MAMO
podzim 2013
Přednáška 5
Lit: W-MT, s 3.2.1, 5.2
Krueger web
McC-ABC ch 4, 5

Analytické vs. numerické řešení

Porovnání analytického řešení a aproximativního řešení (z iterace hodnotové funkce).

Model z minulé přednášky. C-D produkční funkce, logaritmická užitková funkce, stoprocentní depreciace. Produkční funkce $F(k,n) = k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$, kde $\alpha \in (0,1)$, $u(c_t) = \ln(c_t)$ a depreciace kapitálu $\delta = 1$. Produkční funkci můžeme přepsat jako $f(k) = k^{\alpha}$.

Bellmanova rovnice

$$v(k) = \max_{k'} \{\ln(k^{\alpha} - k') + \beta v(k')\}$$

Analytické řešení

Řešíme pomocí Guess & Verify. Náš odhad je:

$$v(k) = a + b \ln k$$

kde a, b jsou koeficienty, které musíme určit. Bellmanova rovnice po dosazení

$$a + b \ln k = \max_{k'} \{\ln(k^{\alpha} - k') + \beta(a + b \ln k')\} \tag{1}$$

Postup:

1. Řešíme maximalizační problém na pravé straně rovnice (1). Výsledkem je
$$k' = \frac{\beta b k^{\alpha}}{1 + \beta b}$$
2. Dosadíme do (1) za k' a zjistíme koeficienty
$$a = \frac{1}{1-\beta}[\beta b \ln(\beta b) - (1 + \beta b)\ln(1 + \beta b)]$$
$$b = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}$$
3. Dosadíme do rozhodavacího pravidla za b. Rozhodovací pravidlo pro kapitál $k' = \alpha\beta k^{\alpha}$, pro spotřebu $c = (1-\alpha\beta)k^{\alpha}$ Steady state je $k^* = (\alpha\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Iterace hodnotové funkce

Iterativní schéma

$$v_{i+1}(k) = \max_{k'} [u(k,k') + \beta v_i(k')]$$

Můžeme zkusit řešit příklad analyticky (maximalizace, dosazení a tak dále) – náročné. Radši numericky. Určíme si, že kapitál (k a k') může nabýt pěti hodnot $\kappa \in \{0.04, 0.08, 0.12, 0.16, 0.20\}$ Hodnotová funkce se skládá z 5 hodnot $v_n(0.04)$, $v_n(0.08)$, ... Paramtery, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.6$.

1. Počáteční odhad $v_0(k) = 0$ pro všechna $k \in \kappa$

2. Vyřešíme $v_1(k) = \max_{k'}\{\ln(k^{0.3} - k') + 0.6 * 0\}$. Hledáme maximum pravé strany. Která hodnota k' (z 5 možných) maximalizuje RHS BE? Řešením je $k' = g_1(k) = 0.04$ pro všechna k.
3. Vypočítáme hodnotovou funkci $v_1(k)$ pro všech 5 hodnot k s $k' = 0.04$.
4. Opakujeme první krok, s již vypočítanou (maximální) hodnotovou funkcí $v_1(k)$ na pravé straně. Opět hledáme, které k' (z 5 možných) maximalizuje výraz na pravé straně $v_2(k) = \max_{k'}\{\ln(k^{0.3} - k') + 0.6 * v_1(k')\}$. Řešením je $k' = g_2(k) = 0.08$, pro $k = 0.04$. Další viz tabulka.

Obrázek. Aproximace hodnotové funkce. Již po 20 iteracích jsme hodně blízko. Rozhodovací pravidlo nekonverguje ke skutečnému, ani více iterací nepomáhá. Proč? Analytické rozhodovací pravidlo může nabývat kterékoliv hodnoty, zatímco při numerické aproximaci jsme se omezili na pět hodnot $k \in \kappa$. (g_{10} je nejlepší aproximace). Hodnotová funkce vypadá lépe, protože užitková a produkční funkce modelu přenáší do hodnotové funkce zakřivenost. Pozn. Skutečná hodnotová funkce a rozhodovací pravidlo jsou jen body. (Na obrázku vypadají spojitě, matlab mezi nimi udělal interpolaci).

Stochastický neoklasický model (RBC)

Stochastické dynamické programování. Do hry vstupují očekávání.

Reprezentativní spotřebitel maximalizuje očekávanou užitkovou funkci

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

kde E_0 je operátor očekávání, podmíněných informacemi dostupnými v čase $t = 0$. c_t je zde náhodná proměnná. (Spotřebitel má 1 jednotku práce, kterou (neelasticky) každé období nabízí na trhu práce).

