# 2.4 Příklady dvoukomoditních užitkových funkcí

V této části uvedeme několik příkladů z oblasti běžných analytických tvarů, které vyšetříme z hlediska vhodnosti jejich použití jako užitkové funkce. Odvodíme dále u nich analytické tvary pro nepřímou užitkovou funkci, výdajovou funkci a pro ***poptávkové funkce po komoditách***, a to jak ***v Hicksově***, tak ***v Marshallově tvaru***. Odvození poptávkových funkcí provedeme buď **přímo**u cestou (na základě **využití nutných podmínek pro nalezení rovnovážného bodu**), nebo **nepřímo** z **nepřímé užitkové funkce** (pomocí ***Royovy identity***) popř. z **výdajové funkce** (pomocí ***Shephardova lemmatu***). Poznamenejme, že z každého jednoduchého funkčního tvaru lze odvodit řadu dalších, uplatníme-li na tento tvar spojitou rostoucí transformaci s vědomím, že (přímá) užitková funkce je určena pouze s ordinální přesností ve smyslu vlastnosti **(U5)** obecné užitkové funkce.

## 4.1 Lineární užitková funkce

Nejjednodušší možnou specifikací užitkové funkce je lineární funkce tvaru

**(4.1)**
$$u(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + .... + \alpha_n x_n$$

s těmito omezeními na parametry : konstantní člen = 0 (nutné pro platnost $u(\boldsymbol{0}) = 0$) a $\alpha_i > 0$ $i = 1, 2, ...., n$ (vzhledem k požadavku kladných mezních užitků). Jak se lze ihned přesvědčit, při těchto omezeních vyhovuje lineární tvar všem požadavkům (U1)-(U4),(U6) kladeným na užitkovou funkci. Zřejmě dále $u_r(x) = \alpha_r$ pro všechna $r$ nezávisle na $\boldsymbol{x}$, $m_{rs} = \dfrac{\alpha_r}{\alpha_s}$ (tedy rovněž nezávisle na $\boldsymbol{x}$) a $u_{rs}(\boldsymbol{x}) = 0$ pro všechna $r, s = 1, 2, ...., n$. Jak mezní užitky, tak mezní míra substituce mezi kterýmikoliv dvěma statky jsou tedy nezávislé na poloze kombinace statků v komoditním prostoru.

Přesto lineární tvar není jako užitková funkce vhodný a v aplikacích se lineární užitková funkce neužívá. Proč tomu tak je, napoví **obrázek [2A]**, který vystihuje situaci pro dvě komodity $x_1$, $x_2$ : Na něm jsou zakresleny tři indiferenční křivky odpovídající hladinám užitku $u^1$, $u^2$, $u^3$ při $u^1 < u^2 < u^3$. Výdajové omezení tvaru $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$ je představováno úsečkou $AB$ spojující body $A \equiv \left[\dfrac{M}{p_1}; 0\right]$, $B \equiv \left[0; \dfrac{M}{p_2}\right]$. Rovnovážný bod je charakterizován stavem, v němž se některá z indiferenčních křivek (při konstantní úrovni příjmu $M$ a daných cenách $p_1$, $p_2$) při přibližování zprava shora k počátku poprvé dotkne výdajového omezení. V zakresleném případě je to indiferenční křivka na hladině $u^1$ dotýkající se výdajového omezení v bodě $A$.

**Mezní míra substituce** je u dvoukomoditní lineární funkce rovna podílu $m_{12} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ a je tedy konstantní v celém komoditním prostoru. Dále je patrné, že bod $A$ bude rovnovážným bodem právě tehdy, jestliže mezní míra substituce bude větší než poměr relativních cen, tedy při $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} > \dfrac{p_1}{p_2}$. Pokud tomu bude naopak, nastane rovnováha (ustálení poptávky na rovnovážné úrovni) v bodě $B$. Ve výjimečné situaci, kdy platí $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$, bude existovat nekonečná množina rovnovážných bodů představovaných celou úsečkou $AB$. Jestliže cenový poměr $\frac{p_1}{p_2}$ bude mít hodnotu blízkou $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, pak to bude znamenat, že kolísání kolem $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ povede ke skokovým přesunům rovnovážného bodu z $A$ do $B$ a naopak.

***Nevhodnost uplatnění lineární funkce jako užitkové vyplývá*** tedy ***z následujícího*** :

**a) Substituce mezi komoditami probíhá zpravidla obtížněji, než jak udává konstantní poměr** $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

Zpravidla při dosažení určité (kriticky malé) hodnoty jedné z komodit množství druhé, která ji má nahradit, výrazně vzrůstá, čímž se substituce stává stále obtížnější.

**b) Není typické, aby** - až na výjimku $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ - **bylo rovnovážné řešení** charakterizováno **stavem, kdy je poptáván jen jeden statek** ($x_1$ v případě, že rovnováha nastane v $A$, resp. $x_2$, pokud je rovnováha v $B$).

**c)** Podobně **nepřirozené je alternování** (přeskakování) **polohy rovnovážného bodu** (z $A$ do $B$ a naopak) **při malé změně poměru** $\frac{p_1}{p_2}$ **v okolí hodnoty** $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Odporuje to pozorovaným setrvačnostem v chování spotřebitelů ve vztahu k nakupovaným statkům. Navíc, rovnováha je při uvedeném poměru relativních cen vysoce nestabilní.

**Nepřímou užitkovou funkci příslušnou k lineární užitkové funkci** nelze odvodit z nutných podmínek pro polohu rovnovážného bodu, protože mezní užitky neobsahují jako argumenty příslušné souřadnice (ani pro $x_1$ ani pro $x_2$). Můžeme však vyjít přímo ze souřadnic, kterými je definován rovnovážný bod (viz též obrázek). Je však třeba přitom rozlišit dva případy:

**a)** je-li nakupován pouze první statek, pak je rovnováha určena bodem $A \equiv \left[\frac{M}{p_1};0\right]$,

**Poptávková funkce v *Marshallovském vyjádření*** má tedy tvar

**(4.2)** $${}^{M}x_1 = \frac{M}{p_1}$$

Nepřímou užitkovou funkci obdržíme snadno dosazením této poptávky do (přímé) **užitkové funkce**.

**(4.3)** $$\Psi(M, p_1, p_2) = \frac{\alpha_1 M}{p_1}$$

**Výdajovou funkci** pak získáme substitucí, při níž zapíšeme levou stranu **(4.3)** jako ${}^{0}u$ a kde na pravé straně téhož výrazu nahradíme výdaj M výrazem $M = E({}^{0}u, p)$. Odtud snadno získáme výraz

**(4.4)** $$E({}^{0}u, p) = \frac{p_1}{\alpha_2}.{}^{0}u$$

**b)** je-li nakupován pouze druhý statek, pak je rovnováha určena bodem $B \equiv \left[0;\frac{M}{p_2}\right]$.

**Poptávková funkce v *Marshallovském vyjádření*** má nyní tvar

**(4.5)** $${}^{M}x_2 = \frac{M}{p_2}$$

Nepřímou užitkovou funkci a výdajovou funkci obdržíme stejným postupem jako dříve :

**(4.6A,B)** $$\Psi(M, p_1, p_2,) = \frac{\alpha_2 M}{p_2} \qquad E({}^0u, p) = \frac{p_2}{\alpha_2} . {}^0u$$

**Poznámka 1** Třetí případ představovaný situací, kdy je rovnovážný „bod" tvořen celou úsečkou **AB**, není třeba uvažovat zvlášť , neboť jde o jistý „průnik" obou předchozích. V něm platí $\alpha_1 p_2 = \alpha_2 p_1$ .

**Odvození poptávkových funkcí** je možné provést též nepřímo, vyjdeme-li **z** již známé **nepřímé užitkové nebo výdajové funkce.** Protože platí

**(4.7)** $$\frac{\partial \Psi(P,M)}{\partial M} = \frac{\alpha_i}{p_i} \quad \text{a podobně} \quad \frac{\partial \Psi(P,M)}{\partial p_i} = -\frac{\alpha_i M}{p_i^{\,2}} \qquad \text{pro } i=1,2$$

obdržíme výrazy **(4.2)** resp. **(4.5)** též aplikací ***Royovy identity***, obdobně jako bychom uplatněním ***Shephardova lemmatu*** na **(4.4)** resp. **(4.6B)** dostali vztahy

**(4.8)** $${}^H x_i = \frac{\partial E({}^0u, p)}{\partial p_i} = \frac{{}^0u}{\alpha_i}$$ , z nichž po dosazení za ${}^0u = \frac{\alpha_i M}{p_i}$ máme ihned **(4.2)**, **(4.5)**.

## 4.2 Kvadratická užitková funkce

Ani tento funkční tvar není, jak níže ukážeme, jako užitková funkce vhodný: $n$**-komoditní ryze kvadratická užitková funkce** může být zapsána ve tvaru

**(4.9)**
$$u(x)=\alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2+....+\alpha_n x_n^2$$

při $\alpha_i>0$, $i=1,2,....,n$ zajišťujících kladné mezní užitky. Absence konstantního členu vyplývá opět z podmínky $u(\mathbf{0})=0$. Ryze kvadratická funkce s kladnými koeficienty je konečná, nezáporná, rostoucí ve všech komoditách, spojitá a neomezeně diferencovatelná, není však kvazikonkávní. K přiblížení negativního důsledku nesplnění posledně jmenované vlastnosti stačí uvažovat **dvoukomoditní případ**

**(4.10)**
$$u(x)=\alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2\ ,$$

jehož geometrickým vyjádřením je elipsa tvaru

$$\alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2=u^0$$ resp.

**(4.11)**
$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_1}}\right)^2}+\frac{x_2^2}{\left(\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_2}}\right)^2}=1$$

tedy se středem v počátku a s poloosami $\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_1}}$ resp. $\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_2}}$. Na obrázku [2B] je zakreslena situace se třemi indiferenčními křivkami na hladinách užitku $u^1$, $u^2$, $u^3$ při $u^1<u^2<u^3$. Výdajové omezení je opět znázorněno úsečkou $AB$ s rovnicí $p_1x_1+p_2x_2=M$ spojující body $A\equiv\left[\frac{M}{p_1};0\right]$, $B\equiv\left[0;\frac{M}{p_2}\right]$. Bod $Q$, v němž se indiferenční křivka $u^1$ dotýká výdajového omezení, však není rovnovážným bodem v plnohodnotném slova smyslu. Naopak, posun z něj po výdajovém omezení v obou možných směrech vede k dosažení bodů (komoditních kombinací), které leží na indiferenčních křivkách o vyšších hladinách užitku, což je v protikladu s požadavkem na vlastnost rovnovážného bodu. Lze pozorovat pouze to, že jsou-li vybrány komodity v množstvích odpovídajících souřadnicím bodu $Q$, potom úbytek množství jednoho či druhého statku bude znamenat vždy přechod na nižší indiferenční křivku. To však nemá žádný vztah ke kritériu požadovanému pro rovnovážný bod, aby se komodity nakupovaly v poměrech, které zajišťují nejlevnější možný výdaj (pro danou hladinu užitku).

