## *Vlastnosti užitkové funkce,* *geometrické znázornění*

**Pro užitkovou funkci $u(x)$ zavedenou výše pomocí relace „$\succeq$" přijmeme nyní některé vlastnosti, které jsou odvoditelné z vlastností preferenční relace „$\succeq$" a současně se ukazují jako opodstatněné téměř ve všech situacích spojených s rozhodováním spotřebitele na základě jeho preferenčních kritérií.**

**Definice 1** **Jestliže funkce $u(x)$ proměnných $x_1, x_2, ...., x_n$ má tyto vlastnosti**

**(U1)** $u(x)$ **je** ***reálná konečná nezáporná funkce*** **a platí pro ni** $u(0)=0.$.

**(U2)** $u(x)$ **je** ***neklesající ve všech proměnných*****, tzn. platí:**

**Jestliže** $x \leq z, x \neq z$, **pak** $u(x) \leq u(z)$. *nebo:*

**(U2s)** $u(x)$ **je** ***rostoucí ve všech proměnných*****, tzn. platí:**

**Jestliže** $x \leq z, x \neq z$, **pak** $u(x) < u(z)$.

**(U3)** $u(x)$ **je** ***spojitá*** **v celém** (n-rozměrném) **definičním oboru.**

**(U4)** $u(x)$ **je** ***kvazikonkávní*** **funkce.**

**(U5)** $u(x)$ **je** ***určena až na ryze monotónní (rostoucí) spojitou transformaci*** $\phi(u)$.

**potom o takové funkci $u(x)$ řekneme, že má vlastnosti** ***užitkové funkce*****.**

*Přesný význam vlastností* **(U4)** *a* **(U5)** *nyní vyložíme formulací příslušných definic.*

**Definice 2** **Funkce $n$ proměnných $G(x)$ se nazývá** ***konkávní*****, jestliže pro kterékoliv dva body/vektory $x$, $z$ z definičního oboru $D_r(G(x))$ platí nerovnost:**

$$G(x \cdot \lambda + (1-\lambda) \cdot z) \geq \lambda G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

**pro libovolné reálné číslo** $\lambda \in (0,1)$. Konkávnost tedy znamená, že **při průběhu argumentu úsečkou spojující body** $x$, $z$ komoditního prostoru **nesmí hodnota funkce $G(y)$ v žádném bodě $y$ této úsečky klesnout pod (prostorovou) úsečku spojující body** $G(x)$ a $G(z)$.

**Definice 3** **Funkce $n$ proměnných $H(x)$ se nazývá** ***kvazikonkávní*****, jestliže pro kterékoliv dva body $x$, $z$ z definičního oboru $D_r(H(x))$ platí nerovnost:**

$$H(x \cdot \lambda + (1-\lambda) \cdot z) \geq Min[H(x); H(z)]$$

**pro libovolné reálné číslo $\lambda \in (0,1)$. Kvazikonkávnost** tedy obrazně **znamená, že při průběhu argumentu úsečkou spojující body $x$, $z$** (v komoditním prostoru) **nesmí hodnota funkce $H(y)$ v žádném bodě $y$ na této úsečce klesnout pod menší z hodnot obou krajních bodů této úsečky** $H(x)$, resp. $H(z)$.

***Kvazikonkávnost je zde definovaná bez ohledu na existenci derivací*** *(resp. i spojitost)* ***funkce $n$ proměnných.*** *Později ukážeme, jak lze tuto vlastnost formulovat u funkcí, které jsou diferencovatelné.* ***Poznamenejme, že konkávní funkce je vždy kvazikonkávní, zatímco kvazikonkávní funkce nemusí být nutně konkávní. Prostorová úsečka spojující body $H(x)$ a $H(z)$ se*** *totiž v žádném případě* ***nemůže „propadnout" pod minimum*** *vzaté ze* ***svých krajních hodnot.***

*Vlastnost* **(U5)** ***konstatuje, že užitková funkce není určena jednoznačně,*** *ale že* ***za „v podstatě tutéž funkci"****, resp. funkci patřící do „téže třídy jako je výchozí $u(x)$"* ***lze považovat i libovolnou transformovanou funkci*** $(u(x))$***, pokud je transformace*** $\varphi(.)$ ***spojitá a rostoucí. Znamená to tedy, že užitkovou funkci uvažujeme „jen" v ordinálním smyslu, tzn., že při porovnání užitku, který přináší dvě komoditní kombinace $x$ a $z$, nerozhoduje, jaké jsou konkrétní číselné velikosti užitku $u(x)$ a $u(z)$, nýbrž jen to, zda vždy platí $u(x) > u(z)$ či $u(z) > u(x)$ nebo zda $u(x) = u(z)$.*** *Zatímco pro kterékoliv dvě komodity lze rozhodnout, která z nich je pro spotřebitele z hlediska přinášeného užitku lepší (popř. jsou-li indiferentní), nelze rozdíl mezi dvěma různými užitky (nejsou-li komodity indiferentní), kvantitativně vyčíslit tj. změřit. Každá transformace $\phi$ s sebou přináší obecně jinou „mezihladinovou" škálu pro měření rozdílů.*