Produkční funkce

$$y_t = z_t F(k_t, n_t)$$

kde z_t je náhodný technologický šok. Může být modelován jako *iid* proměnná nebo Markovský řetězec (nebo AR proces). Předpokládejme, že $\{z_t\}_{t=0}^{\infty}$ bude *iid* proměnná – nezávisle a rovnoměrně rozdělená (každé období vybrána z pravděpodobnostního rozložení $G(z)$). Na začátku každého období se agent dozví, co se událo za šok, a teprve poté dělá svoje rozhodnutí. Další rovnice jsou stejné, jak předtím, kapitál se vyvíjí dle rovnice

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

a výstup je buď investován nebo spotřebován.

$$y_t = i_t + c_t$$

Organizace trhů

Arrow-Debreu

Kontrakty se uzavřou v čase $t = 0$ na konkurenčním trhu pro každou možnou realizaci šoků. Podmíněné smlouvy: slib dodat množství práce/kapitálu v čase T. Pak se to rozběhne a kontrakty se uskutečňují. (Konkurenční rovnováha je Pareto optimální).

Sekvenční trhy

Spotový trh s racionálními očekáváními. Strany se každý den potkávají a uskutečňují obchody na základě svých očekávání o budoucích cenách. V rovnováze se trhy čistí každé období pro každou realizaci šoku. Očekávání jsou racionální v tom smyslu, že očekávání o pravděpodobnostním rozdělení budoucích cen je stejné jako skutečné pravděpodobnostní rozdělení. Mohou být překvapeni, ale ne systematicky oklamáváni, využívají informace efektivně. V našem modelu je tato rovnováha stejná jako rovnováha AD.

Problém sociálního plánovače

Konkurenční rovnováha je Pareto optimální. Můžeme přejít na řešení problému sociálního plánovače.

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} E_0 \beta^t u(c_t)$$

vzhledem k

$$c_t + k_{t+1} = z_t f(k_t) + (1-\delta)k_t$$

protože $f(k_t) = F(k_t, 1)$.

Stavová proměnná k_t a z_t.

- k_t je určeno minulým rozhodnutím (endogenní stavová proměnná)
- z_t je dáno náhodou (exogenní stavová proměnná)

Bellmanova rovnice

$$v(k_t, z_t) = \max_{k_{t+1}} [u(c_t) + \beta E_t v(k_{t+1}, z_{t+1})]$$

vzhledem k $c_t = z_t f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}$. Naše řídící proměnná je jen k_{t+1}, za c_t dosadíme z omezení ekonomiky.

Proměnná z_t je zdrojem nejistoty (agenti vědí jen pravděpodobnostní rozdělení), proto očekávaný užitek (očekávaná hodnotová funkce), je tam to E_t. E_t je operátor očekávání podmíněných informacemi v čase t. Řešení pomocí iterace hodnotové funkce. Předpokládejme, že jsou možné jen dvě realizace šoků z^1 a z^2 (např. 0.75 a 1.75) a k tomu dvě pravděpodobnosti p_1 a p_2. Předpokládáme, že proměnná z je modelována jako *iid*. Jsme v čase 0, vybíráme kapitál k_1

Použijeme teorii očekávaného užitku, pro každou hodnotu kapitálu k_1 dostaneme

$$E_0 v(k_1, z_1) = p_1 v(k_1, z^1) + p_2 v(k_1, z^2)$$

Nebo obecněji pro jakýkoliv čas

$$E_t v(k_{t+1}, z_{t+1}) = p_1 v(k_{t+1}, z^1) + p_2 v(k_{t+1}, z^2)$$

Bellmanova rovnice se nám rozpadne na dva případy

$$v(k_t, z^1) = \max_{k_{t+1}} [u(z^1 f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \beta[p_1 v(k_{t+1}, z^1) + p_2 v(k_{t+1}, z^2)]$$

$$v(k_t, z^2) = \max_{k_{t+1}} [u(z^2 f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \beta[p_1 v(k_{t+1}, z^1) + p_2 v(k_{t+1}, z^2)]$$

[očekávání v Bellmanově rovnici $E_t v(k_{t+1}, z_{t+1})$ je rovno: diskontovaný užitek (hodnotová funkce), když si náhoda vybere z^1 krát pravděpodobnost p_1 + diskontovaný užitek, když si náhoda vybere z^2 krát pravděpodobnost p_2]

Hledání hodnotové funkce iterativně, např. pro z^1

$$v_1(k_t, z^1) = \max_{k_{t+1}} [u(z^1 f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \beta[p_1 v_0(k_{t+1}, z^1) + p_2 v_0(k_{t+1}, z^2)]$$

maximalizujeme a dosazujeme v cyklu dokud to nezkonverguje. Obdobně pro z^2. Dostaneme aproximaci hodnotové funkce a rozhodovací pravidlo: v tomto případě 2 hodnotové funkce a 2 rozhodovací pravidla (pro z^1 a z^2).

