Teorie ekonomického růstu

S využitím materiálů od Kåre Bævre, Department of Economics, University of Oslo

11 Učení se děláním (Learning by doing)

Základní literatura: BSiM: 4.3
Doporučená literatura: Irwing Klenow (1994), Thompson (2001)

11.1 Technologický pokrok jako externalita

- Z minulé přednášky víme, že pokud je disagregovaná produkční funkce

$$Y_i = F(K_i, EL_i)$$

má konstantní výnosy z rozsahu v K_i a L_i a zároveň

$$E = A(K) \tag{1}$$

mohou využívat všichni agent (např. jako veřejný statek) a platí

$$\lim_{K\to\infty} A'(K)L = b > 0 \tag{2}$$

potom můžeme dostat

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\dot{Y}}{Y} = F_L(1, b)b > 0$$

což znamená trvalý růst.

- Jedno zdůvodnění pro (1) je efekt learning by doing (učení se děláním).
- Tedy znalosti a efektivnost pramení z výroby a investování. Čím více zkušeností a know-how, tím více se vyprodukuje. Jelikož je úroveň výroby spojena s úrovní kapitálu, můžeme předpokládat platnost vztahu (1).
- V této formulaci je implicitní přepoklad úplného efektu přelévání znalostí (spill-over) v tom smyslu, že znalosti (know-how) každé firmy je veřejným statkem pro všechny ostatní firmy.
- Takže zde existuje positivní externalita z užívání kapitálu i-tou firmou pro produkci ostatních firem.

- Spojíme tedy parametr E s celkovou zásobou kapitálu v ekonomice. Konkrétně budeme pracovat s touto funkční formou

$$E = A(K) = K^{\sigma} \tag{3}$$

kde $\sigma > 0$.

- Agregátní produkční funkce je pak součtem přes všechny firmy

$$Y = F(K, EL) = F(K, K^{\sigma} L)$$

- Pokud $\sigma = 1$ a neexistuje populační růst, potom $A(K)/K = 1$ takže podmínka (2) je splněna a my dostaneme trvalý růst. To je případ diskutovaný v článku Romer (1986).
- Všimněte si, že BSiM zvažují pouze případ $\sigma = 1$.
- Pokud však $\sigma < 1$, dostaneme $A(K)/K = K^{\sigma-1} \to 0$ a pro $K \to \infty$ není podmínka (2) splněna.
- Tato podmínka však byla pouze postačující a odvozená pro případ bez populačního růstu.
- Předpokládejme, že Y a K rostou stejným tempem g (a populace tempem n)

$$Y_0 e^{gt} = F(K_0 e^{gt}, K_0^{\sigma} L_0 e^{(g\sigma+n)t})$$

Díky konstantním výnosům z rozsahu (CRS) je to možné pouze pokud

$$g = \sigma g + n \Rightarrow g = \frac{n}{1-\sigma}$$

Takže pro $\sigma < 1$ dostaneme trvalý růst Y pouze pokud $n > 0$, tj. když máme populační růst. Pokud populace roste, pak i Y/L roste nějakým kladným tempem $g - n = n\frac{\sigma}{1-\sigma} > 0$.

11.2 Implikace pro hospodářskou politiku

- Jednotlivá firma bere E jako dané. Předpokládejme, že produkční funkce $F(\cdot,\cdot)$ je C-D, pak soukromý mezní produkt kapitálu pro firmu i je

$$MPK_{p,i} = \frac{\partial F(K_i, EL_i)}{\partial K} = F_1(K_i, EL_i) = \alpha K_i^{\alpha-1}(EL_i)^{1-\alpha} \tag{4}$$

a při agregaci a využití $E = K^{\sigma}$

$$MPK_p = \alpha K^{\alpha-1+(1-\alpha)\sigma} L^{1-\alpha} \tag{5}$$

- Všimněte si, že pro $\sigma = 1$
$$MPK_p = \alpha L_i^{1-\alpha}$$
takže mezní produkt je nezávislý na K a dostaneme tak AK model.

