SMĚNA A PRODUKCE – řešené příklady

1. Spotřebitelé A a B mohou nakupovat pouze dva statky, statek 1 a 2. Spotřebitel A má Cobb-Douglasovu užitkovou funkci $U_A(x_A^1, x_A^2) = x_A^1 x_A^2$, kde x_A^1 je množství statku 1 a x_A^2 je množství statku 2. Spotřebitel B má užitkovou funkci $U_B(x_B^1, x_B^2) = x_B^1 x_B^2$. Spotřebitel A má počáteční vybavení statku 1 $\omega_A^1 = 8$ a statku 2 $\omega_A^2 = 2$. Spotřebitel B má počáteční vybavení statku 1 $\omega_B^1 = 2$ a statku 2 $\omega_B^2 = 3$.

   (a) Jaká je rovnovážná cena statku 1, když je statek 2 numeraire ($p_2^* = 1$)?

   (b) Jaká je rovnovážná statků 1 a 2?

   <u>Řešení</u>

   (a) Rovnováhu můžeme popsat pomocí vektoru cen (p_1^*, p_2^*), při kterých pro statek 1 a 2 platí, že součet poptávek spotřebitele A a B se rovná součtu vybavení spotřebitele A a B, tedy

   $$x_A^1(p_1^*, p_2^*) + x_B^1(p_1^*, p_2^*) = \omega_A^1 + \omega_B^1$$
   $$x_A^2(p_1^*, p_2^*) + x_B^2(p_1^*, p_2^*) = \omega_A^2 + \omega_B^2,$$

   kde $x_A^1(p_1^*, p_2^*)$ je poptávka spotřebitele A po statku 1. Po dosazení vybavení spotřebitelů si můžeme vyjádřit poptávky spotřebitele B jako

   $$x_B^1(p_1^*, p_2^*) = 10 - x_A^1(p_1^*, p_2^*) \qquad (1)$$
   $$x_B^2(p_1^*, p_2^*) = 5 - x_A^2(p_1^*, p_2^*). \qquad (2)$$

   Každý spotřebitel v rovnováze volí nejlepší koš, který si může dovolit. Protože jsou indiferenční křivky obou spotřebitelů hladké a konvexní a je zaručeno vnitřní řešení (Cobb-Douglasova užitková funkce), budeme hledat takovou rovnovážnou alokaci, ve které se budou indiferenční křivky spotřebitelů dotýkat linie rozpočtu. V této alokaci bude platit, že

   $$\mathrm{MRS}_A = \mathrm{MRS}_B$$
   $$-\frac{x_A^2(p_1^*, p_2^*)}{x_A^1(p_1^*, p_2^*)} = -\frac{x_B^2(p_1^*, p_2^*)}{x_B^1(p_1^*, p_2^*)}.$$

   Substitucí (1) a (2) za poptávky spotřebitele B získáme

   $$\frac{x_A^2(p_1^*, p_2^*)}{x_A^1(p_1^*, p_2^*)} = \frac{5 - x_A^2(p_1^*, p_2^*)}{10 - x_A^1(p_1^*, p_2^*)}.$$

   Úpravou tohoto výrazu dostaneme poměr, ve kterém jsou v rovnováze spotřebovávány statky 1 a 2

   $$x_A^1(p_1^*, p_2^*) = 2x_A^2(p_1^*, p_2^*). \qquad (3)$$

   V rovnovážné alokaci je zároveň sklon linie rozpočtu rovný sklonu indiferenčních křivek obou spotřebitelů, tedy platí, že

   $$-\frac{p_1^*}{p_2^*} = \mathrm{MRS}_A.$$

   Statek 2 je numeraire ($p_2^* = 1$). Dosazením za p_2^* a za MRS_A získáme

   $$p_1^* = \frac{x_A^2(p_1^*, p_2^*)}{x_A^1(p_1^*, p_2^*)}.$$

   Substitucí (3) dostaneme

   $$p_1^* = \frac{x_A^2(p_1^*, p_2^*)}{2x_A^2(p_1^*, p_2^*)}$$
   $$p_1^* = \frac{1}{2}.$$

   (b) Rovnovážná alokace spotřebitele A je $(x_A^1(p_1^*, p_2^*), x_A^2(p_1^*, p_2^*))$. Poptávky spotřebitele A po statku 1 a 2 pro Cobb-Douglasovy preference jsou

   $$x_A^1 = \frac{m_A}{2p_1^*} \text{ a } x_A^2 = \frac{m_A}{2p_2^*},$$

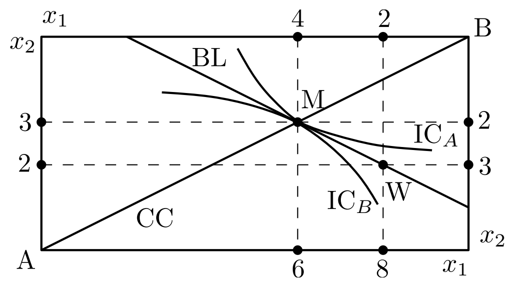
   kde je m_A je příjem spotřebitele A. Příjem spotřebitele A se rovná hodnotě vybavení spotřebitele A, tedy $m_A = p_1^*\omega_A^1 + p_2^*\omega_A^2 = 6$. Dosazením do poptávek získáme efektivní alokaci spotřebitel A