Obrázek: *přechodová* množina (transition set) množitna hodnot kaptiálu, která nenastane v dlouhém období. *ergodická* množina (ergodic set) množina, kterou kapitál nikdy neopustí, když se tam dostane.

Ekonomika nyní nekonverguje do steady statu, protože disturbance (technologické šoky) způsobí neustálé fluktuace ve výstupu, spotřebě, investicích. Ekonomika konverguje ke stochastickému steady-statu, což je nějaká sdružená hustota pravděpodobnosti výstupu, spotřeby a investic.

Lze vypočítat deterministický steady-state. Šoky nastavíme na svou střední hodnotu. Steady state spočítáme analyticky z podmínek prvního řádu (Eulerovka), $k_t = k_{t+1} = k^*$, $c_t = c_{t+1} = c^*$.

Konečně už tu máme stochastiku. Model můžeme nasimulovat (vybereme konkrétní produkční a užitkové funkce a nakalibrujeme parametry) a pak stačí výchozí hodnota kapitálu k_0 a sekvence šoků $\{z\}_{t=0}^{T}$ generovaná nějakým náhodným generátorem a podle rozhodovacích pravidel pro k a c a dopočítáním dalších proměnných dostaneme časové řady z modelu. Tyto řady připomínají detrendované časové řady dat (pro U.S.). Výstup ze simulace modelu porovnáme se skutečnými daty z hlediska statistických momentů - (střední hodnota, rozptyl, autokorelace, křížové korelace). Pokud chování základního modelu neodpovídá datům, můžeme ho nějakým způsobem modifikovat a tak dále. Případně se dá model použít pro analýzu efektů hospodářské politiky.

Poznámka: pokud je šok modelován jako Markovský proces, pak Bellmanova rovnice bude vypadat následovně

$$v(k_t, z_t) = \max_{k_{t+1}} [u(c_t) + \beta E_t v(k_{t+1}, z_{t+1} | z_t)]$$

konkrétně s pravděpodobnostní maticí

$$v(k_t, z_t) = \max_{k_{t+1}} [u(c_t) + \beta \sum_{z_{t+1}} P(z_{t+1} | z_t) v(k_{t+1}, z_{t+1})]$$

a rozepsaně

$$v(k_t, z^1) = \max_{k_{t+1}} [u(z^1 f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \beta[p_{11} v(k_{t+1}, z^1) + p_{12} v(k_{t+1}, z^2)]$$

$$v(k_t, z^2) = \max_{k_{t+1}} [u(z^2 f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \beta[p_{21} v(k_{t+1}, z^1) + p_{22} v(k_{t+1}, z^2)]$$

Řešení pomocí diferenciace Bellmanovy rovnice, případně pomocí Lagrangiánu vede na podmínku optimality – stochastická Eulerova rovnice.

$$u'(c_t) = \beta E_t [u'(c_{t+1})(1 + f'(k_{t+1}) - \delta)]$$

(nelineární stochastická rovnice, řešení pomocí log-linearizace a pak numericky)

Vlastnosti řešení

- **Uhádni a ověř (guess and verify)** analytické řešení (+), funguje jen v pár případech (−)
- **Iterace hodnotové funkce (value function iteration)** uchovává „zakřivení modelu“ (rozhodovacího pravidla), dobré druhé momenty (+), funguje i když ekonomika dále od steady-statu (+), výpočetně náročné pro složitější modely (když je hodně stavových proměnných, hodně stavů např. šoků, větší diskretizace) (−)
- **Lineráně kvadratické dynamické programování** (Kvadratická aproximace cílové funkce, linearizace rozpočtového omezení, (reformulace problému, hodně derivací)
- **Log-linearizace** podmínek prvního řádu a rozpočtového omezení. Poměrně jednoduché a také nejpoužívanější. Softwarové nástroje na řešení (+), lineární rozhodovací pravidlo (−).