Teorie ekonomického růstu

S využitím materiálů od Kåre Bævre, Department of Economics, University of Oslo

3 Solowův model

Základní literatura: BSiM:Ch. 1
Klasika: Solow (1956), Swan (1956)

3.1 Model

3.1.1 Předpoklady

- Aggregátní produkční funkce
$$Y(t) = F(K(t), L(t))$$
- Základí myšlenka: růst výstupu (Y) je možný pouze při růstu vstupů (K, L)
- Práce: $\dot{L}/L = n$ (exogenní)
- Práce je homogenní. (Žádný lidský kapitál)
- K je vyráběn stejnou technologií jako Y
- K je tzv. reprodukovatelný vstup
- Jednosektorová produkce homogenního statku, který může být
  - spotřebován, $C(t)$
  - nebo investován, $I(t)$, za účelem vytvoření dalšího kapitálu $K(t)$
- Uzavřená ekonomika. Úspory se rovnají investicím.
- Růst K z investic (úspor):
$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \tag{1}$$
kde δ označuje míru depreciace kapitálové zásoby.
- Ekonomika Robinsona Crusoe (Firmy/domácnosti a tržní struktura je 'za scénou', budeme se tím zabývat později)
- Exogenní míra úspor, s: $S(t) = sY(t)$
- Žádné chování

3.1.2 Neoklasická produkční funkce

- Produkční funkce splňuje následující předpoklady (the time notation is suppressed):

  1. Kladný a klesající mezní produkt

  $$\begin{array}{ll} \frac{\partial F}{\partial K} > 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial L} > 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \end{array}$$

  2. Konstantní výnosy z rozsahu (Constant returns to scale, CRS)

  $$F(cK, cL) = cF(K, L), \quad \text{for all } c \geq 0$$

  3. Inadovy podmínky:

  $$\begin{aligned} \lim_{K \to 0} F_K = \lim_{L \to 0} F_L &= \infty \\ \lim_{K \to \infty} F_K = \lim_{L \to \infty} F_L &= 0 \end{aligned}$$

  kde $F_K = \frac{\partial F}{\partial K}$ a $F_L = \frac{\partial F}{\partial L}$

- CRS implikují, že produkční funkce může být zapsána v intenzivní podobě

  $$Y = F(K, L) = LF(K/L, 1) = Lf(k) \Rightarrow y = f(k)$$

  kde $y \equiv Y/L$, $k \equiv K/L$ a funkce $f(k) \equiv F(k, 1)$

- $y = f(k)$. Pouze kapitálová intenzita k je důležitá pro ekonomickou úroveň (tj. y).
  CRS $\approx$ neutralita vzhledem k rozsahu

- **Exercise 1**: Show that

  $$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial K} &= f'(k) \\ \frac{\partial Y}{\partial L} &= f(k) - kf'(k) \end{aligned}$$

  and that the Inada conditions tranlates into:

  $$\begin{aligned} \lim_{k \to 0} f'(k) &= \infty \\ \lim_{k \to \infty} f'(k) &= 0 \end{aligned}$$

- **Exercise 2** (Harder): Show that the conditions above implies that each factor is **essential** to production, that is $F(0,L) = F(K,0) = 0$ for all K, L

- **Exercise 3**: Show that a Cobb-Douglas production function $Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ satisfies these neoclassical properties.

- **Exercise 4**: Does the following production functions satisfy the neoclassical properties?

$$\begin{aligned} Y &= AK && (2) \\ Y &= AK + BK^{\alpha}L^{1-\alpha} && (3) \\ Y &= A\left\{a(bK)^{\psi} + (1-a)((1-b)L)^{\psi}\right\}^{1/\psi} && (4) \end{aligned}$$

3.1.3 Řešení modelu

- Dosazením za fixní míru úspor dostaneme

$$\dot{K} = sF(K,L) - \delta K \tag{5}$$

- Derivací kapitálové intenzity k dle času a dosazením z (6) dostaneme

$$\dot{k} = \dot{K}/L - nk = sy - (n+\delta)k \tag{6}$$

  kde populace roste konstantním tempem $\dot{L}/L = n$.

- Model je charakterizován jednou dynamickou rovnicí pro k (základní rovnice modelu)

$$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k \tag{7}$$

- Základní rovnice se nezmění, když do modelu zahrneme dokonale konkurenční trhy. Spotřebitelé vlastní vstupy a finanční aktiva a dodávají neelasticky vstupy. Firmy vstupy najímají, výrábějí a prodávají výstup.