- V tomto případě, při růstu velikosti populace dojde k růstu mezního produktu kapitálu a tím pádem k rychlejšímu růstu (tj. jako změna A v AK modelu). Tento jev se nazývá **scale effect** (efekt rozsahu ?).

- Sociální plánovač naopak vyhodnotí mezní produkt jako:
$$\begin{aligned} MPK_s &= \frac{\partial F(K, A(K)L)}{\partial K} = F_1(K, A(K)L) + LA'(K)F_2(K, A(K)L) \\ &= (\alpha + (1-\alpha)\sigma)K^{\alpha-1+(1-\alpha)\sigma}L^{1-\alpha} = (\alpha + (1-\alpha)\sigma)/\alpha \cdot MPK_p > MPK_p \end{aligned}$$
a tím pádem vybere trajektorii s vyšším růstem ($\dot{c}/c$ a $\dot{k}/k$).

- Takže v decentralizovaném řešení dochází k příliš nízkým investicím a neoptimálnímu růstu.

- Dotace na investice (nebo výrobu) může zajistit, aby firmy internalizovali externalitu. To ale musí být nějak financováno, např. pomocí daní, které však způsobují další distorze.

11.3 Empirické důkazy ohledně efektu learning by doing

- Vypadá to, že efekt učení se je obzvlášť významný v počátečních fázích existence firmy. To může naznačovat, že $\sigma < 1$.

- Existuje několik případových studií, které dokumentují podstatné efekty spojené s učením.

- Slavný příklad je výroba lodí Liberty v USA během druhé světové války.

- Množství odpracovaných dní požadovaných na vyrobení lodi dramaticky pokleslo. Nárůst produktivity byl v průměru až o 40 procent.

- Velký podíl tohoto nárůstu produktivity byl připisován efektu learning by doing.

- Nedávný výzkum však ukázal, že předchozí odhady poněkud přehnaly význam tohoto efektu, protože nebraly v úvahu roli kapitálu. Navíc docházelo k nárůstu výroby lodí na úkor kvality.

- Další případové studie se zabývaly například výrobou trupů letadel v USA.

11.4 Rozsah externalit: lokální nebo globální?

- Důležitým faktem je, že zkušenosti s výrobou lodí (Liberty) ukazují, že efekt učení se vyskytuje pouze na úrovni jednotlivé firmy (loděnice), ale neříkají toho moc o velikosti efektu přelévání.

- Právě rozsah vlivu přelévání je klíčový pro to, jak efekt learning by doing ovlivňuje celkový růst a jaká je role hospodářské politiky.

- Stálo by za to prozkoumat, jak se efekty přelévání liší v rámci a mezi odvětvími průmyslu nebo v rámci a mezi zeměmi a regiony.

- To pak má i důležité dopady na růst v souvislosti se scale efektem, tedy jak populace (nebo rozsah odvětví/regionu/země) ovlivní růst.

12 Vládní investice

Základní literatura: BSiM: 4.4

12.1 Veřejné poskytování nerivalitní infrastruktury

- Alternativní opodstatnění vztahu (1) považuje parametr E za veřejný statek/službu, která zvyšuje produktivitu práce a je poskytována vládou.

- Předpokládejme, že tyto služby jsou vyráběny stejnou produkční funkcí jako soukromé služby a že tok služeb zvyšujících produktivitu práce je roven vládním výdajům tj. $E = G$.

- G je financováno proporciální daní z výstupu τ a pro jednoduchost předpokládejme, že vláda má vždy vyrovnaný rozpočet. Potom

$$E = G = \tau Y = \tau F(K, EL)$$

- Díky CRS máme

$$1 = \tau F(K/E, L)$$

což implicitně určuje

$$E = A(K) = cK \tag{6}$$

kde c je kladná konstanta (pro dané τ) určená z $1 = \tau F(1/c, L)$

- Rovnice (6) samozřejmě splňuje (2) takže dostaneme v tomto modelu trvalý růst.