**Poznámka 1** **Nejednoznačnost určení užitkové funkce ve smyslu (U5) má za důsledek to, že funkce** $2(u(x)+3)$, $(u(x)+3)^{\frac{2}{3}}$ $3 \cdot exp(0{,}5.u(x))$, $\sqrt{log\, u(x)+4}$ **při** $u(x) > 1$ **vyjadřují v podstatě totéž spotřebitelovo hodnocení**, které uplatňuje vůči několika komoditním kombinacím, které mu přinášejí užitek, jako původní $u(x)$ **.**

**V případě, že chceme pojem užitkové funkce využít k hlubší analýze spotřebitelova chování s využitím prvků marginální ekonomické analýzy** (a dále ve vztahu k cenám komodit a příjmu spotřebitele), **potřebujeme zavést nástroje diferenciálního počtu.**

**Proto přijímáme pro užitkovou funkci ještě dvě vlastnosti** (první přitom vyplývá z druhé) :

**(U6) Existují spojité 1. parciální derivace** $u_r = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_r}$ (tj. podle všech proměnných) **.**

**(U6*) Existují spojité 2. parciální derivace** $u_{rs} = \dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_r \partial x_s}$ (tj. pro $r, s = 1, 2, ...., n$).

**Význam uvažovaných vlastností (P1), (P2),(P3) a (P5) pro preferenční relaci „$\succeq$„ bude zřetelnější ve světle následujícího tvrzení :**

**Věta 1** **[G.Debreu, Eilenberg, Rader]**

**Jestliže preferenční relace „$\succeq$„ splňuje vlastnosti (P1), (P2), (P3) a (P5) v komoditním prostoru generovaném spočetnou bází otevřených množin, potom lze v tomto prostoru zkonstruovat spojitou užitkovou funkci $u(x)$.**

**Důkaz:**

**a) existence nechť $M_1, M_2$ je posloupnost otevřených množin ve spočetné bázi $X$. Pro jakékoliv $x$ uvažujme množinu $N(x) = \{n \mid z > x \ pro\ všechna\ \ z \in M_n\}$ a definujme funkci $v(x)$ vztahem**

$$v(x) = \sum_{n \in N(X)} 2^{-n}$$

**Jestliže $y \geq x$, potom $N(x) \subset N(y)$, takže $v(x) \leq v(y)$. Na druhé straně, jestliže $y < x$, pak existuje $n \in N(y)$ takové, že $x \in M_n$, ale nikoliv $n \in N(x)$. Tedy $N(x) \notin N(y)$ a $v(y) > v(x)$. Tedy $v$ je užitková funkce.**

b) spojitost Nechť $S$ označuje libovolnou množinu na rozšířené reálné přímce, která později bude brána jako $v(X)$. Množina $S$ stejně jako její doplněk $\nabla S$ může sestávat z nedegenerovaných a degenerovaných intervalů. Za „mezeru“ $S$ označíme maximální nedegenerovaný interval doplňku $\nabla S$, který má horní a dolní hranici v $S$. Podle věty vyvozené G.Debreuem [1964] platí, že jestliže $S$ je podmnožina rozšířené reálné přímky $R$, pak existuje rostoucí funkce $g$ z $S$ do $R$ taková, že všechny mezery $g(S)$ jsou otevřené množiny .

**Geometrická interpretace Užitková funkce je představována nadplochou v $n+1$-rozměrném prostoru $R_{n+1}$, v rámci něhož komoditní prostor $X$ generuje $n$ dimenzních složek a hodnotu užitku v poslední $n+1$ dimenzi. V této $n+1$-dimenzi „měříme“ užitek, který spotřebiteli přináší kterákoliv komoditní kombinace $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in X$. Geometrická místa bodů** (komoditních kombinací), **která poskytují stejný užitek** (na určité konstantní úrovni $u^*$) **vytvářejí** (obrazně řečeno) **„vrstevnice“, přičemž výška každé vrstevnice udává hodnotu užitku pro danou kombinaci komodit. Tyto vrstevnice budeme nazývat indiferenční křivky (ve vztahu k užitku).**

**Při této interpretaci lze o soustavě vrstevnic mluvit jako o tzv. indiferenční mapě tvořené těmito vrstevnicemi pro všechny možné hladiny užitku.[1] S ohledem na vlastnost (U5) je indiferenční mapa nezávislá na volbě transformační funkce $\varphi(u)$, neboli řečeno jinými slovy: průměty vrstevnic do $n$-rozměrného komoditního prostoru zůstávají při změně $\varphi(u)$ beze změn. Je tomu tak proto, že se změnou $\varphi$ se sice může změnit nominální hodnota užitku, ale preferenční srovnání libovolných dvou komodit se zachovává.**

**Poznámka 2 Lze ukázat, že také naopak ze znalosti indiferenční mapy tj. vrstevnic určených jako $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega$ pro libovolné $\omega$ ležící na některé vrstevnici, lze odvodit (opět až na transformující funkci $\varphi$) tvar užitkové funkce $u(x)$. V tomto směru je tedy znalost užitkové funkce a znalost indiferenční mapy rovnocenná.**