- Fungování modelu můžeme popsat pomocí fázového diagramu

- Systém konverguje ke stavu, kde se kapitál na hlavu nemění $\dot{k} = 0$. Ten se nazývá *steady-state* neboli *ustálený stav*.

- Steady statová hodnota k^* je určena:

$$sf(k^*) = (n + \delta)k^*$$

  což nám dává konstantní úroveň produkce na pracovníka

$$y^* = f(k^*)$$

- V dlouhém období (když ekonomika zkonverguje do steady statu), nedochází k *žádnému růstu výstupu na hlavu*.

- Tento model *nedokáže vysvětlit trvalý růst výstupu na hlavu*.

- V ustáleném stavu Y,K a L rostou stejným tempem n. Tím pádem jsme na vyvážené růstové trajektorii (Balanced Growth Path, BGP).

- Hlavní mechanismus, který zajišťuje konvergenci do steady statu je klesající mezní produkt z akumulovaného vstupu (tj. kapitálu).

- Role míry úspor: Růst míry úspor zvyšuje *úroveň* výstupu na hlavu nikoliv růst v dlouhém období.

- Jelikož míra úspor je omezena shora 1, neustálé zvyšování míry úspor neumožní zvýšení růstu trvale.

- Hospodářská politika neovlivní růst v dlouhém období.

- **Zlaté pravidlo kapitálové akumulace** Pro spotřebu ve stálém stavu platí
$$c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^* \tag{8}$$

- Spotřeba je maximální pokud platí
$$f'(k^*_{gr}) = (n + \delta)$$
Mezní produkt kapitálu se rovná míře depreciace a populačního růstu.

- Dynamicky efektivní ekonomika (nalevo od k^*_{gr}), dynamicky neefektivní ekonomika (napravo od k^*_{gr}) (viz BSiM 1.2.5)

3.1.4 Přechodná dynamika

- Je dobré si ilustrovat dynamiku (k, γ_k) diagramu, kde můžeme na vertikální ose odečíst tempo růstu $\gamma_k = \dot{k}/k$.
- Vykreslíme transformovanou verzi rovnice (7).

  $$\dot{k}/k = sf(k)/k - (n + \delta)$$

  kde $f(k)/k$ je průměrný produkt kapitálu, který klesá s k (Proč?)

- Tento obrázek ilustruje velmi důležitou implikaci modelu: Pokud mají dvě země stejný steady state, potom chudší země poroste rychleji.

3.1.5 Technologický pokrok

- Do modelu můžeme zavést exogenní technologický pokrok. Jelikož je pokrok nevysvětlený v rámci modelu, moc nového o zdrojích růstu se nedozvíme. Ale toto cvičení je užitečné, protože

  (i) můžeme provést růstové účetnictví

  (ii) můžeme vidět, jak technologický pokrok ovlivní dynamiku

- Můžeme přepsat produkční funkci

  $$Y(t) = F(K(t), L(t), T(t))$$

  kde $T(t)$ je parametr zachycující technologický pokrok. $T(t)$ roste konstantním tempem $\gamma_T = \dot{T}/T = x$.

- Můžeme rozlišity tři případy zapojení technologického pokroku:

  1. Neutrální (Hicks neutral): $Y = TF(K, L)$,
     kde poměr $\frac{\partial Y}{\partial K}/\frac{\partial Y}{\partial L}$ zůstane konstantní pro danou hodnotu $k = K/L$.
  2. Zlepšující práci (Labor-augmenting, Harrod neutral): $Y = F(K, TL)$,
     kde poměr $K\frac{\partial Y}{\partial K}/L\frac{\partial Y}{\partial L}$ zůstane konstantní pro danou hodnotu Y/K.
  3. Zlepšující kapitál (Capital-augmenting, Solow neutral): $Y = F(TK, L)$,
     kde poměr $K\frac{\partial Y}{\partial K}/L\frac{\partial Y}{\partial L}$ will remain constant for a given value of the ratio Y/L.

- **Exercise:** Show these properties, and draw the isoquants for different values of T. (Note that BSiM are sloppy with their notation on pp. 52-53, their F_K and F_L should be replaced by $\frac{\partial Y}{\partial K}$ and $\frac{\partial Y}{\partial L}$ respectively.)