12.2 Model s veřejnými statky

- G je nerivalitní a nevyloučitelný statek (čistý veřejný statek)
- Produkční funkce

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} K_i^{\alpha} G^{1-\alpha} = L_i [A k_i^{\alpha} G^{1-\alpha}]$$

- proporcionální daň z výstupu

$$G = \tau Y$$

- Firmy maximalizují důchod po zdanění (ve vyjádření na hlavu)

$$\max_{k_i} \ (1-\tau) A k_i^{\alpha} G^{1-\alpha} - (r+\delta) k_i - w$$

Podmínky prvního řádu jsou

$$(1-\tau)\alpha A k_i^{\alpha-1} G^{1-\alpha} = r + \delta = R \tag{7}$$

$$(1-\tau)(1-\alpha) A k_i^{\alpha-1} G^{1-\alpha} = w \tag{8}$$

- Optimalizace domácností se nemění (zdanění ovlivní pouze firmy). Dostaneme obvyklé podmínky rovnováhy. Každá firma si vybere stejný podíl kapitálu vůči práci. Můžeme přepsat (agregovanou) produkční funkci jako

$$G = \tau L A k^{\alpha} G^{1-\alpha} = (\tau L A)^{1/\alpha} k$$

- Po dosazení do (7) za G dostaneme

$$R = (1-\tau)\alpha(\tau L)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} A^{1/\alpha}$$

což je nezávislé na K a tím pádem konstantní v čase. Opět zde existuje scale effect.

Po dosazení do Eulerovy rovnice dostaneme

$$\gamma_c = \gamma_k = \gamma_y = \frac{1}{\theta} \left[(1-\tau)\alpha(\tau L)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} A^{1/\alpha} - \delta - \rho \right]$$

- Pokud vláda chce maximalizovat tempo růstu, jaká je optimální míra zdanění? Maximálního tempa růstu je dosaženo, když je první derivace podle τ rovna 0.

- Výsledek je

$$\tau = 1 - \alpha$$

Proto je rovnováha v decentralizované ekonomice s benevolentní vládou

$$\gamma_c = \gamma_k = \gamma_y = \frac{1}{\theta}\left[\alpha^2(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} L^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} A^{1/\alpha} - \delta - \rho\right]$$

- Větší populace způsobí rychlejší růst. Ekonomika profituje z většího rozsahu, protože předpokládáme, že vládní služby jsou nerivalitní. To moc nesedí na datech.

12.3 Crowding in a crowding out

- Nyní se podíváme podrobněji na trochu jiný model, ve kterém jsou vládní služby částečně rivalitní. Tento model vychází z článku Barro (1990).

- Pro jednoduchost neuvažujeme populační růst ani exogenní růst technologie. Ekonomika je uzavřená.

- Zavedeme vládní služby do produkční funkce následujícím způsobem

$$y = \Phi(k, g)$$

kde $g = G/L$ je množství veřejných služeb na pracovníka. Všimněte si, že tato formulace implicitně předpokládá, že G je rivalitní pro uživatele služeb, i když v úzkém slova smyslu.

- Myšlenka zahrnutí g jako odděleného argumentu funkce je ta, že není blízkým substitutem pro soukromé vstupy (k), tj. vládní služby představují něco, co by nebylo nahrazeno odpovídajícími soukromými aktivitami, pokud by zmizely. To je opět založeno na nevyloučitelnosti, která způsobuje, že soukromé subjekty mají malou nebo žádnou motivaci tyto aktivity dělat.

- Produkční funkce $\Phi(.)$ vykazuje CRS ve dvou vstupech k a g, takže

$$y = \Phi(k, g) = k\phi(g/k)$$

s $\phi' > 0$ a $\phi'' < 0$.

- Kdykoliv je to jednodušší, budeme pracovat s Cobb Douglasovou funkcí:

$$y/k = \phi(g/k) = \left(\frac{g}{k}\right)^{1-\alpha}$$

- Vyrovnaný rozpočet je:

$$g = \tau y = \tau k \phi(g/k)$$

- Z toho přímo plyne, že jak g/y tak i g/k závisí pouze na míře zdanění τ. Pro dané τ budou tyto poměry konstatní.