---

**Ekonomická historie zná mnoho polemik o oprávněnosti toho, zda lze na kvantifikaci užitku pohlížet i klasickým, tj. kardinálním způsobem. Přestože existuje řada** (i nekomplikovaných) **způsobů, jak přechod na kardinální vyjadřování provést, ukazuje ekonomická praxe, že důsledné kardinální pojetí měření užitku vyžaduje zpravidla vždy takové informace kvantitativní povahy, jejichž** (třeba jen subjektivně posuzovanou) **určitelnost či odhadnutelnost zajistit nelze. Zkuste např. ohodnotit, zda -** třeba na odlehlém místě a v zimním čase **- jsou pro nás teplé rukavice o 20%, 40% či 70% méně užitečné, než teplá zimní obuv,** máme-li se rukavicemi chránit před omrznutím rukou a teplými botami před promrznutím nohou. **Přitom už samotné ordinální srovnání může být určitým problémem. Ostatně provést úvahu s kardinální kvantifikací nejrůznějších užitkových preferenčních srovnání a následně vyslovit svůj názor či závěr může každý čtenář sám.**

## Dopad přijímaných vlastností užitkové funkce na tvar indiferenčních křivek

---

[1] **Ne ze všech hledisek je ovšem srovnání indiferenční mapy se skutečnou** (geografickou) **mapou plnohodnotné: Vrstevnice indiferenční mapy - viz obrázek č. ... - nemohou být uzavřené křivky vzhledem k vlastnosti (U2) užitkové funkce a v důsledku (U4) musí vytvářet konvexní útvary: tzn. úsečkové spojnice propojující dva body na téže indiferenční křivce nesmí protnout žádný bod s nižší hladinou užitku. Spotřebitel shlížející na mapu „od počátku souřadnic“ tedy vidí „vrstevnice“ pouze směrem „do kopce“, aniž by se v této mapě mohlo vyskytnout za vrcholem či hřebenem kopce** (tj. při zvýšených množstvích dosazovaných komodit) **opět klesání směrem dolů.**

**Vlastnost (U1)** $u(x)$ **je *reálná konečná funkce* a platí pro ni** $u(0)=0$. **Znamená mj., že počátek souřadnic nemůže ležet na žádné indiferenční křivce** kladné hodnoty**. To je ihned vidět z toho, že užitek v počátku definovaném souřadnicemi** $x_i = 0; i = 1,2,..,n$ **může být vždy jen nulový.**

**Vlastnost (U2) popř. (U2s) udává, že užitek při pohybu po křivkách indiferenční mapy ve směrech *doprava* a *nahoru* nemůže klesnout. (Indiferenční křivky, nejenže tedy nemohou být „uzavřené do sebe“, ale nemohou se ani – se zvětšujícím se množstvím komodity – „odklánět„ od souřadnicových os.** Další omezení na jejich tvar pak představuje kvazikonkávnost. **“Uzavřenost do sebe“ by znamenala nutně existenci** přinejmenším dvou **bodů** $x=(x_1,x_2),z=(z_1,z_2)$ **takových, že** $x_1 < x_2, z_1 < z_2$ **s vlastností** $u(x)=u(z)$, **což by bylo zřejmě v rozporu s vlastností U2(S).**

**Nesaturovanost preferenční relace pak koresponduje s tím, že *„užitek s přidáváním komoditního množství stále a bez omezení stoupá“* a že tedy (přinejmenším každá polopřímka/paprsek vycházející z počátku, zn. v bodech** $\lambda x; \lambda > 0$**) protíná indiferenční křivky odpovídající vyšším a vyšším hladinám užitku.**

**Vlastnost (U3) – spojitost zajišťuje, že indiferentní křivky jsou souvislé množiny nulové tloušťky („čáry“) a že tedy nejsou tvořeny množinami sestávajícími z izolovaných bodů.**

**Vlastnost (U4) - kvazikonkávnost zajišťuje, že indiferentní křivky jsou vyklenuty směrem k počátku a že množiny** $L(u)$, **představující *množiny bodů nad křivkou*, jsou konvexní útvary. To primárně plyne z konvexnosti preferenční relace.** Méně viditelným **důsledkem je** též **to, že mezní míra substituce mezi dvěma komoditami vykazuje (při pohybu ve směru *zleva shora -> doprava dolů*) monotónně klesající tendenci.**

**(U5)** $u(x)$ **je *určena až na ryze monotónní (rostoucí) spojitou transformaci*** $(u)$ **odpovídá pohledu na ordinální pojetí užitku. S každou užitkovou funkcí** $u(x)$ **patří do stejné „třídy” celá množina dalších, pokud každého reprezentanta této třídy je** z původní funkce **možné vytvořit pomocí spojité rostoucí transformace. Toto zobecnění nemění nic na tom, že po takovéto transformaci budou body původně ležící na téže indiferentní křivce na ní opět ležet. Této křivce bude ovšem odpovídat** (obecně a zpravidla) **vyšší nebo nižší hladina užitku. Znamená to mj., že v porovnání užitku dvou „komoditních“ bodů nemá smysl si pokládat otázku, „o kolik je jedna komoditní kombinace lepší než druhá“, ale jen otázku, „zda je jedna vyšší než druhá“, popř.** jsou-li kombinace rovnocenné, **“zda jsou obě hodnoceny shodně“.**