Na uvedeném obrázku lze též dobře ilustrovat rozdílnost mezi rostoucí a kvazikonkávní funkcí. Uvažovaná ryze kvadratická funkce s kladnými $\alpha_i$, $i=1,2$ je neklesající (je dokonce rostoucí) v každé proměnné, není však kvazikonkávní. Množině dvoukomoditních rostoucích funkcí odpovídá třída indiferenčních křivek, u kterých průběh (zleva shora) po kterékoliv z nich je charakterizován klesající hodnotou $x_2$ a rostoucí hodnotou $x_1$, zatímco ***kvazikonkávnost*** navíc mj. vyžaduje, aby mezní míra substituce při tomto pohybu kontinuálně klesala (což u kvadratické funkce splněno není) a aby všechny indiferenční křivky byly pro danou užitkovou funkci vždy "vyklenuty směrem k počátku".

Mezní užitky u ryze kvadratické funkce jsou $u_1 = 2\alpha_1 x_1$, $u_2 = 2\alpha_2 x_2$ (a jsou tedy závislé na bodu komoditního prostoru, v němž jsou vyčísleny), mezní míra substituce je rovna $\frac{\alpha_1 x_1}{\alpha_2 x_2}$ (a je tedy rostoucí při snižování $x_2$ a zvyšování $x_1$).

**Poznámka 2** Je zřejmé, že ke zlepšení vlastností ryze kvadratické funkce nepovede specifikace se zápornými koeficienty $\alpha_1$, $\alpha_2$. Při nich bude sice tato funkce kvazikonkávní, ale funkce sama bude záporná a klesající, oba mezní užitky budou tedy záporné. Jako užitková funkce je tedy nepoužitelná.

Odvození poptávkových funkcí po komoditách provedeme na základě maximalizace výrazu

$$G(x,\lambda) = Max\left[u(x) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M)\right] = Max\left[\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M)\right]$$

Parciálními derivacemi podle $x_1, x_2$ a $\lambda$ a jejich anulováním dostaneme tři podmínky :

$$u_1 = 2\alpha_1 x_1 - \lambda p_1 = 0 \qquad u_2 = 2\alpha_2 x_2 - \lambda p_2 = 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - M = 0$$ tzn.

$$2\alpha_1 x_1 = \lambda p_1 \qquad 2\alpha_2 x_2 = \lambda p_2 \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M ,$$

z nichž odvodíme (řešením tří rovnic pro neznámé $x_1, x_2$, $\lambda$) v závislosti na parametrech úlohy, tj. $\alpha_1$, $\alpha_2$ , $p_1, p_2$ a $M$ poptávkové funkce po obou komoditách jako

**(4.12)** $${}^M x_1(M,p) = \frac{\alpha_2 p_1 M}{\left(p_1^2\alpha_2 + p_2^2\alpha_1\right)} \qquad {}^M x_2(M,p) = \frac{\alpha_1 p_2 M}{\left(p_1^2\alpha_2 + p_2^2\alpha_1\right)}$$

a **Lagrangeův multiplikátor** daný jako $$\lambda(M,p) = \frac{\alpha_1\alpha_2 M}{\left(p_1^2\alpha_2 + p_2^2\alpha_1\right)}$$

V obou případech rostou poptávky přímo úměrně příjmu $M$ a nepřímo úměrně s cenou této komodity.

Přistupme k odvození nepřímé užitkové funkce. K tomu stačí dosadit $x_1, x_2$ z **(4.12)** do **(4.10)**.
Po malých úpravách dostaneme

**(4.13)** $$\Psi(M,p_1,p_2) = \frac{\alpha_1\alpha_2 M^2}{p_1{}^2\alpha_2 + p_2{}^2\alpha_1}$$

**Nepřímá užitková funkce je tedy rovněž kvadratická v $M$ a klesající se čtvercem cen $p_1, p_2$.**

**Výdajovou funkci** získáme standardně nahrazením levé strany **(4.13)** pevnou hodnotou ${}^0u$ a položením $M = E({}^0u, p)$. Pak již snadno z **(4.13)** získáme výraz

**(4.14)** $$E({}^0u,p) = \sqrt{\frac{(\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_1 p_2{}^2)\,{}^0u}{\alpha_1\alpha_2}}$$

Výdajová funkce je tedy odmocninná ve vztahu k hladině užitku.

**Marshallovský tvar poptávkových funkcí** lze odvodit též pomocí ***Royovy identity***, přičemž z **(4.13)** máme

**(4.15)** $$\frac{\partial\Psi(M,p)}{\partial M} = \frac{2\alpha_1\alpha_2 M}{\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_2 p_2{}^2}$$ a též $$\frac{\partial\Psi(M,p)}{\partial p_i} = -\frac{2.\alpha_i\alpha_2 M^2 p_1 p_2 p_i}{(\alpha_2 p_1{}^2 + \alpha_2 p_2{}^2)^2}$$

zatímco k **vyjádření poptávek v Hicksově tvaru** musíme použít ***Shephardovo lemma***, dle něhož

**(4.16)**

$$ {}^{H}x_i({}^{0}u,p)=\frac{\partial E({}^{0}u,p)}{\partial p_i}=0{,}5.\left(\frac{\dfrac{(\alpha_2 p_1{}^2+\alpha_1 p_2{}^2)\,{}^{0}u}{\alpha_1\alpha_2}}{2\alpha_2 p_1.{}^{0}u}\right)^{-1/2}=\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.\frac{p_1{}^{2}\,{}^{0}u}{(\alpha_2 p_1{}^2+\alpha_1 p_2{}^2)}}. $$

Shodu obou výrazů prověříme např. dosazením výdajové funkce $E({}^{0}u,p)$ za $M$

$$ {}^{M}x_1=\frac{\alpha_2 p_1 M}{\alpha_2 p_1{}^2+\alpha_1 p_2{}^2}=\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_2 p_1{}^2+\alpha_1 p_2{}^2}.\sqrt{\frac{(\alpha_2 p_1{}^2+\alpha_1 p_2{}^2)\,{}^{0}u}{\alpha_1\alpha_2}}=\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.\frac{p_1{}^{2}\,{}^{0}u}{(\alpha_2 p_1{}^2+\alpha_1 p_2{}^2)}}={}^{H}x_1. $$

## 4.3 Leontiefova užitková funkce

Tento typ užitkové funkce (též užitková funkce s pevnými koeficienty) lze zapsat ve tvaru

**(4.17)** $$u(x) = Min[\beta_1 x_1; \beta_2 x_2; ....; \beta_n x_n],$$

kde $\beta_i = 1, 2, ...., n$ jsou kladné konstanty. Tato užitková funkce je charakterizována indiferenční mapou sestávající z indiferenčních křivek, které mají podobu „rohů" (vrcholů a hran) neomezených $n$-rozměrných kvádrů. Vrcholy přitom leží na polopřímce vycházející z počátku souřadnic.

Pro případ dvou komodit má tato polopřímka rovnici $x_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot x_1$ a celou situaci lze vyjádřit obrázkem **[2C]**, který opět obsahuje **indiferenční křivky** pro tři úrovně užitku $u^1, u^2, u^3$. Jako oblast $\boldsymbol{X^D}$ označíme množinu všech $[x_1, x_2]$, pro které platí $x_1 \geq x_2$ a jako $\boldsymbol{X^H}$ oblast, v níž platí $x_2 \geq x_1$. Hranici obou množin tvaru $x_1 = x_2$ tvoří polopřímka vycházející z počátku souřadnic pod úhlem $\phi$, pro který platí $tg\phi = \frac{\beta_2}{\beta_1}$. Jinak je patrné,že Leontiefovská funkce splňuje vlastnosti užitkové funkce, neboť je: **(U1)**: **reálná konečná a platí** $u(\boldsymbol{0}) = 0$, **(U2)**: neklesající v celé definičním oboru, přesněji **rostoucí ve směru přírůstku každé komodity** až do hodnoty $x_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot x_1$, **poté je konstantní**, **(U3) spojitá v celém definičním oboru** a **(U4) kvazikonkávní**, neboť funkční hodnota v bodě ležícím na spojnici libovolných dvou bodů komoditního prostoru nikdy neklesne (jak plyne z konvexnosti množin) pod menší z obou hodnot užitku v krajních bodech. Aplikace **(U5)** pak vede k obecnějším strukturám komplementárních užitkových funkcí.

Pokud jde o hodnoty mezních užitků, musíme rozlišit oblasti $X_d$ a $X_h$ vyznačené na obrázku **[2C]** :

v oblasti $X^H$ platí $u_1 = \beta_1$, resp. $u_2 = 0$,
zatímco
v oblasti $X^D$ platí $u_1 = 0$, resp. $u_2 = \beta_2$.

Dále zřejmě v celém komoditním prostoru platí $u_{11} = u_{12} = u_{22} = 0$ a pro mezní míry substituce platí:

v oblasti $X^H$ : $m_{12} = \frac{u_1}{u_2} = +\infty$ , zatímco v oblasti $X^D$ : $m_{12} = \frac{u_1}{u_2} = 0$.

Abychom odvodili u této funkce poptávkové funkce po komoditách, musíme - při neexistenci parciálních derivací na „hřebeni" zvolit poněkud modifikovaný postup : Je zřejmé, že při jakýchkoliv kladných cenách $p_1$, $p_2$ a příjmu $M$ vzájemně propojených rovností $p_1x_1 + p_2x_2 = M$ bude maxima užitku dosaženo na „hřebeni". Bod maxima tedy získáme jako průsečík úsečky $p_1x_1 + p_2x_2 = M$ a polopřímky $\beta_1x_1 = \beta_2x_2$ procházející počátkem souřadnic. Řešením pro $x_1$, $x_2$ dostaneme poptávkové funkce ve tvaru:

**(4.18)** $${}^M x_1 = \frac{\beta_2 M}{p_1\beta_2 + p_2\beta_1} \qquad {}^M x_2 = \frac{\beta_1 M}{p_1\beta_2 + p_2\beta_1}.$$

Odtud je vidět, že poptávka po každé komoditě je přímo úměrná příjmu $M$ a nepřímo úměrná ceně vlastní (ale stejně tak i cizí) komodity. Povšimněme si přitom, že z tohoto hlediska jsou komodity $x_1, x_2$ v typicky komplementárním vztahu.