- Mezní produkt kapitálu, tak jak ho vnímají jednotlivý agenti, kteří považují poměr g/k za nezávislý na jejich rozhodnutí, je

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \phi\left(\frac{g}{k}\right)(1-\eta) = \phi\left(\frac{g}{k}\right)\alpha$$

  kde $\eta \equiv \phi' \frac{g}{y} = \frac{\partial y}{\partial g}\frac{g}{y} = 1-\alpha$, je elasticita y s ohledem na g která je v případě C-D funkce rovna konstantě $1-\alpha$.

- Jako obvykle uvažujeme representativní domácnost, která maximalizuje:

$$U = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt \tag{9}$$

- Jelikož návratnost kapitálu po zdanění je $(1-\tau)(\partial y/\partial k)$, je Eulerova rovnice následující

$$\gamma = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)\phi\left(\frac{g}{k}\right)\alpha - \delta - \rho\right] \tag{10}$$

- Nyní se můžeme podívat, jak velikost vlády, charakterizována $\tau = g/y$ ovlivňuje tempo růstu.

- Existují zde dva protichůdné efekty. Přímý vliv růstu τ snižuje motivaci investovat. Na druhou stranu rostoucí g/y také zvyšuje g/k a tím pádem zvyšuje mezní produkt kapitálu. To naopak zvyšuje motivaci investovat.

- V případě Cobb-Douglasovy funkce dostaneme

$$\frac{d\gamma}{d(\tau)} = \frac{1}{\theta}\phi\left(\frac{g}{k}\right)(\phi' - 1)$$

takže dostaneme kopec, kde tempo růstu závisí na velikosti vlády. Tempo roste pokud je g/k tak nízké, že $\phi' > 1$, a naopak tempo klesá, pokud je g/k tak vysoké, že $\phi' < 1$

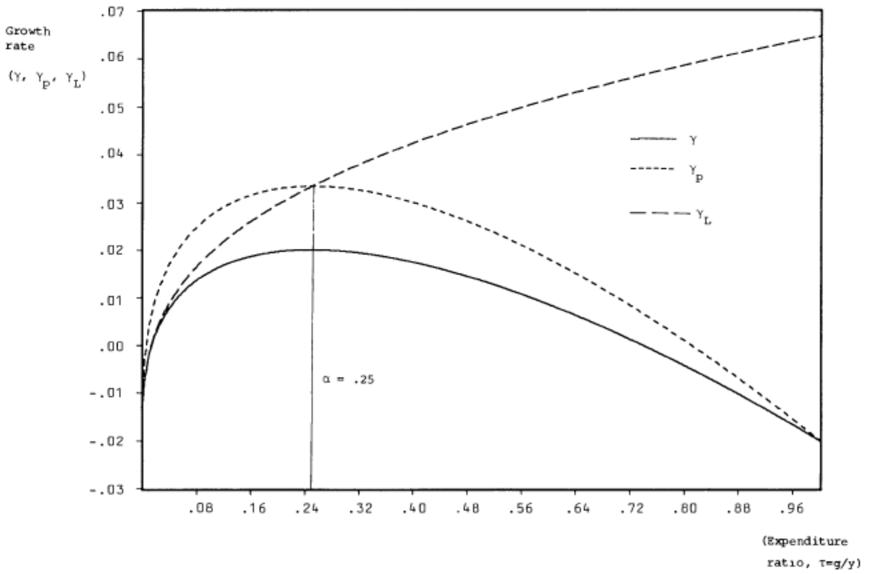


FIG. 1.—Growth rate in three environments. The curves assume Cobb-Douglas technology. γ is from eq. (13), γ_p from eq. (20), and γ_L from eq. (22). Parameter values are $\sigma = 1$, $\alpha = .25$, $\rho = .02$, and $A^{1/\alpha} = .113$. These values imply that the maximum of γ is .02.

- Všimněte si, že tento kopec je vlastně Lafferova křivka. Rostoucí část křivky je ta, kdy vládní výdaje pomáhají ('crowding-in') tím, že zvyšují soukromou produktivitu, zatímco v klesající části vytěsňují ('crowding-out') tím, že zdanění ovlvňuje mezní produkt kapitálu příliš silně.

- Přirozenou podmínkou pro výrobní efektivnost je $\phi' = 1$.