## Základní charakteristiky užitkové funkce

**Definice 5** **První parciální derivace užitkové funkce podle libovolné $r$-té komodity vyčíslená v pevném bodě $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots., x_n^0\right)$ je nazývána *mezním (marginálním) užitkem $r$-té komodity* v tomto bodě (kombinaci komodit). Mezní užitek značíme**

(2.11) $$u_r\left(x^0\right) = \frac{\partial u\left(x^0\right)}{\partial x_r}$$

*Podle předpokladu o ryzí monotónnosti užitkové funkce $u(x)$* **je mezní užitek vždy kladný. Požadavek je dost restriktivní, neboť nepřipouští** *(v realitě snadno myslitelné)* **úvahy o dosažení určité saturační úrovně „užitečnosti" některých komodit, po jejímž překročení se užitek pociťovaný spotřebitelem již nezvyšuje.** *Lze uvést řadu případů, kdy po nabytí jisté úrovně dané komodity užitek dokonce klesá.*

**Definice 6** **Podíl dvou mezních užitků (příslušných různým komoditám), vyčíslený v některém bodě $x^0$ komoditního prostoru $X$ se nazývá *mezní* (marginální) *míra substituce mezi $r$-tou a $s$-tou komoditou*. Značíme ji $m_{rs}$ a definujeme tedy jako**

(2.12) $$m_{rs}(x^0) = \frac{u_r(x^0)}{u_s(x^0)}$$

**Mezní míra substituce je ve vztahu k pořadí komodit reciproká. Obrátíme-li pořadí komodit v substitučním vztahu, obdržíme převrácenou hodnotu původní :** $m_{sr} = \frac{1}{m_{rs}}$**. Hodnota $m_{rs}$ závisí jednak na analytickém tvaru užitkové funkce, jednak** (a to často daleko silněji) **na bodě-komoditní kombinaci, kde ji vyčíslujeme.**

**Tvrzení 1** **Pro mezní míru substituce lze snadno odvodit vztah:** $m_{rs} = -\frac{dx_s}{dx_r}$

**ověření** **Vyjdeme z vyjádření totálního diferenciálu funkce** *a jeho rozkladu na dvě aditivní komponenty u funkce dvou (substitučních) proměnných*.

(2.13) $$du\left(x^0\right) = \frac{\partial u\left(x^0\right)}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial u\left(x^0\right)}{\partial x_s} dx_s$$ [2]

**Protože při pohybu po indiferenční křivce $u^* = konst$ se úroveň užitku nemění** (mění se však vzájemný poměr faktorů $x_r$ a $x_s$), **platí pro totální diferenciál** $du\left(x^0\right) = 0$. **Odtud zřejmě plyne** $-u_r dx_r = u_s dx_s$ **a dále**

(2.14) $$m_{rs} = \frac{u_r}{u_s} = -\frac{dx_s}{dx_r}$$ □ .

---

[2] Obecný výraz pro rozklad totálního diferenciálu $du(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} . dx_i$ se redukuje na dvojčlen, protože při neměnnosti jiných komodit než r-té a s-té zřejmě platí $dx_i = 0, i \neq r, s$.

**Mezní míra substituce mezi dvěma komoditami** (při neměnících se komoditách ostatních) **vyjadřuje množství zvýšení jedné komodity** (při snížení druhé komodity o jednotku množství) **potřebné k tomu, aby nově vytvořená komoditní kombinace poskytovala stejný užitek jako kombinace původní. Mezní míra substituce zůstane nezáporná: Jeden z diferenciálů $dx_r$ nebo $dx_s$ bude záporný, neboť přírůstek v množství jedné komodity musí být kompenzován úbytkem druhé** *a vice versa***.**

**Věta 2** ***Zákon klesající mezní míry substituce*** Při pohybu po indiferenční křivce[3] **platí**

**(2.15)** $m_{rs}(x_r, x_s) > m_{rs}(x_r^*, x_s^*)$ **pro** $x_r < x_r^*, x_s > x_s^*$ **taková,že** $u(x_1, x_s) = u(x_r^*, x_s^*)$

**právě tehdy, když je užitková funkce $u(x)$ *kvazikonkávní*.**

**Důkaz** **Ze zápornosti diferenciálu veličiny $dm_{rs}(x_r, x_s)$ při pohybu po indiferenční křivce vyvodíme pomocí věty o rozkladu totálního diferenciálu, že**

**(2.16)**
$$dm_{rs} = \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_s} dx_s < 0$$

**Po dělení $dx_r$** (kterýžto diferenciál je při pohybu ve sledovaném směru kladný, čímž se nemění povaha nerovnosti) **lze klesající tendenci mezní míry substituce vyjádřit vztahem**

