text{PČ}\right)$

(podrocní verze viz slajdy)

Pojištění s výhradou

$$B_{x\overline{n}|} = \frac{{}_nE_x + \alpha + \beta\cdot\ddot{a}_{x\overline{n}|}}{(1-\gamma)\cdot\ddot{a}_{x\overline{n}|} - (IA)^1_{x\overline{n}|}}$$, kde $\quad {}_nE_x = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\text{PČ}$; $\quad \ddot{a}_{x\overline{n}|} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$; $\quad (IA)^1_{x\overline{n}|} = \dfrac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}$

(odložená verze viz slajdy)

$$P = \frac{\pi\cdot\text{PČ}}{\text{duchod}} \qquad H_x(\varphi) = H_x(\eta, \xi)$$

Prospektivní netto rezerva

- **jednorázová platba pojistného**

$${}_tV_{x\overline{n}|} = \underbrace{\frac{\sum_{j=t+1}^{n}(a_j\cdot D_{x+j} + b_j\cdot C_{x+j-1})}{D_{x+t}}}_{\textit{budoucí výdaje}} - \underbrace{\frac{P_{x\overline{n}|}\cdot\sum_{j=t+1}^{m} D_{x+j-1}}{D_{x+t}}}_{\textit{budoucí příjmy}}$$

- **běžné placení pojistného**

$${}_tV_{x\overline{n}|} = \frac{\sum_{j=t+1}^{n}(a_j\cdot D_{x+j} + b_j\cdot C_{x+j-1})}{D_{x+t}}$$

Ukládací a riziková část netto pojistného

$$\underset{1}{P_{x\overline{n}|}} = \underset{2}{P^{ukl}} + \overset{3}{P^{riz}}$$

$$P^{riz} = \frac{a_t\cdot D_{x+t} + (b_t - {}_tV_{x\overline{n}|})\cdot C_{x+t-1}}{D_{x+t-1}} = P_{x\overline{n}|} - P^{ukl}$$

$$P^{ukl} = {}_tV_{x\overline{n}|}\cdot v - {}_{t-1}V_{x\overline{n}|}$$

Zillmerova rezerva

- $m > t \quad {}_tV_x^Z = {}_tV_x - \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}\cdot\ddot{a}_{x+t,\overline{n-t}|}$
- $m \le t \quad {}_tV_x^Z = {}_tV_x$

Redukce pojistné částky

$${}_tV_x^Z\cdot\text{PČ} = Б_{x+t}\cdot{}_tR_x\,; \quad {}_tR_x = \frac{{}_tV_x^Z\cdot\text{PČ}}{Б_{x+t}}$$, kde ${}_tR_x$ je redukovaná pojistná částka

Dynamizace

$$B' = B + (\text{PČ}' - \text{PČ})\cdot B_{x+t,\overline{n-t}|}$$

- průměrné pojistné plnění: $PPP = \frac{\text{celkové pojistné plnění}}{N}$
- průměrná pojistná částka: $\text{PPČ} = \frac{\text{celková pojistná částka}}{N}$
- průměrná škoda: $\text{PŠ} = \frac{\text{celkové pojistné plnění}}{n}$
- škodní frekvence: $\text{ŠF} = q_1 = \frac{n}{N} = \frac{\text{pocet PU}}{\text{pocet PS}}$
- pojistná sazba: $PS = \frac{\text{celkové pojistné}}{\text{celková pojistná částka}}$
- škodní sazba: $\text{ŠS} = \frac{\text{celkové pojistné plnění}}{\text{celková pojistná částka}}$
- škodní průběh: $\text{ŠP} = \frac{\text{celkové pojistné plnění}}{\text{celkové pojistné}}$
- škodní stupeň: $\text{ŠSt} = q_2 = \frac{\text{PŠ}}{\text{PPČ}}$

$P = v\cdot q_1\cdot q_2\cdot\text{PPČ}$, kde $v = \frac{1}{(1+\frac{i}{2})}$

Ryzí zájmové pojištění $\quad P_{(Z)} = v\cdot q_1\cdot q_2\cdot H$

Pojištění na plnou hodnotu $\quad P_{(H)} = v\cdot q_1\cdot q_2\cdot S = v\cdot q_1\cdot q_2\cdot s\cdot H = s\cdot P_{(Z)} \qquad s = \dfrac{S}{H}$

Pojištění na první riziko $\quad P_{(P)} = v\cdot q_1\cdot[G_s\cdot H + (1-b_s)\cdot S] = v\cdot q_1\cdot[G_s + (1-b_s)\cdot s]\cdot H$

Podílová spoluúčast $\quad {}_pP_{(Z)} = \dfrac{100-p}{100}\cdot P_{(Z)}$

Excendentní spoluúčast $\quad {}_{F_0}P_{(P)} = v\cdot q_1\cdot[G_s + (1-b_s)\cdot s - G_{f_0} - (1-b_{f_0})\cdot f_0]\cdot H, \quad$ kde $f_0 = \dfrac{F_0}{H}$

Integrální spoluúčast $\quad {}_{F_i}P_{(H)} = v\cdot q_1\cdot(q_2 - G_{f_i})\cdot S, \quad$ kde $f_i = \dfrac{F_i}{H}$

Rizikové pojistné

$$RP = P + \frac{4}{N}\cdot S\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{N} z_i^2}$$

Metoda Chain Ladder (Stupňová metoda)