- Když je η konstantní, tak jako v C-D případě, můžeme ukázat, že zvyšení tempa růstu zvyšuje celoživotní užitek. Takže benevolentní vláda by měla vybrat $\tau = g/y$ tak aby $\phi' = 1$.

- Ale to je pouze druhé nejlepší řešení.

- Uvažujte sociálního plánovače, který zafixuje $\tau = g/y$ a potom je schopen diktovat každé domácnosti spotřebu v čase. Pro danou hodnotu g/y, sociální mezní produkt kapitálu je $(1 - g/y)\phi(g/k)$, kde člen $-g/y$ je nutný k zachování konstantního poměru g/y.

- Takže tempo růstu spotřeby, které by vybral sociální plánovač je

$$\gamma_s = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\left[\left(1 - \frac{g}{y}\right)\phi\left(\frac{g}{k}\right) - \delta - \rho\right] \tag{11}$$

- Jelikož $\tau = g/y$, jediný rozdíl mezi (10) a (11) je nepřítomnost členu α v (11). Takže pro všechny úrovně τ je tempo růstu v decentralizovaném řešení nižší.

- Soukromí agenti tedy investují do kapitálu neoptimálně, protože nezahrnují externalitu, že jsou schopni ovlivnit (zvýšit) g a tím zvýšit produkci. Veřejné poskytování těchto služeb je financováno distorzními daněmi z důchodu (τ, které snižují soukromou míru návratnosti kapitálu).

13 Akumulace lidského kapitálu – nový pohled

Základní literatura: BSiM 5.1, 5.3
Doporučená literatura: BSiM 5.2.1-5.2.2, Lucas(1988)

13.1 Jednosektorový model

- V předchozích modelech s lidským kapitálem jsme uvažovali následující produkční funkci
$$Y = F(K, H, L) \tag{12}$$
s konstantními výnosy z rozsahu v K, H a L.

- Víme, že pokud jsou Y, K a H vyráběny stejnou technologií (12), pak zahrnutí lidského kapitálu neovlivní kvalitativní závěry neoklasického modelu (ale výrazně ovlivní kvantitativní predikce).

- To jsme viděli v modelech, kde rovnost míry návratnosti z obou druhů kapitálu zajišťovala, že poměr H/K je konstantní (např. modelu MRW).

- Uvažujme nyní produkční funkci tvaru
$$Y = F(K, H) \tag{13}$$
s konstantními výnosy z rozsahu v širším pojetí kapitálu K a H.

- V této formulaci bychom mohli vnímat lidský kapitál jako: $H = hL$, tj. počet pracovníků L vynásobeno lidským kapitálem typického pracovníka h. V této nové formulaci (13) oproti dřívější (12) je předpoklad, že pouze celková zásoba lidského kapitálu je důležitá pro produkci, nikoliv to, jak je tato zásoba složena z L a h. Volně řečeno, množství práce (L) a kvalita (h) jsou dokonalými substituty.

- Důležitým důsledkem je, že nyní máme konstantní výnosy z rozsahu v akumulovaných výrobních faktorech. To nám zaručí trvalý růst jako AK modelu.

- Přepišme rovnici (13) jako

$$Y = K \cdot f(H/K) \tag{14}$$

- Potom máme

$$\begin{aligned} r + \delta_K = R_K &= \frac{\partial Y}{\partial K} = f(H/K) - (H/K) \cdot f'(H/K) \\ r + \delta_H = R_H &= \frac{\partial Y}{\partial H} = f'(H/K) \end{aligned}$$

  nebo

$$f(H/K) - f'(H/K) \cdot (1 + H/K) = \delta_K - \delta_H$$

  což implikuje fixní hodnotu podílu $H/K = 1/\omega^*$.