Uveďme dále, že **Leontiefova užitková funkce je** (pro libovolné konečné $n$) **lineárně homogenní**, neboť pro ni platí:

(4.19) $u(\lambda \boldsymbol{x}) = Min[\beta_1 \lambda x_1 + \beta_2 \lambda x_2 + .... + \beta_n \lambda x_n] = \lambda \cdot Min[\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + .... + \beta_n x_n] = \lambda \cdot u(\boldsymbol{x})$

pro libovolné kladné $\lambda$ .

**Leontiefova užitková funkce** je pro určitý typ vzájemného vztahu komodit (jsou-li tyto vzájemně komplementární) výstižným analytickým nástrojem. Naopak, pro situace charakterizované vzájemnou substitučností komodit není adekvátně použitelná.

Rovněž u Leontifeovy užitkové funkce lze snadno odvodit nepřímou užitkovou funkci : Stačí dosadit nalezené poptávkové funkce **(4.18)** do přímé užitkové funkce. Dostaneme

(4.20) $$\Psi(M, p_1, p_2) = Min\left[\frac{\beta_1\beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}; \frac{\beta_2\beta_1 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}\right] = \frac{\beta_1\beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}$$

a vidíme, že oba výrazy v závorce jsou shodné – minima se tedy nabývá v obou bodech současně. V souladu s očekáváním roste nepřímá užitková funkce přímo úměrně s příjmem a nepřímo úměrně s cenou vlastní i nevlastní komodity (opět zaznamenáváme komplementaritu ve vztahu mezi oběma).

Nyní můžeme odvodit **Marshallovské poptávkové funkce** alternativně pomocí ***Royovy identity***. Protože

$$\frac{\partial \Psi(M,p)}{\partial M} = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} \qquad \frac{\partial \Psi(M,p)}{\partial p_i} = -\frac{\beta_1\beta_2 M}{(\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1)^2}.\beta_i$$

vede výraz $\frac{-\partial \Psi(M,p)}{\partial p_i} / \frac{\partial \Psi(M,p)}{\partial M}$ přesně ke tvaru **poptávkové funkce v Marshallově tvaru**, jak jsme ho odvodili vztahem **(4.18)**.

Dále přistoupíme k **určení výdajové funkce**. Stačí k tomu nahradit levou stranu v **(4.20)** pevnou hodnotou užitku ${}^0u$ a $M$ nahradit zápisem výdajové funkce $E({}^0u, p)$. Odtud již snadno máme

(4.21) $$E({}^0u, p) = \frac{{}^0u\,(\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1)}{\beta_1\beta_2}.$$

Výdaj spojený s nákupem statků je přímo úměrný úrovni užitku a též přímo úměrný cenám komodit.

Konečně rovněž snadno ověříme shodu **poptávkových funkcí** pro oba tvary (**Marshallův i Hicksův**): Nejprve odvodíme pomocí **Shephardova lemmatu Hicksův tvar poptávkových funkcí.** Zřejmě

(4.22) $${}^H x_i^* = \frac{\partial E({}^0u, p)}{\partial p_i} = \frac{{}^0u}{\beta_1\beta_2}.\beta_j = \frac{{}^0u}{\beta_i}$$ pro $i, j = 1,2; i \neq j$ .

Tento velmi jednoduchý výraz vyjadřuje lineární závislost poptávky na hodnotě užitku. Za povšimnutí stojí, že poptávková funkce není závislá na ceně žádné z komodit.

Jde o tvar korespondující s **Marshallovým vyjádřením poptávek**, neboť po dosazení

(4.23) $${}^M x^*(M,p) = \frac{\beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}.\frac{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}{\beta_1\beta_2}.{}^0u = \frac{{}^0u}{\beta_1} = {}^H x_1^*(M,p). \square.$$

## 4.4 Odmocninná užitková funkce

Dalším funkčním tvarem, který může být vhodně uplatněn jako užitková funkce, je funkce tvaru

(4.24) $$u(x) = \beta_1\sqrt{x_1} + \beta_2\sqrt{x_2} + \dots + \beta_n\sqrt{x_n} \qquad \beta_i > 0,$$

resp. ve zjednodušeném zápisu pro dvě komodity

(4.25) $$u(x) = \beta_1\sqrt{x_1} + \beta_2\sqrt{x_2} \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0.$$

Opět lze snadno ukázat, že **odmocninná funkce je reálná konečná spojitá rostoucí a splňující** $u(0) = 0$**. Je také kvazikonkávní a lineárně homogenní stupně 1/2.**

**Mezní užitky** jsou rovny $u_1 = \dfrac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} > 0$, $u_2 = \dfrac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} > 0$, **mezní míra substituce** je $m_{12} = \dfrac{\beta_1\sqrt{x_2}}{\beta_2\sqrt{x_1}}$ a mění se tedy významně s polohou bodu v komoditním prostoru.

**Poptávkové funkce** odvodíme obvyklým způsobem, řešením následujících tří rovnic pro $x_1, x_2$, $\lambda$:

$$u_1 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1,\quad u_2 = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2,\quad p_1x_1 + p_2x_2 = M.$$

Některou z metod řešení soustavy lineárních rovnic (např. komparační s porovnáním a eliminací $\lambda$) získáme řešení pro $x_1$, $x_2$ a $\lambda$:

(4.26) $${}^{M}x_1(M,p) = \frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1 \cdot (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)},\quad {}^{M}x_2(M,p) = \frac{\beta_2^2 p_1 M}{p_2 \cdot (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}$$

Z uvedených výrazů je patrné, že **každá z obou poptávkových funkcí je lineární funkcí příjmu** $M$ a že poptávka je nepřímo závislá na jí příslušné ceně. Z uvedených hledisek tedy lze odmocninnou funkci přijmout jako vhodnou pro popis (přinejmenším určité části) standardních užitkových situací.

**Znázornění situace** na obrázku **[2D]** představuje trojici indiferenčních křivek $u^1$, $u^2$, $u^3$, které mají tu vlastnost, že jsou kvazikonkávní a přiléhají v konečných hodnotách k souřadnicovým osám. Každá z komodit je tedy plně substituovatelná konečným množstvím druhé komodity (stejně by tomu bylo i v $n$-rozměrném případě). Rovnovážný bod $Q$ se nachází v místě dotyku výdajového omezení s indiferenční křivkou $u^2$. Vychýlení z něho v kterémkoliv směru úsečky výdajového omezení vede vždy k nižší hladině užitku než $u^2$.

Nyní vyšetříme **kvazikonkávnost odmocninné užitkové funkce**. K tomu stačí vypočíst determinant

$$|U| = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} & \dfrac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} \\ \dfrac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} & -\dfrac{\beta_1}{4x_1^{3/2}} & 0 \\ \dfrac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} & 0 & -\dfrac{\beta_2}{4x_2^{3/2}} \end{vmatrix}$$ , protože

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}};\ u_2(x) = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}};\ u_{11}(x) = -\tfrac{1}{4}\beta_1 x_1^{-3/2};\ u_{22}(x) = -\tfrac{1}{4}\beta_2 x_2^{-3/2};\ u_{12}(x) = u_{21}(x) = 0.$$

Hodnota determinantu tedy je ( pouze 2 ze 6 členů Sarusova rozvoje jsou nenulové )

$$-\frac{\beta_1^2}{4x_1}\cdot\left(-\frac{\beta_2}{4x_2^{3/2}}\right) - \frac{\beta_2^2}{4x_2}\cdot\left(-\frac{\beta_1}{4x_1^{3/2}}\right) = \frac{\beta_1\beta_2}{16x_1x_2}\cdot\left[\frac{\beta_1}{\sqrt{x_2}} + \frac{\beta_2}{\sqrt{x_1}}\right] > 0$$ pro libovolná kladná $\beta_1, \beta_2$.

**Odmocninná užitková funkce je** tedy **kvazikonkávní.**

**Nepřímou užitkovou funkci** $\Psi(M, p_1, p_2)$ získáme prostým **dosazením** nalezených **poptávkových funkcí (v Marshallově tvaru) do užitkové funkce**. Dostáváme

$$\Psi(M,p_1,p_2) = \beta_1\sqrt{\frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} + \beta_2\sqrt{\frac{\beta_2 p_1 M}{p_2(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} = $$
$$= \beta_1^2\sqrt{\frac{p_2 M}{p_1(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} + \beta_2^2\sqrt{\frac{p_1 M}{p_2(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} = $$
$$= \sqrt{\frac{M}{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} \cdot \left[\beta_1^2\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \beta_2^2\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\right]$$

nebo po vynásobení čitatele i jmenovatele výrazu v závorce $\sqrt{p_1 p_2}$ dále

**(4.27)** $$\Psi(M,p_1,p_2) = \sqrt{\frac{M}{p_1 p_2}} \cdot \frac{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} = \sqrt{\frac{M}{p_1 p_2}} \cdot \sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}$$ nebo

**(4.27A)** jinak psáno $$\Psi(M,p) = \sqrt{M\left(\frac{\beta_1^2}{p_1} + \frac{\beta_2^2}{p_2}\right)} = \sqrt{\beta_1^2\frac{M}{p_1} + \beta_2^2\frac{M}{p_2}}.$$

Nyní odvodíme **tvar výdajové funkce** příslušné **odmocninné užitkové funkci**. Vyjdeme z již vyvozené **nepřímé užitkové funkce**, kde za obecný výraz $\Psi(M, p_1, p_2)$ dosadíme konkrétní hodnotu užitku ${}^0u$ a obdobně (nyní hledaný tvar výdajové funkce $E({}^0u, p_1, p_2)$) substituujeme z $M$. Získáme

$${}^0u = \sqrt{\frac{E({}^0u,p_1,p_2)}{p_1 p_2}} \cdot \sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}$$ , z čehož snadno vyvodíme

**(4.28A,B)** $$E({}^0u,p_1,p_2) = \frac{{}^0u^2 \cdot p_1 p_2}{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}$$ nebo také $$E({}^0u,p) = \frac{{}^0u^2}{\frac{\beta_1^2}{p_1} + \frac{\beta_2^2}{p_2}}.$$

Jak patrno, tato **výdajová funkce je nezáporná** (pro libovolné hodnoty parametrů $\beta_1, \beta_2$), **nulová pouze při** ${}^0u = 0$ a **rostoucí** s (druhou mocninnou) ${}^0$u.