**(2.17)**
$$\frac{\partial m_{rs}}{\partial x_r} - m_{rs}\frac{\partial m_{rs}}{\partial x_s} < 0$$

**Mezní míra substituce $m_{rs}$ bude klesající právě tehdy, jestliže bude její diferenciál** (při pohybu po indiferenční křivce) **záporný. V následujícím budeme vyšetřovat, jakým vztahům mezi charakteristikami užitkové funkce bude podmínka (2.15) odpovídat. Převedeme tedy postupně diferenciální charakteristiky obsažené v (2.17) na výrazy obsahující charakteristiky užitkové funkce.**

**Zapíšeme-li výraz pro $m_{rs}$ v definičním vyjádření $m_{rs} = \dfrac{u_r}{u_s}$ a provedeme-li výpočty parciálních derivací, dostáváme ekvivalentní vyjádření**

$$\frac{\partial\left(\frac{u_r}{u_s}\right)}{\partial x_r} - \frac{u_r}{u_s}\cdot\frac{\partial\left(\frac{u_r}{u_s}\right)}{\partial x_s} < 0$$ **, které přejde po úpravách do podoby**

$$\frac{u_s u_{rr} - u_r u_{sr}}{u_s^2} - \frac{u_r}{u_s}\cdot\frac{u_s u_{rs} - u_r u_{ss}}{u_s^2}$$ **resp. na tvar**

**(2.18)**
$$\frac{u_s^2 u_{rr} - 2\cdot u_r u_s u_{rs} + u_r^2 u_{ss}}{u_s^3} < 0$$

---

[3]rozuměno „shora zleva“ směrem „dolů doprava“. Znázornění je voleno tak, aby statek $x_r$ ležel na horizontální a statek $x_s$ na vertikální souřadnicové ose. Bod $(x_r, x_s)$ leží „nalevo a výš“ oproti lokalizaci bodu $(x^*_r, x^*_s)$

**Během odvozování jsme uplatnili standardní pravidla derivování zlomků pro mezní užitky $u_r(x_1,....,u_n)$ , $u_s(x_1,....,u_n)$ , kdy se mění pouze r-tá a s –tá komodita.**

**Znaménko levé strany (2.18) udává jeho čitatel, neboť jmenovatel je s ohledem na kladný mezní užitek $u_s$ kladný.**

**Zapíšeme-li čitatel (2.18) jako „kvadratickou formu„ s proměnnými $u_r$, $u_s$ a koeficienty $u_{rr}$, $u_{rs}$, $u_{ss}$ dostaneme (2.18) jako nerovnost**

**(2.19)** $$[u_s \quad u_r]\cdot\begin{bmatrix} u_{rr} & -u_{rs} \\ -u_{rs} & u_{ss}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_s \\ u_r\end{bmatrix} < 0$$

**Poznámka:** **Jiným zápisem podmínky (2.19) je vyjádření**

**(2.20)** $$\begin{vmatrix} 0 & u_r & u_s \\ u_r & u_{rr} & u_{rs} \\ u_s & u_{rs} & u_{ss}\end{vmatrix} > 0$$ .

**Podmínka pro klesající mezní míru substituce je tedy totožná s podmínkou pro kvazikonkávnost výchozí užitkové funkce** (je-li tato dvakrát spojitě diferencovatelná )**.**

**Jinými slovy: Jestliže předpokládáme pro užitkovou funkci vlastnost *kvazikonkávnosti*, budeme mít zaručeno, že mezní míra substituce bude mít při pohybu po indiferenční křivce *zleva/shora* $\Rightarrow$ *doprava/dolů* klesající tendenci.**

Uvedené lze ilustrovat na obrázku 2 : Přípustné podoby indiferenční křivky vymezující hladinu užitku $u^0$ nalezneme na obrázku [2a], kde je patrné, že při pohybu ve směru zleva/shora $\Rightarrow$ doprava/dolů se vždy zachovává klesající tendence poměru $\frac{dx_2}{dx_1}$.

Naopak na obrázku [2b] je tato relace porušena mezi („inflexními“) body B a C, kde je indiferenční křivka vyklenuta směrem „od počátku souřadnic“. (Povšimněme si však, že i v těchto případech první souřadnice bodu pohybujícího se v uvedeném směru po indiferenční křivce roste, zatímco druhá klesá). Klesající mezní míra substituce je tedy silnější vlastností, než pouhé konstatování, že $m_{rs} > 0$. Jak je patrné, v případech 2c,2d není množina $L(u^0)$ konvexní. Později ukážeme), že kvazikonkávnost má přímý vztah ke konvexnosti množin $L(u^0)$.