- Trojúhelníkové schéma se doplňuje na obdelník:
  1) K dispozici máme údaje o inflaci v jednotlivých letech a údaje o pojistných plněních $P_{i,j}$, které byly vyplaceny v jednotlivých letech $j = 0, 1, ..., n$ uplynulých od roku vzniku $i = 1, 2, ..., n$ pojistné události.
  2) Vyplacené pojistné plnění $P_{i,j}$ přepočítáme podle měr inflace za jednotlivé roky na úroveň cen ke konci vývojového roku n.
  3) Takto upravené trojúhelníkové schéma přepočítáme na kumulativní trojúhelnkové schéma podle vztahů

$$C_{i,0} = P_{i,0}$$
$$C_{i,j+1} = P_{i,j+1} + C_{i,j} \quad \text{pro } j \geq i.$$

  4) Určíme **koeficienty vývoje pojistného plnění** λ_j podle vztahů

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{C_{0,1} + C_{1,1} + ... + C_{n-1,1}}{C_{0,0} + C_{1,0} + ... + C_{n-1,0}}; \ \hat{\lambda}_2 = \frac{C_{0,2} + C_{1,2} + ... + C_{n-2,2}}{C_{0,1} + C_{1,1} + ... + C_{n-2,1}};$$
$$... \ \hat{\lambda}_n = \frac{C_{0,n}}{C_{0,n-1}}$$

  5) Doplníme trojúhelník **odhady plnění** $\hat{C}_{i,j}$ podle vztahů

$$\hat{C}_{n,1} = \hat{\lambda}_1 \cdot C_{n,0}$$
$$\hat{C}_{n,2} = \hat{\lambda}_2 \cdot \hat{C}_{n,1} = \hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_1 \cdot C_{n,0}$$
$$\hat{C}_{n-1,2} = \hat{\lambda}_2 \cdot C_{n-1,1}$$
$$\vdots$$
$$\hat{C}_{n,n} = \hat{\lambda}_n \cdot \hat{\lambda}_{n-1} \cdot \dots \cdot \hat{\lambda}_1 \hat{C}_{n,0}$$

  6) Odhadneme **celkové rezervy na pojistné plnění** na konci n-tého roku. V posledním sloupci tabulky totiž dostaneme odhadnuté kumulativní rezervy v posledním vývojovém roce $\hat{C}_{i,n}$. Odhad celkovývh rezerv na konci n-tého roku na pojistné události vzniklé ve sledovaných letech dostaneme, když od hodnot v posledním sloupci tabulky odečteme hodnoty, které jsou na diagonále a tyto výsledky sečteme. Tedy platí

$$\text{celkové rezervy} = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}\right)$$

Chyba odhadu

$$\text{relativní chyba odhadu} = \left|\frac{S - O}{S}\right| \cdot 100\%$$

Separační metoda

- Abychom odstranili vliv hodnot n_i na výšku plateb, budeme dále analyzovat matici standardních hodnot

$$S_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{n_i} = r_j \lambda_{i+j}, \quad \text{pro } 0 \leq i, j \leq n.$$

- **Odhad hodnot** r_j **a** λ_{i+j} pro $j = 0, 1, ..., n$ a $0 \leq i + j \leq n$:
  - Označme d_i vstupy na i-té diagonále tabulky pro $i = 1, 2, ..., n$. Pak platí

$$\begin{aligned} d_n &= S_{n,0} + S_{n-1,1} + ... + S_{1,n-1} + S_{0,n} \\ &= r_0\lambda_n + r_1\lambda_n + ... + r_{n-1}\lambda_n + r_n\lambda_n \\ &= \lambda_n(r_0 + r_1 + ... + r_n) = \lambda_n \end{aligned}$$

  - A tedy platí $\hat{\lambda}_n = d_n$
  - Jediný vstup v trojúhelníku v tabulce, který obsahuje r_n je $S_{0,n} = r_n\lambda_n$, ze kterého dostaneme odhad

$$\hat{r}_n = \frac{S_{0,n}}{\hat{\lambda}_n}$$

  - Podobně

$$\begin{aligned} d_{n-1} &= S_{n-1,0} + S_{n-2,1} + ... + S_{0,n-1} \\ &= r_0\lambda_{n-1} + r_1\lambda_{n-1} + ... + r_{n-1}\lambda_{n-1} \\ &= \lambda_{n-1}(r_0 + r_1 + ... + r_{n-1}) = \lambda_{n-1}(1 - r_n) \end{aligned}$$

  - A tedy platí $\hat{\lambda}_{n-1} = \dfrac{d_{n-1}}{1 - \hat{r}_n}$

- Z údajů ve vývojovém roce $(n-1)$ dostáváme odhad $\hat{r}_{n-1}$, platí

$$S_{0,n-1} + S_{1,n-1} = r_{n-1}(\lambda_{n-1} + \lambda_n)$$
$$\hat{r}_{n-1} = \frac{S_{0,n-1} + S_{1,n-1}}{\lambda_{n-1} + \lambda_n}$$

- Takto pokračujeme, dokud nezískáme všechny odhady.

- Pro $t > n$ odhadneme λ_t použitím předpokladů o vývoji inflace v dalších letech.
- Když ve sledovaném období předpokládáme konstantní průměrnou výšku individuální škody ve stabilní měně, pak $\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} - 1$ vyjadřuje **míru inflace** plnění v roce t.
- Odhad rezervy na nevyplacené plnění, které bude vylacené ve vývojovém roce k za škody vzniklé v roce i, kde $i = 0, 1, ..., n$ a $n < i + k \leq 2n$ je daný vztahem

$$\hat{P}_{i,k} = n_i \hat{r}_k \hat{\lambda}_{i+k}$$