Nyní přistoupíme k ilustraci **odvození poptávkových funkcí** zprostředkovaně, z nepřímé užitkové resp. výdajové funkce. Z nepřímé užitkové funkce spočteme poptávkové funkce přes ***Royovu identitu***

Výpočtem derivací dostaneme

$$\frac{\partial\Psi(M,p)}{\partial p_1} = \frac{\sqrt{M}}{2p_1 p_2} \cdot \frac{\left(\beta_2^2\sqrt{p_1 p_2} - (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}\right)}{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} = \frac{-\beta_1^2\sqrt{p_2}\sqrt{M}}{2\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}\, p_1^{3/2}}$$

a podobně $$\frac{\partial\Psi(M,p)}{\partial M} = \frac{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}}{2\sqrt{M p_1 p_2}}$$ , a tedy dosazením do ***Royovy identity***

$$^{M}x_1^*(M,p) = -\frac{\dfrac{\partial \Psi(M,p)}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial \Psi(M,p)}{\partial M}} = -\frac{\dfrac{-\beta_1^2 p_2^{1/2}\sqrt{M}}{2\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}\, p_1^{3/2}}}{\dfrac{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}}{2\sqrt{M}\sqrt{p_1}\sqrt{p_2}}} = \frac{\beta_1^2 M p_2}{p_1\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)},$$ což odpovídá

prvému z výrazů uvedených v **(4.26)**. Výraz pro $^{H}x_2^*$ bychom odvodili obdobně; obdrželi bychom druhý výraz v **(4.26)**. Jak patrno, **Marshallovská poptávková funkce je přímo úměrná příjmu spotřebitele** $M$ a současně **je klesající se čtvercem ceny** $p_1$ **příslušné komodity.**

Alternativně můžeme však získat také **poptávkové funkce v Hicksově pojetí**. K tomu uplatníme ***Shephardovo lemma***. Dle něho

$$^{H}x_1^*\left({}^0u,p\right) = \frac{\partial E\left({}^0u,p\right)}{\partial p_1} = \frac{\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right){}^0u^2 p_2 - {}^0u^2 p_1 p_2 \beta_2^2}{\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)^2}$$ a po úpravě

**(4.29)** $$^{H}x_1^*\left({}^0u,p\right) = \frac{\beta_1^2\, {}^0u^2 p_2^2}{\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)^2}.$$

**Hicksovská poptávková funkce** je tedy **rostoucí se čtvercem hladiny užitku** $^0u$ **a klesající s růstem ceny** $p_1$**.**

Abychom mohli porovnat oba **tvary poptávkových funkcí** (**Hicksův a Marshallův**), stačí např. dosadit do výrazu pro $^{M}x_1^*$ za $M = E\left({}^0u, p_1, p_2\right)$: Dostaneme

$$^{M}x_1^*(M,p) = \frac{\beta_1^2 p_2\, {}^0u^2 p_1 p_2}{p_1\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)^2} = \frac{\beta_1^2\, {}^0u^2 p_2^2}{\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)^2} = {}^{H}x_1^*\left({}^0u,p\right).$$

Obdobně bychom mohli postupovat i obráceně. Za $^0u$ dosadíme **výraz pro nepřímou užitkovou funkci** $\Psi(M,p_1,p_2)$:

**(4.30)** $$^{H}x_1^* = \frac{\beta_1^2 p_2^2}{\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{M\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)}}{\sqrt{p_1 p_2}}\right)^2 = \frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)} = {}^{M}x_1^*.$$

Konečně ukážeme, že i třetí postup **vyvození Hicksovských poptávkových funkcí řešením minimalizační úlohy** – vede taktéž k tvaru shodnému s oběma předchozími:

Řešíme tedy úlohu $Min \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ za podmínky $\beta_1\sqrt{x_1} + \beta_2\sqrt{x_2} \geq u^0$

Příslušný ***Lagrangián*** má tvar $H(x,\mu) = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \mu.\left(\beta_1\sqrt{x_1} + \beta_2\sqrt{x_2} - u^0\right)\right]$.

Derivujeme nyní podle obou neznámých a obě derivace položíme rovny nule. Dostaneme

$$\frac{\partial H(x,\mu)}{x_1} = p_1 - \frac{1}{2}\mu.\beta_1 x_1^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial H(x,\mu)}{x_2} = p_2 - \frac{1}{2}\mu.\beta_2 x_2^{-\frac{1}{2}} = 0$$

( Derivací podle $\mu$ obdržíme opět podmínku minimálního užitku ).

Porovnáním výrazů pro $\mu$ z nutných podmínek získáme

$\mu = \frac{2p_1\sqrt{x_1}}{\beta_1} = \frac{2p_2\sqrt{x_2}}{\beta_2}$ a odtud dále $\sqrt{x_2} = \frac{p_1\beta_2\sqrt{x_1}}{p_2\beta_1}$ , což dosadíme do

podmínky pro minimální užitek: $\beta_1\sqrt{x_1} + \beta_2\frac{p_1\beta_2\sqrt{x_1}}{p_2\beta_1} = u^0$ , odkud už snadno určíme

$$^H x_1 = \left(\frac{u^0}{\beta_1 + \frac{p_1\beta_2^2}{p_2\beta_1}}\right)^2 = \frac{\beta_1^2 p_2^2 u^{0^2}}{\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)^2}$$

,tedy výraz identický s **(4.29)**.

Prověříme ještě některé **vlastnosti výdajové a nepřímé užitkové funkce**:

Je snadné ukázat, že první z nich je **homogenní stupně 1 v cenách**, druhá **homogenní stupně 0 současně v cenách a příjmu**:

**(4.28*)** $$E\left({}^0u, \lambda p_1, \lambda p_2\right) = \frac{{}^0u^2 \cdot (\lambda p_1).(\lambda p_2)}{\beta_1^2\lambda p_2 + \beta_2^2\lambda p_1} = \frac{\lambda^2\, {}^0u^2 p_1 p_2}{\lambda\left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)} = \lambda.E\left({}^0u, p_1, p_2\right).$$

a uplatněním **(4.27A)** pro nepřímou užitkovou funkci rovněž

**(4.29)** $$\Psi(\lambda M, \lambda p) = \sqrt{\beta_1^2\frac{\lambda M}{\lambda p_1} + \beta_1^2\frac{\lambda M}{\lambda p_2}} = \Psi(M, p).$$

Pokud jde o monotónnost, je ze zápisu **(4.28B)** vidět, že **výdajová funkce je kvadraticky rostoucí v užitku** a **rostoucí v každé z cen**.

**Nepřímá užitková funkce je** „odmocninně„ **rostoucí v příjmu a** „odmocninně„ **klesající v každé z cen,** jak lze názorně vidět z **(4.27A).**

**Marshallovské poptávky (4.26) jsou lineárně rostoucí v příjmu** a **homogenní stupně 0 v cenách a příjmu** současně:

$$^M x_1(\lambda M, \lambda p) = \frac{\beta_1^2(\lambda p_2)(\lambda M)}{\lambda p_1 \cdot \left(\beta_1^2\lambda p_2 + \beta_2^2\lambda p_1\right)} = {}^M x_1(M, p),$$

$$^M x_2(\lambda M, \lambda p) = \frac{\beta_2^2(\lambda p_1)(\lambda M)}{\lambda p_2 \cdot \left(\beta_1^2\lambda p_2 + \beta_2^2\lambda p_1\right)} = {}^M x_2(M, p)$$

, zatímco

**Hicksovské poptávky jsou kvadraticky rostoucí v užitku** a **homogenní stupně 0 v cenách**

$$^H x_1^*\left({}^0u, \lambda p\right) = \frac{\beta_1^2\, {}^0u^2(\lambda p_2)^2}{\left(\beta_1^2\lambda p_2 + \beta_2^2\lambda p_1\right)^2} = {}^H x_1^*\left({}^0u, p\right).$$

$$^H x_2^*\left({}^0u, \lambda p\right) = \frac{\beta_2^2\, {}^0u^2(\lambda p_1)^2}{\left(\beta_1^2\lambda p_2 + \beta_2^2\lambda p_1\right)^2} = {}^H x_2^*\left({}^0u, p\right).$$

Dále **pro Marshallovské poptávky platí podmínky součtovatelnosti**,

$$p_1 x_1^M(M, p) + p_2 x_2^M(M, p) = p_1\frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1 \cdot \left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)} + p_2\frac{\beta_2^2 p_1 M}{p_2 \cdot \left(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1\right)} = M ,$$

zatímco analogický **součet Hicksovských poptávek násobených příslušnými cenami vede** (podle očekávání) **k výrazu totožnému s nákladovou funkcí:**

$$p_1{}^H x_1{}^* + p_2{}^H x_2{}^* = p_1 \frac{\beta_1{}^2\, {}^0u^2 p_2{}^2}{\left(\beta_1{}^2 p_2 + \beta_2{}^2 p_1\right)^2} + p_2 \frac{\beta_2{}^2\, {}^0u^2 p_1{}^2}{\left(\beta_1{}^2 p_2 + \beta_2{}^2 p_1\right)^2} =$$

$${}^0u^2 p_1 p_2 \left( \frac{\beta_1{}^2 p_2 + \beta_2{}^2 p_1}{\left(\beta_1{}^2 p_2 + \beta_2{}^2 p_1\right)^2} \right) = \frac{{}^0u^2 p_1 p_2}{\left(\beta_1{}^2 p_2 + \beta_2{}^2 p_1\right)} = E({}^0u^2, p).$$

## 4.5 Logaritmická užitková funkce

Dalším funkčním tvarem, který může být vhodně uplatněn jako užitková funkce je logaritmická funkce

**(4.31)** $$u(x_1, x_2) = \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2,$$

u níž předpokládáme – za účelem obou kladných mezních užitků splnění podmínky $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$.
Funkční tvar opět neobsahuje aditivní konstantu, abychom dosáhli požadavku $u(0{,}0) = 0$.
**Mezní užitky**, které použijeme k výpočtu poptávkových funkcí jsou zřejmě

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{x_1} \;;\; u_2(x) = \frac{\beta_2}{x_2}{}^{1},$$

takže souřadnice rovnovážného bodu dostaneme řešením tří jednoduchých rovnic pro $x_1, x_2$, $\lambda$:

$$u_1 = \frac{\beta_1}{x_1} = \lambda p_1 \qquad u_2 = \frac{\beta_2}{x_2} = \lambda p_2 \qquad \text{a} \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M.$$

Jednoduchými úpravami $p_1 x_1 = \beta_1 / \lambda$ , resp. $p_2 x_2 = \beta_2 / \lambda$ a dosazením do rozpočtového omezení dostaneme $\beta_1 + \beta_2 = \lambda M$ neboli $\beta_1 / M + \beta_2 / M = \lambda$ a odtud již snadno **Marshallovské poptávky po** obou **komoditách** jako

**(4.32)** $${}^{M}x_1^* = \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_1}, \qquad {}^{M}x_2^* = \frac{\beta_2 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_2}.$$

**Ověření, zda je** (dvoufaktorová) **logaritmická užitková funkce kvazikonkávní**, je velmi snadné. **Hicksovy podmínky stability** zde mají tvar

$$|U| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{x_1} & \frac{\beta_2}{x_2} \\ \frac{\beta_1}{x_1} & -\frac{\beta_1}{x_1^2} & 0 \\ \frac{\beta_2}{x_2} & 0 & -\frac{\beta_2}{x_2^2} \end{vmatrix} > 0$$ , protože

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{x_1} \;;\; u_2(x) = \frac{\beta_2}{x_2};\; u_{11}(x) = -\frac{\beta_1}{x_1^2};\; u_{22}(x) = -\frac{\beta_2}{x_2^2};\; u_{12}(x) = u_{21}(x) = 0.$$

**Výpočet determinantu** vede k hodnotě

$$|U| = -\left(\frac{\beta_1}{x_1}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\beta_2}{x_2^2}\right) - \left(\frac{\beta_2}{x_2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\beta_1}{x_1^2}\right) = \frac{\beta_1 \beta_2}{x_1^2 x_2^2} \cdot [\beta_1 + \beta_2]$$ , která je evidentně

(při přijatých předpokladech $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$) pro kladné objemy komodit $x_1, x_2$ **kladná**.