   $$(x_A^1(p_1^*, p_2^*), x_A^2(p_1^*, p_2^*)) = (6, 3).$$

   Analogicky vypočítáme rovnovážnou alokaci spotřebitele B

   $$(x_B^1(p_1^*, p_2^*), x_B^2(p_1^*, p_2^*)) = (4, 2).$$

   Řešení příkladu je znázorněno v následujícím obrázku. Bod W znázorňuje počáteční alokaci a bod M rovnovážnou alokaci. Smluvní křivka je označená zkratkou CC. Linie rozpočtu BL má sklon $-p_1^*/p_2^* = -1/2$.



2. Spotřebitelé A a B mohou nakupovat pouze dva statky, statek 1 a 2. Spotřebitel A má užitkovou funkci $U_A(x_A^1, x_A^2) = \min\{x_A^1, x_A^2\}$, kde x_A^1 je množství statku 1 a x_A^2 je množství statku 2. Spotřebitel B má užitkovou funkci $U_B(x_B^1, x_B^2) = x_B^1 + x_B^2$. Spotřebitel A má počáteční vybavení statku 1 $\omega_A^1 = 9$ a statku 2 $\omega_A^2 = 5$. Spotřebitel B má počáteční vybavení $(\omega_B^1, \omega_B^2) = (6, 5)$. Jaká je rovnovážná alokace spotřebitele A a B?

<u>Řešení</u>

Rovnováhu můžeme popsat pomocí vektoru cen (p_1^*, p_2^*), při kterých pro statek 1 i 2 platí, že součet poptávek spotřebitelů A a B se rovná součtu vybavení spotřebitelů A a B, tedy

$$x_A^1(p_1^*, p_2^*) + x_B^1(p_1^*, p_2^*) = \omega_A^1 + \omega_B^1$$
$$x_A^2(p_1^*, p_2^*) + x_B^2(p_1^*, p_2^*) = \omega_A^2 + \omega_B^2,$$

kde $x_A^1(p_1^*, p_2^*)$ je poptávka spotřebitele A po statku 1.

Statky 1 a 2 jsou pro spotřebitele A dokonalé komplementy. Bude poptávat spotřební koše se stejným množstvím obou statků, tedy $x_A^1 = x_A^2$. Naopak pro spotřebitele B jsou statky 1 a 2 dokonalé substituty. Spotřebitel B bude ochotný spotřebovávat oba statky pouze v případě, že se jeho mezní míra substituce rovná sklonu linie rozpočtu, tedy

$$MRS_B = -\frac{p_1^*}{p_2^*}.$$

Pokud si např. cenu statku 2 určíme jako numeraire ($p_2^* = 1$) a spočítáme mezní míru substituce spotřebitele B, rovnovážná cena statku 1 bude $p_1^* = 1$.

Poptávka spotřebitele A po statcích 1 a 2 je

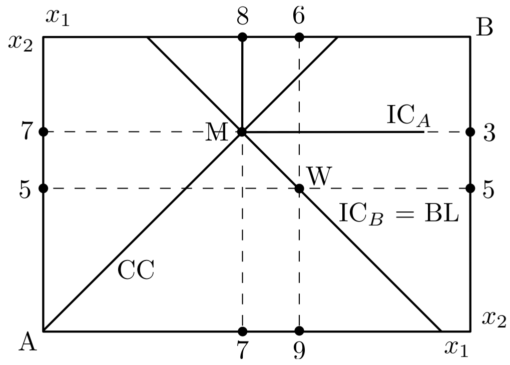
$$x_A^1(p_1^*, p_2^*) = x_A^2(p_1^*, p_2^*) = \frac{m_A}{p_1^* + p_2^*}.$$

Za příjem spotřebitele A m_A můžeme dosadit $m_A = p_1^*\omega_A^1 + p_2^*\omega_A^2$. Poptávka spotřebitele A po statcích 1 a 2 $x_A^1(p_1^*, p_2^*) = x_A^2(p_1^*, p_2^*)$ je

$$\frac{m_A}{p_1^* + p_2^*} = \frac{p_1^*\omega_A^1 + p_2^*\omega_A^2}{p_1^* + p_2^*} = \frac{9+5}{2} = 7.$$

Rovnovážná alokace spotřebitele A tedy bude $(x_A^1(p_1^*, p_2^*), x_A^2(p_1^*, p_2^*)) = (7, 7)$. Rovnovážná alokace spotřebitele B bude rozdíl mezi celkovým vybavením a alokací spotřebitele A, tedy $(x_B^1(p_1^*, p_2^*), x_B^2(p_1^*, p_2^*)) = (8, 3)$.

Řešení příkladu ukazuje následující obrázek. Bod W znázorňuje počáteční alokaci a bod M rovnovážnou alokaci spotřebitele. Sklon linie rozpočtu je stejný jako sklon indiferenčních křivek spotřebitele B. Smluvní křivka CC má tvar $x_A^2 = x_A^1$.