- Zadefinujeme $A \equiv f(1/\omega^*)$ a můžeme přepsat produkční funkci (14) jako

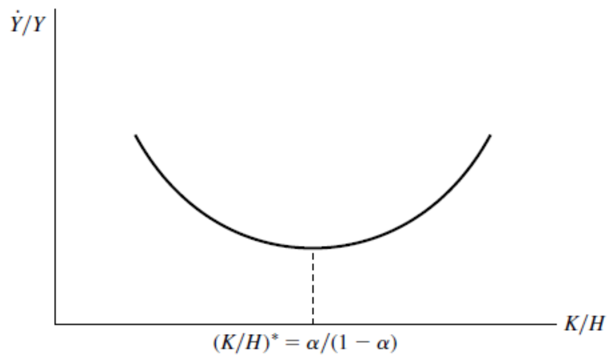
$$Y = AK$$

  takže máme AK model. Pro detailnější popis viz BSiM 5.1.1.

- To, jak zapojíme lidský kapitál do (jednosektorového) modelu, tedy zda uvažujeme technologii (12) nebo (13) výrazně ovlivní chování modelu. To má samozřejmě vliv i na účinnost hospodářské politiky.

13.2 Efekt nerovnovážného růstu (imbalance effect)

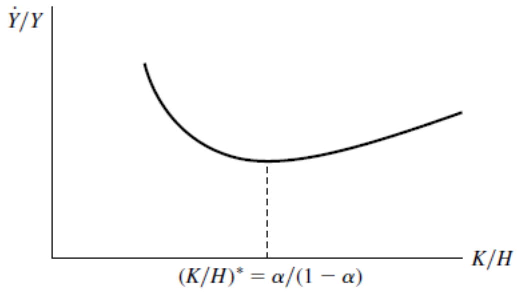
- V několika modelech, se kterými jsme se setkali, jsme dostali konstantní poměr $\omega = K/H$ pramenící z rovnosti míry návratnosti.
- Doposud jsme předpokládali, že je možné dosáhnout tohoto poměru okamžitě. To tedy znamená, že můžeme přeměnit K na H a naopak. Tento předpoklad není moc realistický.
- Nyní předpokládejme, že to není možné a že změny poměru ω mohou nastat pouze z kladných hrubých investic I_H a I_K v rovnicích $\dot{H} = I_H - \delta_H H$ a $\dot{K} = I_K - \delta_K K$. V této situaci dotaneme tzv. efekt nerovnovážného růstu (imbalance effects.)
- Přesněji řečeno, nyní jsme omezeni $I_H \geq 0$ a $I_K \geq 0$.
- Pokud jsme měli na začátku příliš mnoho lidského kapitálu, relativně vůči fyzickému kapitálu, takže $\omega < \omega^*$, pak nejrychlejší cesta, jak zvýšit ω je nastavením $I_H = 0$ (tj. omezení I_H je závazné), takže dochází pouze k depreciaci $\dot{H}/H = -\delta_H$.
- Tento proces povede k přechodné fázi, kde ω roste ke své steady statové hodnotě. Tato hodnota je dosažena v konečném čase. Y poté roste konstantním tempem γ_Y^* jako v AK-modelu, jak jsme zmínili výše.
- Během tohoto přechodu H v podstatě přebírá roli L v neoklasickém růstovém modelu. A protože mezní produkt K je klesající v H/K dostáváme běžnou vlastnost, že růst výstupu klesá během přechodné fáze. Tedy růst monotóně klesá směrem k γ_Y^*.
- Pokud $\omega > \omega^*$ dostaneme stejné závěry, pouze role H a K je opačná.
- Dostaneme, že míra růstu γ_Y klesá monotónně k γ_Y^* jak se ω přibližuje k ω^* z jakékoliv strany.



- To implikuje, že pokud nastane nerovnováha mezi oběma druhy kapitálu, např. snížení ω v důsledku války, která zničí fyzický kapitál, ale nikoliv lidský (WW2), dostaneme přechodnou fázi s rychlejším růstem.

- Podle tohoto modelu bychom však měli dostat stejný závěr z události jako např. morová epidemie, která zničí H, ale neovlivní K. To ale není to, co pozorujeme v datech. (Podobná situace i po WW1).

- Důležitým zdrojem možné asymetrie jsou náklady přizpůsobení, které jsou typicky větší pro lidský kapitál. Podobnou asymetrii je možné vidět i v mnohem složitějších modelech, jakými jsou dvousektorové modely.