Dále odvodíme **tvar nepřímé užitkové funkce.** Použijeme k tomu prosté dosazení **poptávkových funkcí v Marshallově tvaru** do **přímé užitkové funkce** $u(x^*)$. Tedy

**(4.33)** $$\Psi(M, p_1, p_2) = \beta_1 \log \frac{\beta_1 M}{p_1(\beta_1 + \beta_2)} + \beta_2 \log \frac{\beta_2 M}{p_2(\beta_1 + \beta_2)},$$

kterýžto výraz lze vyjádřit v několika dalších ekvivalentních tvarech, např.

$$\Psi(M, p_1, p_2) = \beta_1 + \log \beta_1 + \beta_2 \log \beta_2 - (\beta_1 + \beta_2)\log(\beta_1 + \beta_2) + \beta_1 \log \frac{M}{p_1} + \beta_2 \log \frac{M}{p_2},$$

---

[1] **Mezní míra substituce** je tedy zřejmě $m_{12}(x) = \frac{\beta_1}{x_1} / \frac{\beta_2}{x_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}$

nebo

**(4.34)** $$\Psi(M,p_1,p_2)=C+\beta_1 \log\frac{M}{p_1}+\beta_2 \log\frac{M}{p_2},$$

kde konstanta *C* závisí jen na parametrech (přímé) užitkové funkce.

Všimněme si, že **nepřímá užitková funkce je** (nehledě na aditivní konstantu *C*) **rovněž logaritmická** (v argumentech $\frac{M}{p_1}$ a $\frac{M}{p_2}$). **Je** dle očekávání **rostoucí při rostoucím příjmu** $M$ a naopak **klesající v** obou **cenách** $p_1, p_2$. Její derivace použijeme níže při výpočtech poptávek pomocí ***Royovy identity***:

**Derivace nepřímé užitkové funkce podle ceny** $p_1$ má tvar

$$\frac{\partial\Psi(M,p)}{\partial p_1}=\beta_1\frac{p_1(\beta_1+\beta_2)}{\beta_1 M}\cdot\frac{\beta_1 M}{(\beta_1+\beta_2)(-p_1^2)}=-\frac{\beta_1}{p_1};$$ stejně tak $$\frac{\partial\Psi(M,p)}{\partial p_2}=-\frac{\beta_2}{p_2}.$$

**Derivaci podle příjmu** $M$ **obdržíme** jako

$$\frac{\partial\Psi(M,p)}{\partial M}=\beta_1\frac{p_1(\beta_1+\beta_2)}{\beta_1 M}\cdot\frac{\beta_1}{p_1(\beta_1+\beta_2)}+\beta_2\frac{p_2(\beta_1+\beta_2)}{\beta_2 M}\cdot\frac{\beta_2}{p_2(\beta_1+\beta_2)}=\frac{\beta_1+\beta_2}{M}.$$

Odtud je mj. patrné, že derivace podle cen jsou obě záporné, zatímco derivace dle příjmu $M$ nabývá kladné hodnoty. Můžeme spočíst ještě druhé derivace

$$\frac{\partial^2\Psi(M,p)}{\partial p_1^2}=\frac{\beta_1}{p_1^2},\quad \frac{\partial^2\Psi(M,p)}{\partial M^2}=-\frac{(\beta_1+\beta_2)}{M^2},\quad \frac{\partial^2\Psi(M,p)}{\partial p_2^2}=\frac{\beta_2}{p_2^2},$$

z nichž je vidět, že druhé derivace podle cen jsou kladné, zatímco druhá parciální derivace dle příjmu je záporná. Získané hodnoty 1. parciálních derivací můžeme použít k výpočtu ***Marshallovských poptávek*** pomocí ***Royovy identity***. Máme

**(4.35)** $$^{M}x_1^*(M,p)=\frac{-\frac{\partial\Psi(M,p)}{\partial p_1}}{\frac{\partial\Psi(M,p)}{\partial M}}=-\frac{-\frac{\beta_1}{p_1}}{\frac{\beta_1+\beta_2}{M}}=\frac{\beta_1 M}{(\beta_1+\beta_2)p_1},$$

ve shodě s prvním z výrazů v **(4.32)**.

Analogicky obdržíme $^{M}x_2^*(M,p)=\frac{\beta_2 M}{(\beta_1+\beta_2)p_2}$, ve shodě s druhou poptávkovou funkcí v **(4.32)**.

Nyní můžeme přistoupit k **vyvození výdajové funkce** $E\left({}^0u,p_1,p_2\right)$:
Nejprve přepíšeme **nepřímou užitkovou funkci** do tvaru

**(4.36)** $$\Psi(M,p_1,p_2)=C+\log(\beta_1+\beta_2).M-\log p_1^{\beta_1}-\log p_2^{\beta_2}.$$

Nyní **provedeme substituce** $\Psi(M,p_1,p_2)={}^0u$ (pevná hodnota) a naopak $M=E\left({}^0u,p_1,p_2\right)$ (**výdajová funkce** s argumenty ceny a hladina užitku) neboli

$${}^0u=C+(\beta_1+\beta_2)\log E\left({}^0u,p\right)-\log p_1^{\beta_1}-\log p_2^{\beta_2},$$ což dává

$$\log E\left({}^0u,p\right)=\frac{{}^0u-C+\log p_1^{\beta_1}+\log p_2^{\beta_2}}{\beta_1+\beta_2}$$ a dále po úpravách

$$\log E\left({}^0u,p\right)=\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}+\frac{\log\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\right)-\log\left(\frac{\beta_1^{\beta_1}\beta_2^{\beta_2}}{(\beta_1+\beta_2)^{\beta_1+\beta_2}}\right)}{\beta_1+\beta_2}$$

$$\log E\left({}^0u,p\right)=\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}+\frac{\log\left[\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}(\beta_1+\beta_2)^{\beta_1+\beta_2}\right]}{\beta_1+\beta_2}$$

a po odlogaritmování obdržíme

$$E\left({}^0u,p\right)=\exp\left\{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}\right\}\cdot\exp\left\{\frac{\log\left[(\beta_1+\beta_2)^{\beta_1+\beta_2}\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\right]}{\beta_1+\beta_2}\right\}$$

a konečně

$$=\exp\left\{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}\right\}\cdot\exp\left\{\log\left[(\beta_1+\beta_2)^{\beta_1+\beta_2}\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\right]^{1/(\beta_1+\beta_2)}\right\}$$

**(4.37)**
$$E\left({}^0u,p\right)=e^{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}}\cdot(\beta_1+\beta_2)\cdot\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}$$

Povšimněme si, že **výdajová funkce** (příslušná logaritmické užitkové funkci **vykazuje exponenciální růst ve vztahu k užitku** ${}^0u$ **a má mocninný tvar vzhledem k cenám** $p_1, p_2$.

***Hicksův tvar poptávkových funkcí*** získáme prostřednictvím ***Shephardova lemmatu*** následovně:

**(4.38)**
$${}^H x_1^*({}^0u,p)=\frac{\partial E\left({}^0u,p_1,p_2\right)}{\partial p_1}=e^{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}}\frac{\beta_1}{p_1}$$
$$=\frac{E\left({}^0u,p_1,p_2\right)\beta_1}{(\beta_1+\beta_2)p_1}$$

resp. po dosazení $E\left({}^0u,p\right)=M$ je ${}^H x_1^*=\frac{M\beta_1}{(\beta_1+\beta_2)p_1}={}^M x_1^*$, což dokumentuje formální shodu s již vyvozenými **Marshallovskými poptávkovými funkcemi**. □ .

V **Hicksově tvaru zaznamenáváme** dle očekávání **růst poptávky po dané komoditě s růstem hladiny užitku** – závislost je exponenciální, intenzita růstu pak nepřímo úměrná součtu parametrů $\beta_1+\beta_2$. Tatáž poptávka klesá s růstem ceny $p_1$: mocnina u $p_1$ je (s ohledem na přítomnost této ceny též ve výdajové funkci) rovna $\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}-1=-\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}<0$.

Analogicky bychom dostali **Hicksovskou poptávku po druhém** statku jako

**(4.39)** $${}^{H}x_2^*\left({}^0u,p\right)=\frac{E\left({}^0u,p_1,p_2\right)\beta_2}{(\beta_1+\beta_2)p_2}.$$

Pro úplnost i zde ukážeme, že i třetí postup **vyvození Hicksovských poptávkových funkcí** – **řešením minimalizační úlohy** – vede k tvaru shodnému s oběma předchozími:

**Řešíme** tedy **úlohu** $Min \sum_{i=1}^{2} p_i x_i$ za podmínky $\beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 \geq u^0$

**Lagrangián** má zde tvar

$$H(x,\mu)=\left[\sum_{i=1}^{2} p_i x_i - \mu.\left(\beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 - u^0\right)\right].$$

Derivujeme ho nyní podle obou neznámých a obě derivace položíme rovny nule. Dostaneme

$$\frac{\partial H(x,\mu)}{x_1}=p_1-\mu.\frac{\beta_1}{x_1}=0$$

$$\frac{\partial H(x,\mu)}{x_2}=p_2-\mu.\frac{\beta_2}{x_2}=0$$

(Derivací podle $\mu$ bychom obdrželi zřejmě zase **podmínku minimálního užitku**).