**Zavedené předpoklady (U1) - (U5),(U6*) umožňují zavést** pro další úvahy velmi užitečnou **čtvercovou *matici* $U$ *řádu* $n+1$ *sestávající z prvních a druhých parciálních derivací užitkové funkce* $u(x_1,...,x_n)$** konkrétně **tvaru**

$$U = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

**Matice $U$ je tedy tvořena** – vedle nulového prvku vlevo nahoře - **vektorem prvních parciálních derivací –** tzv. **gradientem** (s vesměs kladnými prvky) **v dalších polích 1. řádku a 1. sloupce a maticí druhých parciálních derivací (tzv. Hessovou maticí) v ostatních polích. Je vzhledem k vlastnosti (U6*) symetrická (obsahuje tedy nanejvýš $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ různých nenulových prvků).**

**Platí dále, že pokud je původní užitková funkce $u(x_1,...,x_n)$ *kvazikonkávní*, pak má tato matice** následující **vlastnost: posloupnost jejích determinantů mění znaménko s přidáním každé komodity** do uvažovaného komoditního podprostoru, **tzn.**

$$U^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} > 0 \qquad U^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} < 0 \ \ldots$$

$$U^{(n)} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} > 0$$

**Jinými slovy: okolnost, zda je či není daní užitková funkce kvazikonkávní, lze vyšetřit právě zjištěním znamének této posloupnosti jejích determinantů (je to v podstatě alternativní vyjádření *kvazikonkávnosti*, pokud je vyšetřovaná funkce dvakrát spojitě diferencovatelná). Determinant $U^{(1)}$ má hodnotu $-u_1^{\,2}$), takže jeho znaménko je automaticky „ - „ ).**

Poznámka: **Znaménka příslušných determinantů jsou nezávislá na pořadí, ve kterém jednotlivé statky vstupují do úvahy.**

## Monotónní transformace užitkové funkce

**Užitková funkce je vlastností (U5) určena až na spojitou rostoucí transformaci $g(u)$. V dalším ukážeme, do jaké míry volba transformace** (mající za následek nejednoznačnost $u$ ) **ovlivňuje veličiny jako je mezní užitek a mezní míra substituce.**

a) ***mezní užitek (transformované) užitkové funkce*** $g(u(x))$ se snadno odvodí z pravidla pro derivování složené funkce :

$$g_r = \frac{\partial g(u(x))}{\partial x_r} = g'(u) \cdot u_r, \text{ kde } \quad u_r = \frac{\partial u(x)}{\partial x_r}$$

**Hodnota mezního užitku při transformaci je závislá na volbě transformující funkce. Protože $g(u)$ je rostoucí funkce, bude** „transformovaný“ **mezní užitek** rovněž **kladný.**

b) ***mezní míra substituce*** *transformované* ***užitkové funkce*** $g(u(x))$ se získá podobně

$$m_{g_{rs}} = \frac{g_r(u(x))}{g_s(u(x))} = \frac{\dfrac{\partial g(u(x))}{\partial x_r}}{\dfrac{\partial g(u(x))}{\partial x_s}} = \frac{g'(u) \cdot u_r}{g'(u) \cdot u_s} = \frac{u_r}{u_s}$$

***Hodnota mezní míry substituce je na volbě transformující funkce nezávislá.***

Jinými slovy: **kvantitativní ocenění vztahu mezi dvěma substitučními komoditami není volbou transformující funkce dotčeno. Při transformaci se zachovává vzájemná poloha „vrstevnic“ určujících indiferenční křivky : transformace nemění nic na substitučním vztahu obou komodit při pohybu po indiferenční křivce.**

c) ***druhé parciální derivace (transformované) užitkové funkce*** $g(u(x))$ se změní takto:

$$\frac{\partial^2 g(u(x))}{\partial x_r \partial x_s} = \frac{\partial(g'(u(x)) \cdot u_r)}{\partial x_s} = g'(u) \cdot \frac{\partial u_r(x)}{\partial x_s} + g''(u)\frac{\partial u(x)}{\partial x_s} \cdot u_r = g'(u) \cdot u_{rs} + g''(u) \cdot u_s \cdot u_r$$

d) $U$ ***a její determinant*** $|U|$ ***se změní provedením*** *rostoucí spojité* ***transformace*** takto

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & g'(u) \cdot u_1 & & & g'(u) \cdot u_n \\ g'(u) \cdot u_1 & g'(u) \cdot u_{11} + g''(u).u_1^2 & & & g'(u) \cdot u_{n1} + g''(u).u_1 u_n \\ g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_{12} + g''(u).u_1 u_2 & & & g'(u) \cdot u_{n2} + g''(u).u_2 u_n \\ g'(u) \cdot u_3 & g'(u) \cdot u_{13} + g''(u).u_1 u_3 & & & g'(u) \cdot u_{n3} + g''(u).u_3 u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g'(u) \cdot u_n & g'(u) \cdot u_{1n} + g''(u).u_1 u_n & & & g'(u) \cdot u_{nn} + g''(u).u_n^2 \end{pmatrix}$$