- V datech pozorujeme, že relativní podíly vstupů ($K\frac{\partial Y}{\partial K}/L\frac{\partial Y}{\partial L}$) nevykazují v čase trend (i když krátkodobě poněkud fluktuují). Rovněž pozorujeme, že podíl Y/K je poměrně stabilní.

- Dá se ukázat, že technologický pokrok musí být *zlepšující práci*, aby model vykazoval BGP.

- Určité vyspělé země vykazují stálý růst, což naznačuje chování podle BGP.

- Nedávný (teoretický) výzkum ukazuje, že firmy maximalizující zisk budou v dlouhém období provádět výzkum, který vede k technologickému pokroku zlepšujícímu práci (Acemoglu, 2004).

- Z těchto důvodů je technologický pokrok modelován jako zlepšující práci, tj.
  $$Y(t) = F(K(t), T(t)L(t)) \tag{9}$$

- Místo vydělení všech veličin množstvím práce L, vydělíme veličiny množstvím práce v efektivních jednotkách, TL. Zadefinujme si $\hat{k} \equiv K/TL$ jako kapitál na efektivnostního pracovníka, podobně pro výstup $\hat{y} \equiv Y/TL$.

- Model je strukturálně stejný jako dříve, jediná změna je, že proměnná n je nahrazena součtem $n + x$ (Proč?)

- Opět dosáhneme steady statu $\hat{k}^*$ jako dříve a tím pádem steady statové úrovně výstupu na efektivnostního pracovníka $\hat{y}^*$. Na vyvážené růstové trajetkorii platí
$$\gamma_{\hat{y}} = \gamma_{Y/TL} = 0$$
$$\gamma_{Y/L} = \gamma_T = x$$
i.e. GDP na hlavu roste tempem technologické změny (x).

- To implikuje:

  1. Dlouhodobý růst HDP na hlavu není možný bez technologického pokroku
  2. Růst HDP na hlavu v dlouhém odobí je díky nevysvětlenému technologickému pokroku

  Tato tvrzení jsou symetrická a v podstatě shodná, ale to první vystihuje lépe podstatu věci.

3.2 Alternativní produkční funkce: Trvalý/endogenní růst, pasti chudoby

- Víme, že klesající mezní produkt kapitálu je podstatný pro závěry Solowova modelu

- Uvažujme jinou produkční funkci
$$Y = AK.$$
kde A je konstantní parametr a opět předpokládáme neexistenci technologického pokroku.

- Průměrný produkt je konstantní
$$f(k)/k = A$$

- Pokud je $sA > n + \delta$ potom dostaneme $\gamma_k = sA - (n + \delta) > 0$ a konstantní.

- Graficky:

- S AK produkční funkcí dostaneme
    1. Trvalý růst z akamulace výrobních faktorů
    2. Neexistenci konvergence
- Později budeme zkoumat modely, které se chovají přesně jako AK model.
- Všimněte si, že trvalý růst dostaneme i s jinou produkční funkcí, např.

$$\begin{aligned} Y &= AK + BK^{\alpha}L^{1-\alpha} \\ Y &= A\left\{a(bK)^{\psi} + (1-a)((1-b)L)^{\psi}\right\}^{1/\psi} \end{aligned}$$

- Tyto funkce splňují podmínku klesajícího mezního produktu kapitálu, ale nesplňují horní Inadovu podmínku. Tím pádem průměrný produkt kapitálu nekonverguje asymptoticky k 0 a my můžeme dostat trvalý růst.
- Opět graficky:

- Porušení horní Inadovy podmínky znamená, že nereprodukovatelný výrobní faktor (zde je to práce) je *nepodstatný* pro výrobu, tj. můžeme něco vyrobit i bez tohoto VF.
- Zajímavá skupina modelů je ta s pastmi chudoby. Tyto model mají složitější dynamiku $f(k)/k$ a může tak vzniknout více rovnováh (multiple equilibria). (Jeden z modelů je uveden v BSiM 1.4.2.) Graficky znázorněno:

Reference

[1] **Lucas, Robert E. Jr.,** On the Mechanics of Economic Development, *Journal of Monetary Economics*, July 1988, 22 (1), 3-42.

[2] **Solow, Robert M.,** A Contribution to the Theory of Economic Growth, *The Quarterly Journal of Economics,* February 1956, 70 (1), 65-94.

[3] **Swan, Trevor W,** Economic Growth and Capital Accumulation, *Economic Record,* November 1956, 32, 334-361.