Porovnáním výrazů pro $\mu$ z nutných podmínek získáme

$$\mu=\frac{p_1x_1}{\beta_1}=\frac{p_2x_2}{\beta_2}$$ a odtud dále $x_2=\frac{p_1\beta_2x_1}{p_2\beta_1}$, což dosadíme do

podmínky pro minimální užitek: $\beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log\left(\frac{p_1\beta_2x_1}{p_2\beta_1}\right)=u^0$, odkud opět snadno určíme

$$(\beta_1+\beta_2).\log x_1 = u^0 - \beta_2.\log\left(\frac{p_1}{p_2}.\frac{\beta_2}{\beta_1}\right),$$

neboli $${}^{H}x_1^* = e^{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}}.\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}$$, kterýžto výraz je identický s

**(4.38)** $${}^{H}x_1^* = e^{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}}\frac{\beta_1}{p_1}$$

---

Jako v předchozím případě, ověříme i zde některé **vlastnosti výdajové a nepřímé užitkové funkce**: Také zde platí, že první je **homogenní stupně 1 v cenách**, **druhá homogenní stupně 0** současně **v cenách a příjmu:**

$$E\left({}^0u,\lambda p_1,\lambda p_2\right)=e^{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}}\cdot(\beta_1+\beta_2)\cdot\left(\frac{\lambda p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{\lambda p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}=\lambda.E\left({}^0u,p_1,p_2\right)$$

vzhledem k jedničkovému součtu mocninných členů , resp.

$$\Psi(\lambda M,\lambda p_1,\lambda p_2)=\beta_1\log\frac{\beta_1\lambda M}{\lambda p_1(\beta_1+\beta_2)}+\beta_2\log\frac{\beta_2\lambda M}{\lambda p_2(\beta_1+\beta_2)}=\Psi(M,p_1,p_2)$$

Pokud jde o monotónnost, je ze zápisu **(4.39)** vidět, že **výdajová funkce je exponenciální** (tedy rostoucí ) **v užitku** a **rostoucí v každé z cen** individuálně, zatímco z **(4.34)** plyne, že

**nepřímá užitková funkce je** logaritmická, tj. **rostoucí v příjmu a** „záporně logaritmicky„ **klesající v cenách, jak lze názorně vidět z (4.34),** upravíme-li ho na tvar

**(4.34)** $$\Psi(M,p_1,p_2)=C+\log M+\log(\beta_1+\beta_2)-\beta_1\log p_2-\beta_2\log p_2 \ .$$

**Marshallovské poptávky (4.32)** jsou **lineárně rostoucí v příjmu, klesající** (nepřímo úměrně) **ve vlastních cenách** a **homogenní stupně 0** simultánně **v cenách a příjmu** (vše je vidět bezprostředně)

$$^{M}x_1^*=\frac{\beta_1 M}{(\beta_1+\beta_2)p_1}, \qquad ^{M}x_2^*=\frac{\beta_2 M}{(\beta_1+\beta_2)p_2}.$$

**Hicksovské poptávky (4.38)** jsou **exponenciálně rostoucí v příjmu a klesající** (při mocnině $\frac{-\beta_j}{\beta_1+\beta_2}$) **vůči vlastním cenám** ( $j$ je index druhé ceny).

Dále pro **Marshallovské poptávky platí podmínky součtovatelnosti**,

$$p_1x_1^M(M,p)+p_2x_2^M(M,p)=p_1\frac{\beta_1 M}{(\beta_1+\beta_2)p_1}+p_2\frac{\beta_2 M}{(\beta_1+\beta_2)p_1}=M \ ,$$

zatímco analogický **součet Hicksovských poptávek násobených příslušnými cenami** vede k **výrazu** odvozenému pro **nákladovou funkci**

$$p_1{}^Hx_1^*+p_2{}^Hx_2^*=p_1e^{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}}\frac{\beta_1}{p_1}+p_2e^{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}}\frac{\beta_2}{p_2}=$$
$$e^{\frac{{}^0u}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}}(\beta_1+\beta_2)=E({}^0u^2,p)$$

........................................................................

## 4.6 Zobecněná leontiefovská užitková funkce (úplná)

Jde o funkční tvar zavedený **Erwinem Diewertem [1971]**. Jeho podoba v dvoukomoditním zápisu je:

**(4.51)** $$u(x)=\beta_0+\beta_1\sqrt{x_1}+\beta_2\sqrt{x_2}+\beta_{11}x_1+\beta_{22}x_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

s omezeními na parametry (ne však přijímanými jednotně ve všech situacích). Obvykle se přijímá $\beta_{11}>0,\beta_{22}>0,\beta_{12}>0$.

**Má-li být tento funkční tvar uplatněn jako užitková funkce** (s vlastností $u(0,0,\ldots,0)=0$ , musí zřejmě platit $\beta_0=0$.Tedy

**(4.52)** $$u(x)=\beta_1\sqrt{x_1}+\beta_2\sqrt{x_2}+\beta_{11}x_1+\beta_{22}x_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

**Mezní užitky** spočteme následovně

**(4.53)**
$$u_1(x)=\frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}}+\beta_{11}+\frac{\beta_{12}\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}=\beta_{11}+\frac{\beta_1+\beta_{12}\sqrt{x_2}}{2}x_1^{-1/2}=\beta_{11}+\frac{\beta_1+\beta_{12}\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$
$$u_2(x)=\frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}}+\beta_{22}+\frac{\beta_{12}\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}=\beta_{22}+\frac{\beta_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}}{2}x_2^{-1/2}=\beta_{22}+\frac{\beta_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}$$

**Mezní míra substituce** odtud plyne jako

$$m_{12}=\frac{\beta_{11}+\dfrac{\beta_1+\beta_{12}\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}}{\beta_{22}+\dfrac{\beta_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}}=\frac{\dfrac{2\beta_{11}x_1+\beta_1\sqrt{x_1}+\beta_{12}\sqrt{x_1x_2}}{x_1}}{\dfrac{2\beta_{22}x_2+\beta_2\sqrt{x_2}+\beta_{12}\sqrt{x_1x_2}}{x_2}}=\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{2\beta_{11}x_1+\beta_1\sqrt{x_1}+\beta_{12}\sqrt{x_1x_2}}{2\beta_{22}x_2+\beta_2\sqrt{x_2}+\beta_{12}\sqrt{x_1x_2}}$$

po úpravě

**(4.54)** $$m_{12}=\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}\cdot\frac{2\beta_{11}\sqrt{x_1}+\beta_1+\beta_{12}\sqrt{x_2}}{2\beta_{22}\sqrt{x_2}+\beta_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}}=\frac{2\beta_{11}\sqrt{x_1x_2}+\beta_1\sqrt{x_2}+\beta_{12}x_2}{2\beta_{22}\sqrt{x_1x_2}+\beta_2\sqrt{x_1}+\beta_{12}x_1}$$

**Homogenita.** Pro obecný tvar **(4.51)** to znamená vyšetření podmínky

$$u(\lambda x)=\underbrace{\beta_0}_{\beta_0=0}+\underbrace{\beta_1\lambda^{1/2}x_1^{1/2}}_{\beta_1=0}+\underbrace{\beta_2\lambda^{1/2}x_2^{1/2}}_{\beta_2=0}+\underbrace{\beta_{11}\lambda x_1+\beta_{22}\lambda x_2+\beta_{12}\lambda^{1/2}x_1^{1/2}\lambda^{1/2}x_2^{1/2}}_{\lambda\left(\beta_{11}x_1+\beta_{22}x_2+\beta_{12}\sqrt{x_1x_2}\right)}$$

Aby byla ***GL-funkce* lineárně homogenní**, tj. platilo $u(\lambda x)=\lambda.u(x)$ pro každé kladné $\lambda$, musí tedy platit: $\beta_0=\beta_1=\beta_2=0$, čímž se **(4.52)** redukuje na

**(4.55)** $$u(x)=\beta_{11}x_1+\beta_{22}x_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

Prověřit **nezápornost funkce (4.55)** znamená vyšetřit podmínku

$$\beta_{11}x_1+\beta_{22}x_2+\beta_{12}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\geq 0$$
$$\left(\sqrt{x_1},\sqrt{x_2}\right)\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{12} & \beta_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{x_1}\\ \sqrt{x_2}\end{pmatrix}\geq 0$$
$$\Rightarrow \beta_{11}>0,\ \beta_{22}>0,\ \beta_{11}\beta_{22}>\beta_{12}^2$$

pro libovolné $x_1\geq 0, x_2\geq 0$

$$u(x)=\beta_{11}x_1+\beta_{22}x_2+2\beta_{12}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$
$$u_1(x)=\beta_{11}+\frac{\beta_{12}\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\lambda p_1$$
$$u_2(x)=\beta_{22}+\frac{\beta_{12}\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}=\lambda p_2$$

**Kladnost mezních užitků**

$$\tilde{u}(x) = \beta_{11}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}, \quad \beta_{11} > 0, \beta_{22} > 0$$

$$u_1(x) = \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > 0 \Rightarrow \beta_{12}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > -2\beta_{11}$$

$$pro\ \beta_{12} < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} < \frac{-2\beta_{11}}{\beta_{12}}$$

$$pro\ \beta_{12} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > \frac{-2\beta_{11}}{\beta_{12}} \quad v\check{z}dy$$

$$u_2(x) = \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} > 0 \Rightarrow \beta_{12}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} > -2\beta_{22}$$

$$pro\ \beta_{12} < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < -2\frac{\beta_{22}}{\beta_{12}} \Leftrightarrow \frac{-\beta_{12}}{2\beta_{22}} > \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$

$$pro\ \beta_{12} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} > -2\frac{\beta_{22}}{\beta_{12}} \Leftrightarrow \frac{\beta_{12}}{-2\beta_{22}} < \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad v\check{z}dy$$

## Homogenita

$$u(\lambda x) = \underbrace{\beta_0}_{\beta_0=0} + \underbrace{\beta_1\lambda^{1/2}x_1^{1/2}}_{\beta_1=0} + \underbrace{\beta_2\lambda^{1/2}x_2^{1/2}}_{\beta_2=0} + \underbrace{\beta_{11}\lambda x_1 + \beta_{22}\lambda x_2 + \beta_{12}\lambda^{1/2}x_1^{1/2}\lambda^{1/2}x_2^{1/2}}_{\lambda\left(\beta_{11}x_1+\beta_{22}x_2+\beta_{12}\sqrt{x_1x_2}\right)}$$

**Aby byla GL-funkce lineárně homogenní, musí platit**: $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, takže

$$\tilde{u}(x) = \beta_{11}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1x_2}\,.$$