13.3 Dvousektorový model. Uzawa-Lucas.

- Jak už jsme několikrát zmínili, měli bychom být skeptičtí ohledně předpokladu, že lidský kapitál může být produkován stejnou technologií jako spotřební statky a fyzický kapitál.

- Produkce nového lidského kapitálu bude zřejmě potřebovat na vstupu daleko více lidského kapitálu, nežli fyzického.

- Abychom si to ukázali, uvažujem následující dvousektorový model

$$Y = C + \dot{K} = F(K, uH) \tag{15}$$
$$\dot{H} = B(1-u)H \tag{16}$$

  kde u je podíl lidského kapitálu používaného při produkci spotřebních statků/fyzického kapitálu. Pro jednoduchost neuvažujeme depreciaci.

- Sektor školství vyrábí nový lidský kapitál za použití pouze lidského kapitálu (učitelé, čas studentů strávený ve škole). To je poněkud extrémní verze výše zmíněného případu.

- Důležitým znakem tohoto modelu je, že jeden z kapitálových vstupů (H) je vyráběn za použití pouze reprodukovatelných vstupů.

- Také nyní můžeme dostat trvalý růst i když nedochází ke změnám technologie. Uvažujem, že se nacházíme na vyvářené růstové trajektorii (BGP), kde

$$\gamma = \dot{C}/C = \dot{K}/K = \dot{H}/H = B(1-u)$$

což je možné pouze pokud u a míra úspor s jsou takové, že v každém čase platí

$$\gamma K = \dot{K} = Y - C = sY = sF(K, uH)$$

- Úplná analýza modelu vyžaduje, že budme endogenizovat alokaci zdojů. Míru úspor s a podíl u tedy určíme z optimalizačního chování reprezentativní domácnosti-výrobce.

- Tahle analýza nám řekně něco nového ohledně krátkého období, dostaneme tak podrobnější popis přechodné dynamiky. Jelikož u^* ovlivňuje dlouhodobou míru růstu, určení u^* nám řekne také něco o tom, co určuje růst.

- Nás bude primárně zajímat to, jak ekonomika reaguje na nerovnováhu v poměru zásob kapitálu ω.

- Úplná analýza je celkem komplikovaná, pro případné zájemce odkazuji na BSiM 5.2.

- Nejdůležitější nový výsledek je ten, že dostaneme asymetrii v efektu nerovnováhy. Pokud $\omega > \omega^*$ (tj. máme příliš málo lidského kapitálu), mezní produkt lidského kapitálu v sektoru výroby statků je vysoký, což implikuje vysokou mzdovou sazbu. To způsobí vysoké náklady v sektoru, který intenzivně využívá tento vstup (tj. sektor vzdělání). To motivuje realokaci zdrojů z výroby lidského kapitálu do výroby spotřebních (kapitálových) statků. To zpomalí produkci vzácného výrobního faktoru (H), takže zpomalí tempo růstu ekonomiky.

- Model tedy predikuje, že bychom měli pozorovat rychlejší zotavení ekonomiky po události, která zničí spíše fyzický kapitál než lidský kapitál.

13.4 Podmínky pro trvalý/endogenní růst

- Nyní zobecníme Uzawa-Lucasův model

$$\begin{aligned} Y = C + \dot{K} + \delta K &= A(vK)^{\alpha_1}(uH)^{\alpha_2} && (17) \\ \dot{H} + \delta H &= B \cdot [(1-v)K]^{\eta_1}[(1-u)H]^{\eta_2} && (18) \end{aligned}$$

- Podíváme se na steady state, kde u a v jsou konstantní a C, K, H, a Y rostou konstantním (ne nutně stejným) tempem.
- Vydělíme rovnici (18) proměnnou H a převedeme obě strany na tempa růstu. Dostaneme

$$\eta_1\gamma_K^* + (\eta_2 - 1)\gamma_H^* = 0 \tag{19}$$

- Vydělíme rovnici (17) proměnnou K a převedením rovnice na tempa růstu dostaneme

$$\left(\frac{C/K}{C/K + \gamma_K^* + \delta}\right) \cdot (\gamma_C^* - \gamma_K^*) = (\alpha_1 - 1)\gamma_K^* + \alpha_2\gamma_H^* \tag{20}$$