3. Spotřebitelé A a B mohou nakupovat pouze dva statky, statek 1 a 2. Spotřebitel A má kvazilineární užitkovou funkci $U_A(x_A^1, x_A^2) = x_A^1 + 4\sqrt{x_A^2}$, kde x_A^1 je množství statku 1 a x_A^2 je množství statku 2. Spotřebitel B má užitkovou funkci $U_B(x_B^1, x_B^2) = x_B^1 + 6\sqrt{x_B^2}$. Spotřebitel A má počáteční vybavení statku 1 $\omega_A^1 = 20$ a statku 2 $\omega_A^2 = 6$. Spotřebitel B má počáteční vybavení $\omega_B^1 = 60$ a $\omega_B^2 = 7$. Jaká je rovnovážná alokace spotřebitele A?

<u>Řešení</u>

Rovnováhu můžeme popsat pomocí vektoru cen (p_1^*, p_2^*), při kterých pro statek 1 a 2 platí, že součet poptávek spotřebitele A a B se rovná součtu vybavení spotřebitele A a B, tedy

$$x_A^1(p_1^*, p_2^*) + x_B^1(p_1^*, p_2^*) = \omega_A^1 + \omega_B^1$$

$$x_A^2(p_1^*, p_2^*) + x_B^2(p_1^*, p_2^*) = \omega_A^2 + \omega_B^2,$$

kde $x_A^1(p_1^*, p_2^*)$ je poptávka spotřebitele A po statku 1. Po dosazení vybavení spotřebitelů si můžeme vyjádřit poptávky spotřebitele B jako

$$x_B^1(p_1^*, p_2^*) = 80 - x_A^1(p_1^*, p_2^*)$$
$$x_B^2(p_1^*, p_2^*) = 13 - x_A^2(p_1^*, p_2^*). \tag{4}$$

Každý spotřebitel v rovnováze volí nejlepší koš, který si může dovolit. Indiferenční křivky obou spotřebitelů jsou hladké a konvexní (viz konkrétní tvar užitkové funkce). V dalším postupu budeme předpokládat, že bude dosaženo vnitřního řešení. Budou-li oba spotřebitelé v rovnovážné alokaci spotřebovávat kladná množství obou statků, je tento předpoklad splněn a nalezené řešení je rovnovážné. Pokud by některý ze spotřebitelů poptával záporné množství některého ze statků, nalezená alokace by nebyla rovnovážná. V tomto případě bychom museli hledat rohové řešení.

Nyní však hledáme takovou výslednou alokaci, ve které se indiferenční křivky spotřebitelů dotýkají linie rozpočtu. V této alokaci bude platit, že

$$\text{MRS}_A = \text{MRS}_B$$

$$-\frac{\sqrt{x_A^2(p_1^*, p_2^*)}}{2} = -\frac{\sqrt{x_B^2(p_1^*, p_2^*)}}{3}$$

$$3\sqrt{x_A^2(p_1^*, p_2^*)} = 2\sqrt{x_B^2(p_1^*, p_2^*)}$$

Substitucí (4) za poptávku spotřebitele B získáme

$$3\sqrt{x_A^2(p_1^*, p_2^*)} = 2\sqrt{13 - x_A^2(p_1^*, p_2^*)}$$

$$9x_A^2(p_1^*, p_2^*) = 52 - 4x_A^2(p_1^*, p_2^*)$$
$$13x_A^2(p_1^*, p_2^*) = 52$$
$$x_A^2(p_1^*, p_2^*) = 4$$

V rovnovážné alokaci je zároveň sklon linie rozpočtu rovný sklonu indiferenčních křivek obou spotřebitelů, tedy platí, že

$$-\frac{p_1^*}{p_2^*} = \mathrm{MRS}_A.$$

Pokud si rovnovážnou cenu statku 2 zvolíme jako numeraire ($p_2^* = 1$) a dosadíme za MRS_A, získáme

$$p_1^* = 1.$$

Spotřebitel A poptává 4 jednotky statku 2 a utrácí zbytek svého příjmu za statek 1. Pokud je jeho příjem vyšší nebo rovný výdajům na poptávané množství statku 2, jeho poptávka po statku 1 je

$$x_A^1(p_1^*, p_2^*) = \frac{m_A - p_2^* x_A^2(p_1^*, p_2^*)}{p_1^*}.$$

kde je příjem $m_A = p_1^*\omega_A^1 + p_2^*\omega_A^2 = 26$. Jeho spotřeba statku 1 je tedy

$$x_A^1(p_1^*, p_2^*) = 26 - 4 = 22.$$

Spotřebitel A tedy poptává spotřební koš

$$(x_A^1(p_1^*, p_2^*), x_A^2(p_1^*, p_2^*)) = (22, 4).$$

Vzhledem k velikosti celkového vybavení bude i spotřebitel B poptávat kladná množství obou statků. Dosáhli jsme vnitřního řešení u obou spotřebitelů. Nalezená alokace je tedy rovnovážná.