**Kvazikonkávnost** pro tvar $\tilde{u}(x) = \beta_{11}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1x_2}$

$$u_1 = \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad u_2 = \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad u_{11} = \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{x_2}\left(-\frac{1}{2}\right)x_1^{-3/2} = -\frac{\beta_{12}}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$

$$u_{22} = \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{x_1}\left(-\frac{1}{2}\right)x_2^{-3/2} = -\frac{\beta_{12}}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \quad u_{12} = \frac{\beta_{12}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}}$$

$$u_{21} = \frac{\beta_{12}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}}$$

$$U = \begin{vmatrix} 0 & \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \\ \beta_{11} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & -\frac{\beta_{12}}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}} \\ \beta_{22} + \frac{\beta_{12}}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}} & -\frac{\beta_{12}}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda p_1 & \lambda p_2 \\ \lambda p_1 & -\frac{\beta_{12}}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}} \\ \lambda p_2 & \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1x_2}} & \frac{\beta_{12}}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda p_1 \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} \cdot \lambda p_2 + \lambda p_2 \lambda p_1 \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} - \lambda^2 p_1^2 \left( -\frac{\beta_{12}}{4x_2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \right) - \lambda^2 p_2^2 \left( -\frac{\beta_{12}}{4x_1} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \right) =$$

$$= \lambda^2 \left[ p_1 p_2 \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} + p_1 p_2 \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} + p_1^2 \frac{\beta_{12}}{4x_2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + p_2^2 \frac{\beta_{12}}{4x_1} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \right] =$$

$$= \lambda^2 \left[ p_1^2 \frac{\beta_{12}}{4x_2} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + p_2^2 \frac{\beta_{12}}{4x_1} \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + 2 p_1 p_2 \frac{\beta_{12}}{4\sqrt{x_1 x_2}} \right] =$$

$$= \underbrace{\lambda^2}_{>0} \cdot \frac{\beta_{12}}{4} \left[ \underbrace{p_1^2 \sqrt{\frac{x_1}{x_2^3}} + p_2^2 \sqrt{\frac{x_2}{x_1^3}} + 2 p_1 p_2 \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}}}_{>0 \; pro \; x_1 > 0,\, x_2 > 0} \right] > 0$$

Kvazikonkávnost vyžaduje, aby $\beta_{12} > 0$.

## 4.6 Zobecněná leontiefovská užitková funkce (klasická)

**Nalezení rovnovážného bodu:**

$$u(x)=\beta_{11}x_1+\beta_{22}x_2+2\beta_{12}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

$$u_1(x)=\beta_{11}+\frac{\beta_{12}\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\lambda.p_1$$ **za podmínek** $p_1x_1+p_2x_2=M$

$$u_2(x)=\beta_{22}+\frac{\beta_{12}\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}=\lambda.p_2$$

**Řešíme soustavu rovnic**

$$\frac{\beta_{11}}{p_1}+\frac{\beta_{12}\sqrt{x_2}}{p_1\sqrt{x_1}}=\lambda=\frac{\beta_{22}}{p_2}+\frac{\beta_{12}\sqrt{x_1}}{p_2\sqrt{x_2}}$$

$$\beta_{11}p_2-\beta_{22}.p_1=\frac{\beta_{12}p_1\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}-\frac{\beta_{12}p_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$

$$\beta_{11}p_2-\beta_{22}.p_1=\beta_{12}p_1\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\beta_{12}p_2\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$

**Provedeme substituci** $z=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ **a následně dosadíme**

$$\beta_{11}p_2-\beta_{22}.p_1=\beta_{12}p_1.z-\beta_{12}p_2.\frac{1}{z}$$ **, neboli po vynásobení** $z$

$$\beta_{12}p_1.z^2+z(\beta_{22}.p_1-\beta_{11}p_2)-\beta_{12}p_2=0$$ **, a řešíme jako kvadratickou rovnici**

$$z_{1,2}=\frac{\beta_{11}p_2-\beta_{22}p_1\pm\sqrt{(\beta_{11}p_2-\beta_{22}p_1)^2-4\beta_{12}p_1.\beta_{12}p_2.}}{2\beta_{12}p_1}$$

$$z_{1,2}=\frac{\beta_{11}p_2-\beta_{22}p_1\pm\sqrt{(\beta_{11}p_2-\beta_{22}p_1)^2-4\beta_{12}{}^2p_1.p_2.}}{2\beta_{12}p_1}$$

$$z_{1,2}=\frac{\beta_{11}p_2-\beta_{22}p_1\pm\sqrt{\beta_{11}{}^2p_2{}^2-\beta_{22}{}^2p_1{}^2-2\beta_{11}\beta_{22}p_1p_2-4\beta_{12}{}^2p_1.p_2.}}{2\beta_{12}p_1}$$

**Smysl má jenom kořen s +, protože jinak by řešení bylo záporné (nepřípustné).**[2]

$$z=\frac{\beta_{11}p_2-\beta_{22}p_1+\sqrt{\beta_{11}{}^2p_2{}^2-\beta_{22}{}^2p_1{}^2-2\beta_{11}\beta_{22}p_1p_2-4\beta_{12}{}^2p_1.p_2.}}{2\beta_{12}p_1}$$

**Zřejmě máme** $x_1=x_2.z^2$

## 4.7 Užitková funkce typu TRANSLOG

**Dvoukomoditní Translog** je v nejširším kontextu představován tímto zápisem

[2] No ale $\beta_{12}$ může být záporné, takže to tak docela není pravda.

**(4.71)** $\log u(x) = c_0 + \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 + \beta_{11} \log^2 x_1 + \beta_{12} \log x_1 \log x_2 + \beta_{22} \log^2 x_2$ .

jinak také

**(4.71A)**
$$u(x) = \exp\{c_0 + \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 + \beta_{11} \log^2 x_1 + \beta_{12} \log x_1 \log x_2 + \beta_{22} \log^2 x_2\}$$
$$u(x) = c_1 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \exp\{\beta_{11} \log^2 x_1 + \beta_{12} \log x_1 \log x_2 + \beta_{22} \log^2 x_2\}$$

**Mezní užitky** jsou dány příslušnými parciálními derivacemi **(4.72)**

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = u(x) \cdot \left[\frac{\beta_1}{x_1} + 2\frac{1}{x_1}\beta_{11} \log x_1 + \frac{1}{x_1}\beta_{12} \log x_2\right] = \underbrace{\frac{u(x)}{x_1}}_{>0}[\beta_1 + 2\beta_{11} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2]$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = u(x) \cdot \left[\frac{\beta_2}{x_2} + 2\frac{1}{x_2}\beta_{22} \log x_2 + \frac{1}{x_2}\beta_{12} \log x_1\right] = \underbrace{\frac{u(x)}{x_2}}_{>0}[\beta_2 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1]$$

Je patrné, že nelze zaručit, aby byly mezní užitky kladné pro všechna $x_1 > 0, x_2 > 0$ , a to tehdy ne, ani když budou všechna $\beta_i, \beta_{ij}$ kladná.

**Mezní míra substituce**

**(4.73)**
$$m_{12} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{\beta_1 + 2\beta_{11} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2}{\beta_2 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1}$$

Ani zde **nelze nijak zaručit, aby byla kladná při všech hodnotách parametrů**

**Kladnost mezních užitků** můžeme posoudit s ohledem na zápis **(4.72)**:

$$\beta_1 + 2\beta_{11} \log x_1 + \beta_{12} \log x_2 > 0 \Rightarrow \beta_{12} \log x_2 > -\beta_1 - 2\beta_{11} \log x_1$$
$$pro\ \beta_{12} < 0 \Rightarrow \log x_2 < \frac{-\beta_1 - 2\beta_{11} \log x_1}{\beta_{12}} \Rightarrow$$
$$x_2 < \exp\left\{\frac{-\beta_1 - 2\beta_{11} \log x_1}{\beta_{12}}\right\}.$$
$$pro\ \beta_{12} > 0 \Rightarrow \log x_2 > \frac{-\beta_1 - 2\beta_{11} \log x_1}{\beta_{12}} \Rightarrow \quad x_2 > \exp\left\{\frac{-\beta_1 - 2\beta_{11} \log x_1}{\beta_{12}}\right\}.$$

Odtud je patrné, že mezní užitek 2. statku může být kladný jen v určité části komoditního prostoru

$$\beta_2 + 2\beta_{22} \log x_2 + \beta_{12} \log x_1 > 0 \Rightarrow \beta_{12} \log x_1 > -\beta_2 - 2\beta_{22} \log x_2$$
$$pro\ \beta_{12} < 0 \Rightarrow \log x_1 < \frac{-\beta_2 - 2\beta_{22} \log x_2}{\beta_{12}} \Rightarrow$$
$$x_1 < \exp\left\{\frac{-\beta_2 - 2\beta_{22} \log x_2}{\beta_{12}}\right\}$$
$$pro\ \beta_{12} > 0 \Rightarrow \log x_1 < \frac{-\beta_2 - 2\beta_{22} \log x_2}{\beta_{12}} \Rightarrow \quad x_1 > \exp\left\{\frac{-\beta_2 - 2\beta_{22} \log x_2}{\beta_{12}}\right\}$$

Odtud je vidět, že mezní užitek druhého statku může být kladný jen v určité části komoditního prostoru.