**přičemž** příslušný ***determinant*** $|G|$ ***matice*** $G$ **má tvar**

$$|G| = [g'(u)]^{n+1} \cdot |U|$$

**ověření:** **Abychom určili hodnotu determinantu $|G|$, *resp.*** *pokusili se ho porovnat s determinantem* $|U|$, **rozložíme $|G|$ pomocí známého součtového pravidla. To říká, že pokud je** např. **první sloupec čtvercové matice $A = \{a_{ij}\}$ $\boldsymbol{a}_1$ součtem dvou vektorů $\alpha$ a $\beta$, pak je determinant $|A|$ roven součtu dvou determinantů čtvercových matic se sloupci $(\alpha, a_2, a_3, ...., a_n)$ a $(\beta, a_2, a_3, ...., a_n)$. Aplikováno na náš případ, kdy lze 2. až $n$-tý sloupec matice $G$ rozložit na součtové členy, dostáváme :**

$$|a_1, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, ...., \alpha_n + \beta_n| =$$
$$|a_1, \alpha_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, ...., \alpha_n + \beta_n| + |a_1, \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, ...., \alpha_n + \beta_n| =$$
$$|a_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \beta_3, ...., \alpha_n + \beta_n| + |a_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, ...., \alpha_n + \beta_n| +$$
$$|a_1, \beta_1, \alpha_2, \alpha_3 + \beta_3, ...., \alpha_n + \beta_n| + |a_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, ...., \alpha_n + \beta_n| \text{ atd.}$$

**Získáme tak $2n-1$ determinantů, které však až na jeden neovlivní výsledný výraz. Pouze první z nich, který má tvar**

$$|G_1| = \begin{vmatrix} 0 & g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\ g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_{11} & g'(u)\cdot u_{21} & g'(u)\cdot u_{31} & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1} \\ g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_{12} & g'(u)\cdot u_{22} & g'(u)\cdot u_{32} & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2} \\ g'(u)\cdot u_3 & g'(u)\cdot u_{13} & g'(u)\cdot u_{23} & g'(u)\cdot u_{33} & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u)\cdot u_n & g'(u)\cdot u_{1n} & g'(u)\cdot u_{2n} & g'(u)\cdot u_{3n} & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn} \end{vmatrix}$$

**je nenulový s hodnotou $[g'(u)]^{n+1}\cdot|U|$. Všechny ostatní determinanty se vyznačují vlastností, že aspoň dva jejich sloupce jsou lineárně závislé a jejich hodnota je tedy nulová. Přiblížíme to na rozkladu do čtyř součtových členů**

$$|G| = |G_1| + |G_2| + |G_3| + |G_4|,$$

$$|\boldsymbol{G}_2| = \begin{vmatrix} 0 & g'(u)\cdot u_1 & 0 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\ g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_{11} & g'(u).u_2 u_1 & g'(u)\cdot u_{13}{}' + g''(u).u_1 u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1} + g''(u).u_1 u_n \\ g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_{12} & g'(u)\cdot u_2.u_2 & g'(u)\cdot u_{23}{}' + g''(u).u_2 u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2} + g''(u).u_2 u_n \\ g'(u)\cdot u_3 & g'(u)\cdot u_{13} & g'(u)\cdot u_2.u_3 & g'(u)\cdot u_{33}{}' + g''(u).u_3{}^2 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3} + g''(u).u_3 u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u)\cdot u_n & g'(u)\cdot u_{1n} & g'(u)\cdot u_2.u_3 & g'(u)\cdot u_{n3}{}' + g''(u).u_n u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn} + g''(u).u_n{}^2 \end{vmatrix} = 0$$

***v důsledku lineární závislosti 1. a 3. sloupce,*** *které jsou násobky vektoru* $(0, u_1, u_2, ...., u_n)$,

$$|\boldsymbol{G}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g'(u).u_2 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\ g'(u)\cdot u_1 & g''(u)\cdot u_1.u_1 & g'(u).u_2 & g'(u)\cdot u_{13}{}' + g''(u).u_1 u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1} + g''(u).u_1 u_n \\ g'(u)\cdot u_2 & g''(u)\cdot u_1.u_2 & g'(u)\cdot u_{22} & g'(u)\cdot u_{23}{}' + g''(u).u_2 u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2} + g''(u).u_2 u_n \\ g'(u)\cdot u_3 & g''(u)\cdot u_1.u_3 & g'(u)\cdot u_{23} & g'(u)\cdot u_{33}{}' + g''(u).u_3{}^2 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3} + g''(u).u_3 u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u)\cdot u_n & g''(u)\cdot u_1.u_n & g'(u)\cdot u_{2n} & g'(u)\cdot u_{n3}{}' + g''(u).u_n u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn} + g''(u).u_n{}^2 \end{vmatrix} = 0$$

***v důsledku lineární závislosti 1. a 2. sloupce,** které jsou násobky vektoru* $(0, u_1, u_2, \ldots u_n)$,

$$|G_4| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\ g'(u)\cdot u_1 & g''(u)\cdot u_1.u_1 & g''(u).u_2.u_1 & g'(u)\cdot u_{13} + g''(u).u_1.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1} + g''(u).u_1.u_n \\ g'(u)\cdot u_2 & g''(u)\cdot u_1.u_2 & g''(u).u_2.u_2 & g'(u)\cdot u_{23} + g''(u).u_2.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2} + g''(u).u_2.u_n \\ g'(u)\cdot u_3 & g''(u)\cdot u_1.u_3 & g''(u).u_2.u_3 & g'(u)\cdot u_{33} + g''(u).u_3^2 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3} + g''(u).u_3.u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u)\cdot u_n & g''(u)\cdot u_1.u_n & g''(u).u_2.u_n & g'(u)\cdot u_{n3} + g''(u).u_n.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn} + g''(u).u_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

tentokrát **v důsledku lineární závislosti 1., 2. i 3. sloupce: každý z těchto sloupců je opět násobkem vektoru** $(0, u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