- Dá se ukázat, že musíme mít $\gamma_K^* = \gamma_C^*$. To následně imlikuje, že $\gamma_K^* = \gamma_Y^*$, takže Y, K a C rostou stejným tempem.
- Protože (20) se zjednoduší na

$$(\alpha_1 - 1)\gamma_K^* + \alpha_2\gamma_H^* = 0 \tag{21}$$

- Rovnice (19) a (21) tvoří homogenní systém dvou lineárních rovnic se dvěmi neznámými γ_K^* a γ_H^*. Jediné řešení tohoto problému kromě podmínky $\gamma_K^* = \gamma_H^* = 0$ může nastat, pokud je charakteristická matice singulární.
- To implikuje, že jediný způsob, jak dostat endogenní růst ($\gamma_K^* > 0$,$\gamma_H^* > 0$) je, pokud parametry splňují tuto podmínku

$$\alpha_2\eta_1 = (1 - \eta_2)(1 - \alpha_1) \tag{22}$$

- Podívejme se na nějaké speciální případy, kde je tato podmínka splněna
  - Konstantní výnosy z rozsahu (CRS) v obou sektorech ($\alpha_1 + \alpha_2 = \eta_1 + \eta_2 = 1$). Potom máme také $\gamma_H^* = \gamma_K^*$ takže poměr K/H je konstantní.
  - Uzawa-Lucasův model: $\eta_1 = 0$, η_2=1. Potom (22) platí bez ohledu na velikost $\alpha_1 + \alpha_2$, takže můžeme mít jak klesající, tak rostoucí výnosy z rozsahu v sektoru finálních statků.
  - AK-model s $\alpha_1 = 1$ a $\alpha_2 = 0$. Všimněte si, že H je tady přebytečné.
  - Klesající výnosy v jednom sektoru jsou kompenzovány rostoucími výnosy ve druhém sektoru. Předpkládáme, že všechny elasticity jsou kladné. Pokud $\alpha_1 + \alpha < 1$ podmínka (22) může být splněna pokud $\eta_1 + \eta_2 > 1$ a nebo naopak.

- Pokud $\alpha_1 \neq 1$ z podmínky (21) máme

$$\gamma_K^* = \left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}\right)\gamma_H^*$$

takže $\gamma_K^* > \gamma_H^*$ pokud $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ a naopak. Pouze s konstantními výnosy z rozsahu ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$) máme, že $\gamma_K^* = \gamma_H^*$ a konstantní poměr H/K na vyvážené růstové trajektorii.

- Z toho vyplývá, že jediná situace, kdy dostaneme růst a kde H/K je konstantní je ta s konstantními výnosy z rozsahu v obou sektorech. (Konstantní poměr H/K je důležitá vlastnost BGP).

• Co jsme se naučili? Existuje mnoho způsobů jak dostat trvalý/endogení růst v tomto dvousektorovém modelu. Predikce modelů ale podstatně závisí na hodnotách parametrů popisujících technologie (produkční funkce). Protože o těchto hodnotách víme málo, je předpovědní síla těchto modelů omezená. To je velká slabina, ale zároveň výzva pro budoucí výzkum.

Reference

[1] **Barro, R.J.** Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth, *Journal of Political Economy*, October 1990, 98 (5), pp. 103-126. Part 2.

[2] **Irwin D.A. and P.J. Klenow** Learning -by-Doing Spillovers in the Semiconductor Industry, *Journal of Political Economy*, December 1994, 102 (6), pp. 1200-1227.

[3] **Lucas, R.E. Jr** On the Mechanics of Economic Development, *Journal of Monetary Economics*, July 1988, 22 (1). pp. 3-42.

[4] **Thompson, P.** How much did the Liberty shipbuilders learn? New evidence for an old case study, *Journal of Political Economy*, 2001, 109 (1) . Pp. 103-137.

[5] **Romer, Paul M.** Increasing Returns and Long-Run Growth, *The Journal of Political Economy*, Vol. 94, No. 5, October 1986, pp. 1002-1037.