## Homogenita TRANSLOGU

popsaného definicí **(4.71)** může být vyšetřena tímto způsobem:

$$u(\lambda x)=exp\{c_0+\beta_1 log(\lambda x_1)+\beta_2 log(\lambda x_2)+\beta_{11} log^2(\lambda x_1)+\beta_{12} log(\lambda x_1)log(\lambda x_2)+\beta_{22} log^2(\lambda x_2)\}=$$
$$=\underbrace{e^{c_0}\cdot e^{\beta_1 log(\lambda x_1)}\cdot e^{\beta_2 log(\lambda x_2)}}_{\lambda^{\beta_1+\beta_2}\cdot c_1\cdot x_1^{\beta_1}\cdot x_2^{\beta_2}\Rightarrow CD-funkce}\cdot e^{\beta_{11} log^2(\lambda x_1)}\cdot e^{\beta_{12} log(\lambda x_1)log(\lambda x_2)}\cdot e^{\beta_{22} log^2(\lambda x_2)}$$

Jak vidno, Cobb-Douglasova funkce je součástí TRANSLOGU.

$$e^{\beta_{11}\log^2(\lambda x_1)}=e^{\beta_{11}(\log\lambda+\log x_1)(\log\lambda+\log x_1)}=e^{\beta_{11}\left(\log^2\lambda+\log^2 x_1+2\log\lambda\log x_1\right)}\quad\rightarrow A$$
$$e^{\beta_{22}\log^2(\lambda x_2)}=e^{\beta_{22}(\log\lambda+\log x_2)(\log\lambda+\log x_2)}=e^{\beta_{22}\left(\log^2\lambda+\log^2 x_2+2\log\lambda\log x_2\right)}\quad\rightarrow B$$
$$e^{\beta_{12}\log(\lambda x_1)\log(\lambda x_2)}=e^{\beta_{12}(\log\lambda+\log x_1)(\log\lambda+\log x_2)}=e^{\beta_{12}\left(\log^2\lambda+\log x_1\log x_2+\log\lambda\log x_1+\log\lambda\log x_2\right)}\quad\rightarrow C$$
$$A+B+C=\underbrace{e^{[\beta_{11}+\beta_{12}+\beta_{22}]\log^2\lambda}}_{U}\cdot\underbrace{e^{[2\beta_{11}\log x_1+2\beta_{22}\log x_2+\beta_{12}\log x_1+\beta_{12}\log x_2]\log\lambda}}_{V}\cdot\underbrace{e^{\beta_{11}\log^2 x_1}\cdot e^{\beta_{22}\log^2 x_2}\cdot e^{\beta_{12}\log x_1\log x_2}}_{2.\ \check{c}\acute{a}st\ p\mathring{u}vodn\acute{i}h\ TRANSLOGU}$$

Aby byla funkce **lineárně homogenní**, musí být člen označený **U** roven 1, tj. musí platit

**(4.77)** $[\beta_{11}+\beta_{12}+\beta_{22}]\log^2\lambda=0$ neboli (λ libovolné > 0) $\beta_{11}+\beta_{12}+\beta_{22}=0.$

Kromě toho musí platit

**(4.78)** $[2\beta_{11}\log x_1+2\beta_{22}\log x_2+\beta_{12}\log x_1+\beta_{12}\log x_2]\log\lambda=0$,

(λ libovolné > 0), neboli obsah hranaté závorky [ ] musí být rovný 0.

Rozepsáno to znamená podmínku $(2\beta_{11}+\beta_{12})\log x_1+(\beta_{12}+2\beta_{22})\log x_2=0$. Jelikož jsou argumenty $x_1, x_2$ libovolné kladné, musí být

**(4.79AB)** $2\beta_{11}+\beta_{12}=0$ a současně také $\beta_{12}+2\beta_{22}=0$.

Dohromady ted y $$\sum_{j=1}^{2}\beta_{ij}=0,\ i=1,2.$$

Pokud tedy vezmeme $\beta_{11}>0,\beta_{22}>0\Rightarrow\beta_{12}=-2\beta_{11};\beta_{12}=-2\beta_{22}$ a TRANSLOG musí být tvaru
$$u(x)=c_1x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdot\exp\{c_2(\log x_1)\cdot(\log x_1)-c_2(\log x_1)(\log x_2)+c_2(\log x_2)(\log x_2)\},\ c_2>0.$$

To je ale v rozporu s požadavkem (1), protože pak by celá trojice $\beta_{11},\beta_{12},\beta_{22}$ musela být nulová. Znamená to tedy, že **dvoukomoditní TRANSLOG nemůže být homogenní** za žádných okolností.

## 8.7 Exponenciální užitková funkce

**Mějme další dvoukomoditní užitkovou funkci ve tvaru**

$$u(x_1,x_2) = \alpha_1 e^{\beta_1 x_1} + \alpha_2 e^{\beta_2 x_2}$$ s kladnými $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$

a tedy s mezními užitky

$u_1 = \dfrac{\delta u}{\delta x_1} = \alpha_1 \beta_1 e^{\beta_1 x_1}$ $u_2 = \dfrac{\delta u}{\delta x_2} = \alpha_2 \beta_2 e^{\beta_2 x_2}$, které jsou ale kladné jen za další podmínky,

kdy oba parametry v exponenciále budou též kladné: $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ .

**Z nutné podmínky pro existenci rovnovážného bodu dostaneme** $\dfrac{u_1}{p_1} = \lambda = \dfrac{u_2}{p_2}$ ,

**neboli** $p_2 \alpha_1 \beta_1 e^{\beta_1 x_1} = p_1 \alpha_2 \beta_2 e^{\beta_2 x_2}$ **a odtud** $e^{\beta_1 x_2} = \dfrac{p_2 \alpha_1 \beta_1}{p_1 \alpha_2 \beta_2} e^{\beta_1 x_1}$ **neboli**

$$x_2 = \frac{ln\left(\dfrac{p_2 \alpha_1 \beta_1}{p_1 \alpha_2 \beta_2}\right)}{\beta_2} + \frac{\beta_1}{\beta_2} x_1 .$$

**Zde vidíme, že pro splnění požadavku na to, aby se tato Marshallovská poptávka realizovala v kladné souřadnici, musíme přijmout ještě další omezení:**

- koeficienty $\beta_1, \beta_2$ musí mít shodná znaménka
- je-li argument v logaritmu větší než 1, musí být koeficient $\beta_1$ kladný, resp. naopak
- je-li argument v logaritmu menší než 1, musí být koeficient $\beta_1$ záporný.

**Následně, dosazením do rozpočtového omezení dostaneme:**

$$p_1 x_1 + p_2 \left( \frac{ln\left(\dfrac{p_2 \alpha_1 \beta_1}{p_1 \alpha_2 \beta_2}\right)}{\beta_2} + \frac{\beta_1}{\beta_2} x_1 \right) = M$$ a tedy

$$x_1 \left( p_1 + p_2 \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) = M - \frac{p_2}{\beta_2} . \left( ln\left(\frac{p_2 \alpha_1 \beta_1}{p_1 \alpha_2 \beta_2}\right)\right)$$ neboli

$$x_1 (p_1 \beta_2 + \beta_1 p_2) = M . \beta_2 - p_2 . \left( ln\left(\frac{p_2 \alpha_1 \beta_1}{p_1 \alpha_2 \beta_2}\right)\right)$$ neboli

$$^M x_1^* = \frac{\beta_2 . \left( M - \dfrac{p_2}{\beta_2} . ln\left(\dfrac{p_2 \alpha_1 \beta_1}{p_1 \alpha_2 \beta_2}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}$$

**Analogicky** (záměnou indexů u příslušných parametrů a cen) **bychom dostali druhou Marshallovskou poptávku jako**

$$^M x_2^* = \frac{\beta_1 . \left( M - \dfrac{p_1}{\beta_1} . ln\left(\dfrac{p_1 \alpha_2 \beta_2}{p_2 \alpha_1 \beta_1}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2} .$$

**Vlastnosti Marshallovských poptávek:**

**Není splněno, že při nulovém *M* je hodnota poptávek nulová:**

$$ {}^{M}x_1^{*}(0,p) = \frac{-p_2.[ln(p_2\alpha_1\beta_1) - ln(p_1\alpha_2\beta_2)]}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2} $$

**Není obecně splněna nezápornost poptávek:**

${}^{M}x_1^{*}(M,p) \geq 0$ **platí jen pro** $M \geq \frac{p_1}{\beta_1}.ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)$ .

**Evidentně platí spojitost v *M* i *p*:**

**Platí homogenita stupně 0 v M a p:**

$$ {}^{M}x_1^{*}(\lambda M,\lambda p) = \frac{\beta_2.\left(\lambda M - \frac{\lambda p_2}{\beta_2}.ln\left(\frac{\lambda p_2\alpha_1\beta_1}{\lambda p_1\alpha_2\beta_2}\right)\right)}{\beta_2\lambda p_1 + \beta_1\lambda p_2} = \frac{\lambda}{\lambda}.\frac{\beta_2.\left(M - \frac{p_2}{\beta_2}.ln\left(\frac{p_2\alpha_1\beta_1}{p_1\alpha_2\beta_2}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2} = {}^{M}x_1^{*}(\lambda M,\lambda p) $$

**Kvazikonkávnost** (přímé užitkové funkce)**:**

$$ \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1\beta_1 e^{\beta_1 x_1} & \alpha_2\beta_2 e^{\beta_2 x_2} \\ \alpha_1\beta_1 e^{\beta_1 x_1} & \alpha_1\beta_1^2 e^{\beta_1 x_1} & 0 \\ \alpha_2\beta_2 e^{\beta_2 x_2} & 0 & \alpha_2\beta_2^2 e^{\beta_2 x_2} \end{vmatrix} = $$

$$ -\alpha_2\alpha_1^2\beta_1^2\beta_2^2 e^{2\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} - \alpha_1\alpha_2^2\beta_1^2\beta_2^2 e^{\beta_1 x_1 + 2\beta_2 x_2} < 0 $$

**, pokud**

**přijímáme podmínky** $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ (ale nezávisle na znaménkách $\beta_1, \beta_2$ ).

**Přímá užitková funkce tedy není** (v souladu s očekáváním) **kvazikonkávní.**

**Nepřímá užitková funkce následně bude mít tvar**

$$ \Psi(M,p_1,p_2) = \alpha_1 e^{\beta_1 \frac{\beta_1.\left(M - \frac{p_1}{\beta_1}.ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} + \alpha_2 e^{\beta_2 \frac{\beta_2.\left(M - \frac{p_2}{\beta_2}.ln\left(\frac{p_2\alpha_1\beta_1}{p_1\alpha_2\beta_2}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} $$

$$ \Psi(M,p) = \alpha_1 e^{\frac{\beta_1^2.\left(M - \frac{p_1}{\beta_1}.ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} + \alpha_2 e^{\frac{\beta_2^2.\left(M - \frac{p_2}{\beta_2}.ln\left(\frac{p_2\alpha_1\beta_1}{p_1\alpha_2\beta_2}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} $$

$$ \Psi(M,p) = \alpha_1 e^{\frac{\beta_1^2 M - \beta_1 p_1.ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} + \alpha_2 e^{\frac{\beta_2^2 M - \beta_2 p_2.ln\left(\frac{p_2\alpha_1\beta_1}{p_1\alpha_2\beta_2}\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} $$

$$ \Psi(M,p) = \alpha_1 e^{\frac{\beta_1^2 M}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}}.\alpha_1 e^{-\frac{\beta_1 p_1.ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} + \alpha_2 e^{\frac{\beta_2^2 M}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}}.\alpha_2 e^{-\frac{\beta_2 p_2.ln\left(\frac{p_2\alpha_1\beta_1}{p_1\alpha_2\beta_2}\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} $$

**Výdajovou funkci ale budeme konstruovat těžko ze vztahu:**

$$ u = \alpha_1 e^{\frac{\beta_1^2 E({}^0u,p) - \beta_1 p_1.ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} + \alpha_2 e^{\frac{\beta_2^2 E({}^0u,p) - \beta_2 p_2.ln\left(\frac{p_2\alpha_1\beta_1}{p_1\alpha_2\beta_2}\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} . $$