**Z předchozího tedy vyplývá, že můžeme psát**

$$|G| = [g'(u)]^{n+1} \cdot |U| \quad . \qquad \square \, .$$

**Odtud je patrné, že i když jsou hodnoty determinantů** $|U|$ **a** $|G|$ **obecně různé, zachovává po transformaci *spojitou rostoucí funkcí* determinant** $|G|$ **znaménko souhlasné s původním determinantem** $|U|$.

**Znamená to** dále to, **že pokud je původní užitková funkce** $u(x)$ **kvazikonkávní, bude i takto transformovaná užitková funkce** $g(u(x))$ zaručeně také **kvazikonkávní, protože kvazikonkávnost je spojena jen s chováním znamének** (ne už hodnot) **posloupnosti determinantů (ta se** – jak uvedeno výše - **střídají s přidáním každé další komodity, přičemž nezáleží na pořadí přidávaných komodit.). Tedy k zajištění kvazikonkávnosti** $g(u(x))$ **musí pro jednotlivé subdeterminanty matice**

$$G = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \\ g_1 & g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} \\ g_2 & g_{12} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ g_3 & g_{13} & g_{23} & g_{33} & \cdots & g_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & g_{1n} & g_{2n} & g_{3n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

**platit podmínka**

$$G^{(n)} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \\ g_1 & g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} \\ g_2 & g_{12} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ g_3 & g_{13} & g_{23} & g_{33} & \cdots & g_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & g_{1n} & g_{2n} & g_{3n} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} > 0 \, .$$

**Poznámka 3 - lineární transformace užitkové funkce**

**Zvolme nejjednodušší spojitou rostoucí transformační funkci, kterou je lineární funkce (s kladným koeficientem u lineárního členu), tedy $g(u) = au + b$, kde $a > 0$, $b$ libovolné. Pak platí**

$$\frac{\partial g(u)}{\partial x_r} = a \cdot u_r, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\partial^2 g(u)}{\partial x_r \partial x_s} = a \cdot u_{rs}$$

**Znamená to tedy, že jak mezní užitek, tak prvky matice 2. parciálních derivací se od původních prvků matice $U$ liší pouze vynásobením kladnou konstantou $a$. Příslušný determinant $|G|$ je pak $a^{n+1}$ - násobkem původního determinantu $|U|$, tj.**

$$|G| = a^{n+1}|U|$$

**Definice 7** **Jestliže ve třídě** ordinálních **užitkových funkcí $g(u(x))$, které jsou ekvivalentní s $u(x)$ po lineární transformaci $g$, existuje užitková funkce $v(x)$ taková, že platí**

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

**pak říkáme, že $u(x)$ je aditivně rozložitelná užitková funkce.**

**V takovémto případě lze vyjádřit individuální přínosy komodit k celkovému užitku samostatně pro každou komoditu, jinými slovy, celkový užitek je pak součtem těchto individuálních přínosů.**

## Doplněk Konvexnost, konkávnost, kvazikonvexnost a kvazikonkávnost

**Řekneme, že spojitá funkce $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ n proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$** (definovaná **na konvexní množině X ) je pro dva body $x, z \in X$** (aniž víme, zda $G(x) < G(z)$ nebo naopak)

**(A1)** ryze **konvexní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) < \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

**(B1)** ryze **konkávní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) > \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

**(C1)** ryze **kvazikonvexní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) < Max[G(x), G(z)]$$

**(D1)** ryze **kvazikonkávní, jestliže platí** ostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) > Min[G(x), G(z)]$$

ve všech případech **pro libovolné skalární $\lambda \in (0,1)$ .**

**(A2) konvexní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \le \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

**(B2) konkávní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \ge \lambda.G(x) + (1-\lambda).G(z)$$

**(C2) kvazikonvexní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \le Max[G(x), G(z)]$$

**(D2) kvazikonkávní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(\lambda.x + (1-\lambda).z) \ge Min[G(x), G(z)]$$

ve všech případech **pro libovolné skalární $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$ .**

**Je-li známo, ve kterém z obou bodů je hodnota funkce $G(.)$ větší, např. platí-li $G(x) < G(z)$ , pak lze výše uvedené definice modifikovat např. takto:**

**(A3) konvexní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \le 0{,}5.G(x) + 0{,}5.G(z)$$

**(B3) konkávní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \ge 0{,}5.G(x) + 0{,}5.G(z)$$

**(C3) kvazikonvexní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \le G(z)$$

**(D3) kvazikonkávní, jestliže platí** neostrá **nerovnost**

$$G(x/2 + z/2) \ge G(x) \quad .$$